T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİ VE ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU VE ONLARIN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Elvan ERDOĞAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİ VE ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU VE ONLARIN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Elvan ERDOĞAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans 70111314014 numaralı öğrencisi Elvan ERDOĞAN' ın hazırladığı "**Sıkıştıran operatörler prensibi ve ardışık yaklaşımlar metodu ve onların bazı uygulamaları üzerine**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/12/2016 Cuma günü saat 11:00 'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Jüri Üyesi (Danışman) : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. H. Fulya AKIZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..19../..12../2016 tarih ve ..38.. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

19./12./2016

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİ VE ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU VE ONLARIN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Elvan ERDOĞAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa: 37

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde X Banach uzayını X Banach uzayının kendisine dönüştüren lineer ve lineer olmayan $A: X \to X$ operatörleri için sıkıştıran operatörler prensibi ele alındı, incelendi ve öğrenildi. Banach uzayında sıkıştıran operatörlü denklemlerin ardışık yaklaşımlar metodu ile çözüm yöntemi ele alındı ve incelendi.

Ayrı ayrı örneklerde ardışık yaklaşımlar metodunun uygulanması ile cebirsel lineer denklemlerin, integral denklemlerin, adi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmaları gösterildi.

Anahtar kelimeler: Sıkıştıran operatörler prensibi, Ardışık yaklaşımlar metodu, Operatör denklemler, İntegral denklemler, Diferansiyel denklemler.

ABOUT PRİNCİPLE OF COMPRESSİON OPERATORS AND SUCCESİVE APPROXİMANTİON METHOD AND SOME OF THEİR APPLİCATİONS

Elvan ERDOĞAN

Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2016; Page: 37

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, principle of compression operators was studied, examined and learned for linear and nonlinear $A: X \to X$ operators which transforms X Banach space to X Banach space itself. Solution method for equations those have compression operators in Banach space with successive approximation method, was studied and examined. In different examples, finding approximate solutions of algebraic linear equations, integral equations and ordinary differential equations with successive approximation method was shown

Keywords: principle of compression operators, successive approximation method, operator equations, integral eqvations, differential equations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamam da desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız Sayın Yrd. Doç. Dr Abdullah SÖNMEZOĞLU Olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Öğr. Gör. Dr. Mehmet EKİCİ ile her zaman arkamda duran ve destekleyen değerli ailem ve eşim Ömer Emrah ERDOĞAN'a sonsuz teşekkürü borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

min $\boldsymbol{A}$	: A'nın en küçük elemanı, minumumu
max $\boldsymbol{A}$	: A'nın en büyük elemanı, maksimumu
$\lVert \boldsymbol{A} \rVert$	: A operatörünün normu
$\boldsymbol{A'}$	: A kümesinin limit noktaları kümesi
$\overline{\boldsymbol{S}}$	: S kümesinin kapanışı
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$	: A operatörünün değer bölgesi
$\mathbf{C}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların lineer ve normlu uzayı
$\lVert \boldsymbol{x} \rVert_{C_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}} = \mathbf{max}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} \lvert \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \rvert$	: $\mathrm{C}_{[a,b]}$ uzayında $x(t)$ elemanının normu

ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ

1. GİRİŞ

Bu tezde X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştüren $A: X \to X$ operatörlü

$$\varphi = A(\varphi) \tag{1}$$

şekilli operatör denklemlerin ardışık yaklaşımlar metodu ile çözüm yöntemi ele alındı ve incelendi. Sıkıştıran operatörler prensibi verildi. (1) denklemindeki A operatörü sıkıştıran operatör olduğunda, bu operatör denklemin çözümünün var ve tek olduğu gösterildi. Sıkıştıran operatörler prensibinin geometrik açıklaması gösterildi.

(1) denklemindeki A operatörü lineer operatör olduğunda bu hal içinde sıkıştıran operatörler prensibi ele alındı ve incelendi.

A operatörü X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştüren lineer operatör olduğunda ve bu operatör için $\|A\| < 1$ şartı sağlandığında

$$\varphi - A(\varphi) = \psi \tag{2}$$

denkleminin her bir $\psi \epsilon X$ için $\varphi \epsilon X$ çözümünün olduğu gösterildi.

Sıkıştıran operatörler prensibinin ve ardışık yaklaşmalar metodunun bazı uygulamaları gösterildi. Mesela,

a) Ardışık yaklaşmalar metodu ile lineer cebirsel denklemler sisteminin çözüm yöntemi gösterildi.
b) İntegral denklemlerin ardışık yaklaşmalar metodu ile çözüm yöntemi gösterildi.
c) Lineer olmayan integral denklemlere sıkıştıran operatörler prensibinin uygulanmasıyla ardışık yaklaşmalar metodu ile çözüm yöntemi gösterildi.
d) Sıkıştıran operatörler prensibinin ve ardışık yaklaşmalar metodunun adi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmasına uygulanması gösterildi.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Lineer Uzayların Tanımı

Tanım 2.1. $x, y, z \dots$ Elemanlarının E kümesinde her bir $x, y \in E$ çiftine karşı bu $x\ ve\ y$ elemanlarının toplamı olarak adlandırılan $x + y \epsilon E$ elemanı karşı getirdiğinde ve her bir $x \in E$ elemanı ve her bir α (reel veya kompleks) sayısının çarpımı adlanan $\alpha x \epsilon E$ elemanına karşı getirildiğinde ve bu işlemler aşağıdaki özellikleri (aksiyomları) sağladığında E kümesine **lineer uzay** denir.

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. Öyle $0 \in E$ elemanı bulunur ki, her bir $x \in E$ için $x + 0 = x$ (sıfır elemanının varlığı)
4. $1. x = x, \quad 0. x = 0$ (soldaki sıfır sayısı sağdaki sıfır E-nin sıfır elemanıdır)
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

2.2. Lineer Uzaylara Örnekler

Örnek 2.2.1. M sayıda reel sayılardan sütun vektörler yapılmış olduğunu, yani

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_m \end{pmatrix}, \dots$$

vektörlerin kümesini ele alalım. Buradaki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sayılarına x vektörünün koordinatları denir. Bu vektörler kümesinde $x + y$ toplamı ve $\lambda. x$ çarpımı

$$x + y = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_m + \eta_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\xi_m \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Sütun vektörlerin bu kümesi bu işlemlerle lineer uzay oluşturur. Bu lineer uzay $\mathbb{R}^m$ gibi gösterilir.

Örnek 2.2.2: $[a, b]$ Aralığında tanımlanmış tüm sürekli fonksiyonlarının tüm kümesini $\mathbb{C}_{[a,b]}$ gibi gösterelim. $x\,(t), y(t) \in \mathbb{C}_{[a,b]}$ fonksiyonlarının toplamı olan $x(t) + y(t)$ fonksiyonunda $[a, b]$ aralığında sürekli olur.λ reel sayısı olmakla $\lambda x(t)$ fonksiyonuda $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Böylece $\mathbb{C}_{[a,b]}$ kümesi lineer uzay olur.

2.3. Normlu Uzayların Tanımı

Tanım 2.3. Lineer E uzayında her bir $x \in E$ elemanına karşı reel negatif olmayan $\|x\| \geq 0$ sayısı karşı getirildiğinde ve x elemanının normu olarak adlandırılan bu $\|x\|$ sayısı aşağıdaki norm aksiyomlarını sağladığında lineer E uzayına normlu uzay denir.

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ yalnız ve yalnız $x = 0$ olduğunda
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, (burada α skaler sayıdır.)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (üçgen eşitsizliği)

Yukarıdaki norm aksiyomlarından kolaylıkla ters üçgen eşitsizliği alınır.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \tag{2.1}$$

normlu uzayda iki $x, y \in E$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{2.2}$$

formülü ile tanımlanır.

Normlu uzaylarda aşağıdaki önemli kümeler tanımlanır

$$S_r(x_0) = \{x\epsilon E : \|x - x_0\| < r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan açık yuvar

$$\bar{S}_r(x_0) = \{x\epsilon E : \|X - X_0\| \le r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan kapalı yuvar;

$$\sigma_r(x_0) = \{x\epsilon E: \|X - X_0\| = r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan küreye $\|x\|$ sayısına $x \in E$ elemanının uzunluğu denir.

E normlu uzayından alınmış $M \subset E$ kümesi için öyle $R > 0$ sayısı bulunursa ki, her bir $x \in M$ için $\|x\| \le R$ eşitsizliği sağlandığın M kümesi normlu E uzayında sınırlı küme denir.

2.4. Normlu Uzaylara Örnekler

Örnek 2.4.1. Sayısal doğru $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Burada norm $\|x\| = |x|$ eşitliği ile tanımlanır.

Örnek 2.4.2. m −boyutlu Euclide uzayı E^m. $\mathbb{R}^m$ Lineer uzayında

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

elemanın normu,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2}$$

formülü ile tanımlandığında bu normlu uzay E^m gibi gösterilir ve $m-$ boyutlu Euclide uzayı adlandırılır.

Örnek 2.4.3. $\mathbb{C}^m$ Uzayı $\mathbb{R}^m$ lineer uzayında $x\epsilon\mathbb{R}^m$ elemanının normu,

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq m} |\xi_i|$$

formülü ile tanımlandığında bu normlu uzay $\mathbb{C}^m$ gibi gösterilir.

Örnek 2.4.4. $\mathbb{C}_{[a,b]}$ Uzayı. Bu uzayının elemanları $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır ve bu uzayda $x(t)\epsilon\mathbb{C}_{[a,b]}$ elemanın normu,

$$\|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$$

formülü ile tanımlanır.

Örnek 2.4.5. $\mathbb{C}_{[a,b]}$ Uzayı. Bu uzayın elemanları

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonları olmakla $[a,b]$ aralığında sürekli olan vektör fonksiyonlardır. Bu uzayda $x(t)\epsilon\mathbb{C}_{[a,b]}$ elemanının normu

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq m} (\max_{t\epsilon[a,b]} |x_i(t)|$$

formülü ile tanımlanır.

Örnek 2.4.4'de $x(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli reel değerli ve kompleks değerli fonksiyonlar olabilirler.

2.5. Normlu Uzaylarda Dizilerin Limiti

E Normlu uzayında $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ elemanlar dizisini ele alalım. $x_0 \epsilon E$ olsun.

Tanım 2.5. $x_0 \in E$ Elemanı için $n \to \infty$ şartında $\|x_n - x_0\| \to 0$ şartı sağlandığında $\{x_n\} \subset E$ dizisi $x_0 \in E$ elemanına yakınsar denir veya x_0 elemanı $\{x_n\}$ dizisinin limitidir denir.

$S_r(x_0)$ Açık yuvarına x_0 noktasının r komşuluğu denir.

Limitin aşağıdaki özellikleri vardır.

1. $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ Olduğunda x_0 noktasının keyfi $\delta_r(x_0)$ komşuluğunda $\{x_n\}$ dizisinin ilk sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots ,x_n$ elemanları hariç tüm $n > N$ için $x_n \in \delta_r(x_0)$ olur.
2. $\{x_n\}$ Dizisinin x_0 limiti tekdir.
3. $\{x_n\}$ Dizisinin keyfi alınmış alt $\{x_{n_k}\}$ diziside x_0 elemanına yakınsar.
4. $\lambda_n \to \lambda_0$, $x_n \to x_0$ olduğunda $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ olur.
5. $\{y_n\} \subset E, \{X_n\} \subset E$, $x_n \to x_0 \epsilon E$, $y_n \to y_o \epsilon E$ olduğunda $x_n + y_n \to x_0 + y_0\ olur.$
6. Ters üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla $x_n \to x_0$ olduğunda $\|x_n\| \to \|x_0\|$ olduğu ispatlanır.
7. Normlu Uzayda her bir yakınsak dizi sınırlı dizi olur.

Örnek 2.5.1. $\mathbb{C}^m$ ve E^m uzaylarında dizilerin yakınsaklığı koordinatlar üzerinedir. Yani

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1^{(n)} \\ \xi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_m^{(n)} \end{pmatrix} \ dizisinin\ x_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \vdots \\ \xi_m^0 \end{pmatrix}$$ elemanına yakınsaklığı

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(0)}, i = 1,2,\dots,m$$ yakınsaklığıdır.

Örnek 2.5.2. $\mathbb{C}_{[a,b]}$ uzayında $\{x_n(t)\}$ dizisinin $x(t)\epsilon\mathbb{C}_{[a,b]}$ fonksiyonuna yakınsaklığı düzgün yakınsaktır. Gerçektende , $\mathbb{C}_{[a,b]}\ de$ yakınsaklık

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\epsilon[a,b]} |x_n(t) - x(t)| = 0$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu aynı zamanda sürekli $\{x_n(t)\}$ fonksiyonlar dizisinin $[a, b]$ aralığında sürekli $x(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığının bir tanımıdır.

Örnek 2.5.3. $\mathbb{C}_{[a,b]}$ uzayında $\{x_n(t)\}$ vektör fonksiyonlar dizisinin x(t) vektör fonksiyonuna yakınsaklığı $[a, b]$ aralığında $\{x_n(t)\}$ dizisinin her bir koordinatının uygun olarak x(t) vektör fonksiyonunun uygun koordinatlarına düzgün yakınsaklığıdır.

$$x_i^{(n)}(t) \rightrightarrows x_i(t), i = 1,2, \dots, m$$

2.6. Banach Uzaylarının Tanımı

Banach uzaylarını tanımlamak için önce Caucyh dizilerin tanımını verelim.

Tanım 2.6. X uzayı normlu uzay olsun. $\{x_n\} \subset X$ dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını aldığımızda öyle N numarası bulunursa ki, her bir $n > N$ ve her bir $p = 1,2,3, \dots$ doğal sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanırsa $\{x_n\}$ dizisine normlu X uzayında fundamental dizi veya Cauchy dizisi denir.

Kolaylıkla göstermek istersek her bir yakınsak dizi Cauchy dizidir. Ama bunun aksi her zaman doğru olmayabilir.

Tanım 2.6.1. Normlu X uzayında her bir Cauchy dizisi yakınsak olduğunda bu X normlu uzayına tam normlu uzay denir. Her bir tam normlu uzaya Banach uzayı denir.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}^m, E^m, C_{[a,b]}$ ve $\mathbb{C}_{[a,b]}$ normlu uzayları tam normlu uzaylardır. Yani bu uzayların her biri Banach uzayıdır.

2.7. Normlu ve Banach Uzaylarında Seriler

X uzayının normlu uzay olduğunu varsayalım. $x_n \in X$ olmak üzere sonsuz

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

toplamına normlu X uzayında seri denir.

Bu serinin kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \ , n = 1,2, \ldots$$

eşitlikleri ile tanımlanan dizidir. Bu kısmi toplamlar dizisi X uzayında yakınsak olduğunda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsakdır denir.

Ele aldığımız $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine uygun sayısal

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

serisi yakınsak olduğunda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ Serisine mutlak (absolyut) yakınsak seri denir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem: X uzayı Banach uzayı olsun. O zaman bu uzayda her bir mutlak yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsak olur.

İspat: Ele aldığımız serinin kısmi toplamlar dizisinin Cauchy dizisi olduğu aşağıdaki eşitsizliklerden görülür.

$$\|S_{n+p} + S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$$

Böylece $\sum_{k=n}^{\infty} \|x_k\|$ serisi yakınsak olduğundan Cauchy kriterisi sağlandığından bu eşitsizlikden $\{S_n\}$ dizisi fundamentaldır. X Banach uzayı olduğundan $\{S_n\}$ dizisi yakınsaktır. Teorem ispatlandı.

2.8. Operatörlerin Genel Tanımı

$X \ ve \ Y$ keyfi doğal kümeler olduğunu varsayalım. D kümesi X kümesinin alt kümesi olsun, yani $D \subseteq X$ olsun. Keyfi alınmış $x \epsilon D$ elemanına karşı belli bir kuralla bir tane belirli $y \in Y$ elemanı karşı getirildiğinde burada bir $y = F(x)$ operatörü verilmiştir denir. D kümesine F operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(F)$ gibi gösterilir. Burada

$$R(F) = \{y \in Y: y = F(x), \qquad x \in D\}$$

kümesine F operatörünün değerler bölgesi denir.

F operatörünün yaptığı dönüşümü şematik olarak

$$X \supseteq D(F) \overset{F}{\rightarrow} R(F) \subseteq Y$$

gibi gösterebiliriz. Bu gösterilişi kısaca olarak $F: X \rightarrow Y$ gibi gösterirler. Bu gösterilişte $D(F) = X$ ve $R(F) = Y$ olduğu düşünülmüyor.

Burada $y = F(X)$, $x \in D(F)$, $y \in R(F)$ olduğunda $y \in Y$ elemanına $x \in D(F)$ elemanının izdüşümü(obrazı) $x \in D(F)$ elemanına ise $y \in R(F)$-in proobrazı denir.

3. ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU

Burada X uzayının Banach uzayı olduğunu ve A operatörünün X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştürdüğünü (yani X Banach uzayının elemanlarını X Banach uzayının elemanlarına dönüştüren operatör olduğunnu) varsayalım.

Burada $\varphi \epsilon X$ olmakla

$$\varphi = A(\varphi) \tag{3.1}$$

denklemini ele alalım. (3.1) denklemi için ardışık yaklaşmalar metodu aşağıdaki şekilde oluşturan metottur. X Banach uzayından keyfi bir $\varphi_0 \epsilon X$ elemanını alıp aşağıdaki

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \varphi_2 = A(\varphi_1), \dots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n), \dots$$

dizisi inşaa edilir. $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ elemanlar dizisine ardışık yaklaşmalar denir. Burada varsayalım ki, $\{\varphi_n\}$ ardışık yaklaşmalar dizisi bir $\varphi \epsilon X$ elemanına yakınsaktır. (3.1) denklemindeki A operatörünün öyle bir operatör olduğunu varsayalım ki , A operatörü altında limite geçmek mümkündür.

Yani $\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n) = A(\lim_{n\to\infty} \varphi_n)$ işleminin mümkün olduğunu varsayalım.

Bu durumda,

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n)$$

eşitliğinin her yanından $n \to \infty$ şartında limite geçtiğimizde

$$\varphi = A(\varphi)$$

eşitliği bulunur.

Bu şartlar sağlandığında (3.1) denkleminin çözümü vardır ve (3.1) denkleminin çözümü ardışık yaklaşımlar metodu ile bulunmuş olur. Öndeki kısımda bu ardışık yaklaşmalar metodunun yakınsaklığı için yeter şart gösterilecektir.

4. SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİ

Tanım 4.1. M kümesinin X Banach uzayında bir küme olduğunu varsayalım.M kümesinde tanımlanmış A operatörü için aşağıdaki iki tane şart sağlandığında yani

1) $A: M \to M(yani\ her\ bir\ \varphi \epsilon M\ için\ A(\varphi)\epsilon M\ şartı\ sağlandığında)$
2) $0 < k < 1$ şartını sağlayan öyle k sayısı bulunursa ki, her bir $\varphi_1, \varphi_2 \in M$

için

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\| \tag{4.1}$$

şartı sağlanırsa A operatörü M kümesini sıkıştırır denir.

Örnek 4.1.1. X uzayının $x \circ y$ düzlemi olduğunu varsayalım. Aşağıdaki

$$A\binom{x}{y} = \binom{k_1 x}{k_2 y}, \qquad 0 < k_1 < 1\ ,0 < k_2 < 1$$

eşitliği ile tanımlanan A operatörü $M = X$ düzlemini sıkıştırır.

Sıkıştıran operatörün geometrik anlamından, bu sıkıştıran operatör noktalar arasındaki uzaklığı kısadır.

Burada biz ardışık yaklaşmalar metodunun yakınsaklığını garanti eden sıkıştıran operatörler prensibi adlandırılan teoremi yazıp ispatlayalım.

Teorem 4.1: Sıkıştıran Operatörler Prensibi

M kümesinin X Banach uzayında kapalı sınırlı küme olduğunu varsayalım. A operatörünün M kümesini sıkıştıran operatör olduğunu varsayalım. Bu şartlar sağlandığında

$$\varphi = A(\varphi)$$

denkleminin $\varphi \epsilon M$ çözümü var ve bu çözüm tekdir.

İspat 4.1. Bu teoremin ispatına geçmeden önce hatırlatalım ki, $a\epsilon X$ noktası M kümesinin limit noktası denir. Öyle ki, a noktasının keyfi $S_r(a)$ komşuluğunda M kümesinden a noktasından başka en azından bir noktası olsun. Dikkate alalım ki,

$a \in X$ noktasının M kümesinin limit noktası olması için gerek ve yeter şart M kümesinden elemanları a dan farklı olan $x_n \neq a$ ve a noktasına yakınsak olan bir$\{x_n\} \subset M$ dizisinin olmasıdır.

Tüm limit noktalarını içeren M kümesine X uzayında kapalı küme denir. Şimdi teoremi ispatlayalım. Bu amaçla (3.1) denklemine ardışık yaklaşmalar metodunu uygulayalım. Keyfi $\varphi_0 \epsilon M$ noktasını alalım ve aşağıda ki ardışık yaklaşımlarını inşa edelim:

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \varphi_2 = A(\varphi_1), \ldots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n), \ldots$$

burada $A: M \to M$ olduğundan tüm $\varphi_n \epsilon M$ olur.

Şimdi $\{\varphi_n\}$ dizisinin yakınsak dizi olduğunu ispatlayalım. Bu $\{\varphi_n\}$ dizisinin yakınsaklığı aşağıdaki

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \cdots \qquad (4.2)$$

serisinin yakınsaklığına eşdeğerdir (eguvalentir). Çünkü bu serinin kısmi toplamı S_n , φ_n elemanına eşittir. Yani $S_n = \varphi_n$

M kümesi teoremin şartına göre sınırlı olduğundan öyle $c > 0$ sayısı bulunur ki, her bir $\varphi \epsilon M$ için $\|\varphi\| \leq C$ eşitsizliği sağlanır. Matematiksel tümevarım (indüksiyon) yönteminin uygulanmasıyla

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq 2.c.k^n , n = 0,1,2, \ldots \qquad (4.3)$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayalım. (4.3) eşitsizliğinin sağ yanındaki $0 < k < 1$ sayısı (4.1) eşitsizliğinin sağ yanındaki sayıdır.

(4.3) eşitsizliğinin $n = 0$ hali için sağlandığı açıktır. Şimdi (4.3) eşitsizliğinin n sayısı için sağlandığını kabul edelim ve $n + 1$ sayısı için (4.3) eşitsizliğini ispatlayalım. Böylece

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|A(\varphi_n) - A(\varphi_{n-1})\| \leq k\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq 2.c.k^{n+1}$$

Eşitsizliği (4.3) eşitsizliğini ispatlamış olur. (4.3) eşitsizliğinden görülür ki,

$$2c\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{2c}{1-k}$$

Yakınsak serisi (4.2) serisinin majorant serisi olduğundan (4.2) serisi mutlak (absolgut) yakınsak seridir. X Banach uzayı olduğundan (4.2) serisi X uzayında bir φ elemanına yakınsar. Böylece $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ limiti vardır. M kümesi kapalı küme olduğundan $\varphi \epsilon M$ olur.

Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n) = A(\varphi) \tag{4.4}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayalım. (4.4) eşitliğini ispatlayalım

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n)$$

eşitliğinin her yanından $n \to \infty$ şartında limit aldığımızda φ elemanının (3.1) denkleminin çözümü olduğunu görmüş oluruz.

Böylece $n \to \infty$ şartında

$$\|A(\varphi_n) - A(\varphi)\| \le k\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$$

olduğu görülür. Bu (4.4) eşitliğinin ispatıdır.

Şimdi (3.1) denkleminin çözümünün tek olduğunu ispatlayalım. Aksini farz edelim varsayalım ki, $\varphi, \psi \epsilon M$ elemanları (3.1) denkleminin iki farklı çözümleridir. O zaman

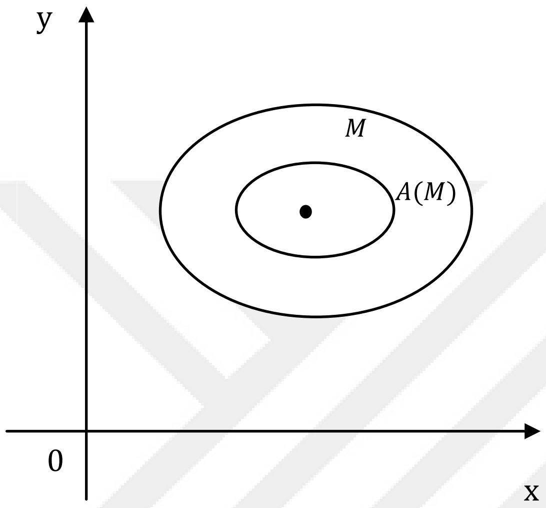
$$\varphi - \psi = A(\varphi) - A(\psi)$$

olur. Bu eşitliğin her yanından norm olarak

$\|\varphi - \psi\| \le k\|\varphi - \psi\|$ olur. $0 < k < 1$ olduğundan $\|\varphi - \psi\| = 0\,, yani\ \varphi = \psi$ olduğunu alırız. Böylece sıkıştıran operatörler prensibi hakkındaki teorem tam olarak ispatlandı.

5. SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİNİN GEOMETRİK AÇIKLAMASI (İNTERPRETASYONU)

X uzayının düzlem olduğunu ve $M \subset X$ kümesinin ise düzlemde kapalı sınırlı küme olduğunu varsayalım



Şekil 1 Sıkıştıran operatör prensibinin geometrik gösterimi (İnterpretasyonu)

A operatörünün M kümesini sıkıştırdığını varsayalım. $d > 0$ sayısının M kümesinin çapı (diametri, köşegeni) olduğunu varsayalım.

Bu durumda $A(M)$ kümesinin diametri kd sayısından küçük veya eşit olacaktır ve $A(M) \subset M$ olacaktır. Benzer şekilde $A^n(M)$ kümesinin diametri $k^n d$ sayısından küçük veya eşit olacaktır. Böylece biri diğerine dahil olan kapalı sınırlı kümeler dizisini almış oluruz.

$$M \supset A(M) \supset A^2(M) \dots \supset A^n(M) \dots$$

Bu kümelerin çapları sıfıra yakınsak olur. Biri diğerine dahil olan çapları sıfıra yakınsayan kapalı sınırlı kümeler dizisinin bu kümelerin her birine dahil olan tek bir tane ortak noktası olduğunu biz matematik analizden biliyoruz. Bu φ noktası (3.1) denkleminin çözümü olur.

6. LİNEER OPERATÖRLÜ SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİ

Burada A operatörünün tüm X Banach uzayında tanımlanmış olduğunu varsayalım. Bu A operatörü için keyfi alınmış $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ elemanları keyfi alınmış $\alpha_1 \; ve \; \alpha_2$ skaler sayıları için

$$A(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 A(\varphi_1) + \alpha_2 A(\varphi_2)$$

eşitliği sağlandığında bu A operatörüne lineer operatör denir.A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\|A(\varphi)\| \tag{6.1}$$

formülü ile tanımlanır.

$\|A\| < +\infty$ şartı sağlandığında lineer A operatörüne sınırlı operatör denir.

Biz burada yalnız lineer sınırlı operatörleri ele alacağız. (6.1) tanımından keyfi $\varphi \epsilon X$ için

$$\|A(\varphi)\| \leq \|A\|.\|\varphi\| \tag{6.2}$$

eşitsizliğinin sağlandığı alınır.

A ve $\tilde{A}$ operatörlerinin toplamı

$$\left(A + \tilde{A}\right)(\varphi) = A(\varphi) + \tilde{A}(\varphi)$$

eşitliği ile tanımlanır.A operatörünün α sayısına çarpımı αA aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\alpha A)(\alpha) = \alpha A(\varphi)$$

burada $A \; ve \; \tilde{A}$ operatörlerinin $A\tilde{A}$ çarpımı

$$\left(A\tilde{A}\right)(\varphi) = A\left(\tilde{A}(\varphi)\right)$$

formülü ile tanımlanır.

$A\ ve \tilde{A}$ operatörleri lineer operatörler olduklarında $A + \tilde{A}\ \ ve\ \alpha A$ operatörleride lineer operatör olurlar.

Aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

LEMMA: $A\ ve \tilde{A}$ operatörlerinin X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştüren operatör olduklarını varsayalım.

O zaman

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \,, \|A + \tilde{A}\| \leq \|A\| + \|\tilde{A}\| \,,$$

$$\|A\tilde{A}\| \leq \|A\|.\|\tilde{A}\| \tag{6.3}$$

özellikleri sağlanır. Burada α skaler sayıdır.

İspat: $\|\boldsymbol{\varphi}\| \leq 1$ için

$$\|(A + \tilde{A}\,)(\varphi)\| = \|A(\varphi) + \tilde{A}\ (\varphi)\| \leq \|A(\varphi)\| + \|\tilde{A}(\varphi)\|$$

$$\leq \|A\|\|\varphi\| + \|\tilde{A}\|\|\varphi\| \leq \|A\| + \|\tilde{A}\|$$

dır**.** Buradan da

$$\|A + \tilde{A}\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|(A + \tilde{A})(\varphi)\| \leq \|A\| + \|\tilde{A}\|$$

olur. Yani $\|A + \tilde{A}\| \leq \|A\| + \|\tilde{A}\|$ olduğu görülür.Ayrıca

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\|\alpha A(\varphi)\| \leq |\alpha| \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\|A(\varphi)\| = |\alpha|.\|A\|$$

dır. Böylece $\|\alpha A\|$=$|\alpha|\|A\|$ eşitliğide ispatlandı.

Son olarak

$$\|(A\tilde{A})\varphi\| = \|A(\tilde{A}(\varphi))\| \leq \|A\|\|\tilde{A}(\varphi)\| \leq \|A\|.\|\tilde{A}\|.\|\varphi\| \leq \|A\|.\|\tilde{A}\| \,,$$

Yani $\|(A\tilde{A})\varphi\| \leq \|A\|.\|\tilde{A}\|$ eşitsizliği $\|\varphi\| \leq 1$ yuvarında sağlanır. Bu eşitsizlikten $\|\varphi\| \leq 1$ şartında

$$\|A\tilde{A}\| \leq \|A\|.\|\tilde{A}\|$$

eşitsizliği alınır. Böylece (6.3) ispatlanmış oldu.

Şimdi A operatörünün tüm X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştürdüğünü varsayalım. Bu halde A operatörünün kuvvetleri

$$A^2(\varphi) = A\big(A(\varphi)\big),$$

$$A^3(\varphi) = A\big(A^2(\varphi)\big),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A^n(\varphi) = A\big(A^{n-1}(\varphi)\big)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Şeklinde tanımlanır.

Sonuç olarak; Aşağıdaki değerlendirme doğrudur, yani

$$\|A^n\| \le \|A\|^n \tag{6.4}$$

dır. Gerçekten de keyfi $\varphi \epsilon X$ için

$$\|A^2(\varphi)\| \le \|A\|.\|A(\varphi)\| \le \|A\|^2.\|\varphi\| \ ,$$

yani

$$\|A^2\| \le \|A\|^2$$

eşitsizliği sağlanır. Matematiksel indüksiyon(tümevarım) yöntemini kullanarak keyfi $\varphi \epsilon X$ için

$$\|A^n(\varphi)\| \le \|A\|^n.\|\varphi\|$$

eşitsizliğini buluruz. Buradan da

$$\|A^n\| \le \|A\|^n$$

eşitsizliğinin sağlandığı bulunur.

Dikkate alalım ki, her bir $\varphi \epsilon X$ için $\mathrm{I}(\varphi) = \varphi$ formülü ile tanımlanan $\mathrm{I}: X \to X$ operatörüne birim operatör denir. I operatörü lineerdir ve ||I||=1 dir.

TEOREM 2: A operatörü X Banach uzayını X Banach uzayına dönüştüren lineer operatör olduğunu ve

$$\|A\| < 1 \tag{6.5}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu şartlar sağlandığında

$$\varphi - A(\varphi) = \psi \tag{6.6}$$

denkleminin her bir $\psi \ \epsilon X$ için $\varphi \in X$ çözümü vardır ve bu çözüm tekdir.

İSPAT: Bu teoremi ispatlamak için ardışık yaklaşmalar metodunu ve sıkıştıran operatörler prensibini kullanalım. Bu amaçla burada

$$\varphi_0 = \psi\,, \varphi_1 = \psi + A(\varphi_0), \dots, \varphi_n = \psi + A(\varphi_{n-1}), \dots$$

eşitlikleri ile $\{\varphi_n\}$ dizisini inşaa edelim.

Burada

$$\varphi_n = \psi + A(\psi) + \cdots + A^n(\psi) \tag{6.7}$$

olur.

Şimdi burada (6.6) denkleminin çözümünün

$$\varphi = \psi + A(\psi) + \cdots + A^n(\psi) + \cdots \tag{6.8}$$

eşitliği ile bulunduğunu ispatlayalım.

Burada (6.2) eşitsizliğini ve (6.5) şartını kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz

$$\|\varphi\| \le \|\psi\|(1 + \|A\| + \|A\|^2 + \cdots + \|A\|^n + \cdots) = \|\psi\|.(1 - \|A\|)^{-1} \tag{6.9}$$

Bu (6.9) eşitsizliğinden (6.8) serisinin yakınsak olduğu görülür. Bu yüzden (6.8) serisinin kısmi toplamlar dizisi olan φ_n (bakınız 6.7) dizisi $\varphi\epsilon\ X$ elemanına yakınsıyor.$n \to \infty$ şartında

$$\|A(\varphi - \varphi_{n)}\| \le \|A\|\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$$

Olduğundan. $n \to \infty$ şartında $A(\varphi_n) \to A(\varphi)$ olduğu bulunur. Bu yüzdende

$$\varphi_n = \psi + A(\varphi_{n-1})$$

eşitliğinin her yanından $n \to \infty$ şartında limit aldığımızda $\varphi \epsilon X$ elemanının (6.6) denkleminin çözümü olduğunu ispatlamış oluruz.

Şimdi burada (6.6) denkleminin çözümünün tek olduğunu ispatlayalım. Aksini farz edelim. $\varphi \; ve \; \tilde{\varphi}$ elemanlarının (6.6) denkleminin iki farklı çözümleri olduklarını varsayalım. A operatörünün lineer operatör olduğunu kullanarak aşağıdaki eşitliği yazalım,

$$\varphi - \tilde{\varphi} = A(\varphi - \tilde{\varphi})$$

buradan da $\|A\| < 1$ olduğundan

$$0 \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \|A\|.\|\varphi - \tilde{\varphi}\|$$

olur. $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0, yani \;\; \varphi \equiv \tilde{\varphi}$ olduğu alınır.

Böylece teorem tam olarak ispatlandı. Hatırlatalım ki $\varphi \; ve \; \psi$ elemanları n boyutlu sütün vektörler uzayından alınmış olduklarında A ise $n \times n$ boyutlu matris olduğunda (6.6) denkleminin çözümü

$$\varphi = (\mathrm{I} - A)^{-1}\psi \tag{6.10}$$

formülü şeklinde yazılır ve $(\mathrm{I} - A)^{-1}$ matrisi (I-A) matrisinin ters matrisi olur. Bu işaretleme Banach uzaylarında da sağlanır. $(\mathrm{I} - A)^{-1}$ operatörü $(\mathrm{I} - \mathrm{A})$ operatörünün ters operatörü olup ψ elemanını φ elemanına dönüştüren operatördür. Teoremin şartlarının sağlanmasıyla aşağıdaki sonuç doğrudur.

SONUÇ: $(\mathrm{I} - A)^{-1}$ ters operatörü de lineerdir ve aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|(\mathrm{I} - A)^{-1}\| \leq (\mathrm{I} - \|A\|)^{-1} \tag{6.11}$$

Gerçekten de

$$\varphi_1 - A(\varphi_1) = \psi_1 \; ,$$

$$\varphi_2 - A(\varphi_2) = \psi_2$$

olursa $\alpha_1 \; ve \; \alpha_2$ keyfi skaler sayılar olmak üzere $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ elemanı aşağıdaki

$$\varphi - A(\varphi) = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

denkleminin çözümü olur. Buradan da

$$(\mathrm{I}-A)^{-1}(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(\mathrm{I}-A)^{-1}(\psi_1)+\alpha_2(\mathrm{I}-A)^{-1}(\psi_2)$$

eşitliği alınır. Böylece $(\mathrm{I}-A)^{-1}$ ters operatörün lineer operatör olduğu ispatlanmış oldu. (6.9) değerlendirilmesinden aşağıdaki değerlendirmenin sonucunu buluruz.

$$\|\varphi\|=\|\,(\mathrm{I}-A)^{-1}\psi\|\leq(\mathrm{I}-\|A\|)^{-1}.\,\|\psi\|$$

Bu eşitsizlik her bir $\psi\epsilon X$ için sağlandığından bu eşitsizlikden (6.11) eşitsizliği alınır. (6.6) denkleminin çözümü olan

$$(\mathrm{I}-A)^{-1}\,(\psi)=(\mathrm{I}+\mathrm{A}+A^2+\cdots+A^n+\cdots)(\psi) \qquad (6.12)$$

denklemine NEUMANN serisi denir. $(\mathrm{I}-A)^{-1}$ operatörüne (6.6) denkleminin REZOLVENTİ denir.

Teoremin şartları sağlandığında (6.6) denkleminin $(\mathrm{I}-A)^{-1}$ rezolventi aşağıdaki seriye açılır

$$(\mathrm{I}-A)^{-1}=(\mathrm{I}+\mathrm{A}+A^2+\cdots+A^n+\cdots)$$

bu seri norma nazaran yakınsak seridir. (6.6) denkleminin rezolventi için

$$(\mathrm{I}-A)^{-1}=\mathrm{I}+A(\mathrm{I}-A)^{-1} \qquad (6.13)$$

eşitliği sağlanır. (6.13) eşitliğine Hilbert eşitliği denir. (6.13) Hilbert eşitliğini ispatlamak için (6.6) denkleminde φ elemanının yerine

$$\varphi=(\mathrm{I}-A)^{-1}\psi$$

ifadesini yazalım. O zaman her bir $\psi\epsilon X$ için

$$(\mathrm{I}-A)^{-1}(\psi)=[\mathrm{I}+A(\mathrm{I}-A)^{-1}](\psi) \qquad (6.14)$$

eşitliğini alırız. (6.14) eşitliğinden de (6.13) eşitliği alınır.

7. SIKIŞTIRAN OPERATÖRLER PRENSİBİNİN VE ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODUNUN BAZI UYGULAMALARI

7.1 Ardışık Yaklaşımlar Metodu İle Lineer Cebirsel Denklemler Sisteminin Çözümü

C^m uzayını ele alalım

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

aldığımızda $\rho(x, y) = \|x - y\|_{C^m} = \max\limits_{0 \le i \le m} |\xi_i - \eta_i|$. C^m uzayı Banach uzayıdır.C^m uzayı Banach uzayıdır. C^m uzayında

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_i + b_i \quad (i = 1,2, \dots, m)$$

eşitlikleri ile verilen

$$y = Ax$$

operatörünü ele alalım. Burada aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|_{C^m} = \|Ax_1 - Ax_2\| &= \max_{1 \le i \le m}\left|\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}\right| = \max_{1 \le i \le m}\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right)\right| \\ &\le \max_{1 \le i \le m}\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\left|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right| \le \max_{1 \le j \le m}\left|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right| . \max_{1 \le i \le m}\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right| \\ &= \|x_1 - x_2\|_{C^m}. \max_{1 \le i \le m}\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|. \end{aligned}$$

Şimdi biz burada tüm $i = 1,2, \dots, m$ için

$$\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right| < 1 \qquad (7.1)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsaysak sıkıştıran operatörler prensibinin uygulaması şartı sağlanacaktır ve ardışık yaklaşmalar metoduna yakınsayacaktır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

TEOREM: Eğer $(a_{ij})_{i,j=1}^{m}$ matrisi için $\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right| < 1$ eşitsizliği tüm $i = 1,2,\dots,m$ için sağlanırsa, o zaman

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_i = b_i\,, \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

denklemler sisteminin tek bir

$$x_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^{(0)} \\ \xi_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_m^{(0)} \end{pmatrix}$$

çözümü vardır. Bu çözüm keyfi başlangıç

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

yaklaşmasını alarak ardışık yaklaşmalar metodu ile bulmak olur. (7.1) şartı ele aldığımız sistem için ardışık yaklaşmalar metodunun yakınsaklığı için yeter şarttır. Ele aldığımız sistemi E^m Euclide uzayında ele aldığımızda ardışık yaklaşmalar metodunun yakınsaklığı için başka yeter şart bulunacaktır. Gerçektende , E^m Euclide uzayında $x\ ve\ y$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\|x-y\|_{E^m} = \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\xi_i - \eta_i)^2}$$

formülü ile tanımlandığından burada uygun değerlendirme aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{E^m} = \|Ax_1 - Ax_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})\right\}^2} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{m} a^2{}_{ij} \sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right)^2\right\}} = \|x_1 - x_2\|_{E^m}. \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a^2{}_{ij}}$$

bu yüzden ardışık yaklaşmalar metodunun E^m Euclide uzayında yakınsak olması için

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a^2{}_{ij} < 1 \qquad (7.2)$$

eşitsizliğinin sağlanması yeter şart olur.

7.2. İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı Ve Tekliği

Biz burada

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds \qquad (7.3)$$

integral denklemini ele alalım.λ parametredir.(7.3) integral denklemindeki $K(t,s)$ çekirdeğinin

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds < +\infty \qquad (7.4)$$

şartını sağladığı ve $f(t) \epsilon L_2[a,b]$ olduğunu varsayalım. Biz burada (7.3) integral denkleminin λ parametresinin yeterince küçük değerlerinde $x(t) \epsilon L_2[a,b]$ çözümünün var ve tek olduğunu gösterelim. Bu amaçla

$$Ax = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

operatörünü ele alalım. Bu A operatörünün her bir $x(t) \epsilon L_2[a,b]$ fonksiyonunu $L_2[a,b]$ uzayında bir fonksiyona dönüştürdüğünü gösterelim. Burada $f(t) \epsilon L_2[a,b]$ alındığından

$$A_0 x = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

operatörünün her bir $x(t) \epsilon L_2[a,b]$ fonksiyonunu $L_2[a,b]$ uzayının bir fonksiyonuna dönüştürdüğünü göstermemiz yeterlidir.(7.4) şartından $K^2(t,s)$ fonksiyonunun $[a,b]$

aralığından alınmış hemen hemen tüm $t\epsilon[a,b]$ için $[a,b]$ aralığında S değişkenine nazaran integrallenen olduğu alınır. Buradanda hemen hemen tüm $t\epsilon[a,b]$ için

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$$

integralinin varlığı alınır. Cauchy - Bunyakovskii eşitsizliğine esasen

$$y^2(\mathrm{t})=\left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right)^2 \leq \int_a^b K^2\,(t,s)ds.\int_a^b X^2(s)ds$$

dır. Bu eşitsizlikte $\int_a^b x^2\,(s)ds$ sabit sayıdır.(7.4) şartına göre $\int_a^b K^2\,(t,s)ds$ t değişkenine göre $[a,b\,]$ aralığında integrallenendir. Buradanda $y^2(t)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında integrallenen olduğu görülür.Yani

$$\int_a^b y^2(t)dt \leq \int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds.\int_a^b x^2\,(s)ds$$

dır.Şimdi

$$\rho(Ax,Ay) = \|Ax - Ay\|$$

ifadesini değerlendirelim:

$$\rho(Ax,Ay) = \|Ax - Ay\| = \left\{\int_a^b\left(\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds - \lambda\int_a^b K(t,s)y(s)ds\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\lambda|\left\{\int_a^b\left(\int_a^b K(t,s)[x(s)-y(s)]\,ds\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b K^2\,(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_a^b [x(s)-y(s)]^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}}\|x-y\|\,,$$

yani

$$\|Ax - Ay\| \leq K.\|x-y\|\,,\, K = |\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\right)^{\frac{1}{2}},$$

elde edilir. Buradan görüyoruz ki,

$$|\lambda| < \frac{1}{\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds} \tag{7.5}$$

eşitsizliğini sağlayan her bir λ için sıkıştıran operatör şartı sağlanacaktır. Bu yüzdende (7.5) şartını sağlayan λ' lar için (7.3) integral denkleminin çözümü var ve tekdir.

Şimdi biz burada ele aldığımız (7.3) integral denkleminin $X = C_{[a,b]}$ uzayında $A: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ halini ele alalım. Bu amaçla (7.3) integral denkleminin $K(t,s)$ çekirdeğinin $a \le t \le b\,, a \le s \le b$ bölgesinde , yani $[a,b]x[a.b]$ karesinde iki t,s değişkenli sürekli fonksiyon olduğunu $f(t) \in C_{[a,b]}$ olduğunu varsayalım.

Burada

$$L = \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)|$$

işaretini kabul edelim. Bu şartlar sağlandığında (7.3) denkleminin çözümünü $X = C_{[a,b]}$ uzayında arayalım. Bu hal için aşağıdaki teorem doğrudur.

TEOREM: K(t,s) fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğunda ve $f(t) \in C_{[a,b]}$ olduğuna

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)L} \tag{7.6}$$

Şartı sağlandığında (7.3) denkleminin $C_{[a,b]}$ uzayında tek bir tane çözümü vardır.

İSPAT: Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki ardışık yaklaşmaları inşa edelim.

$$x_0 = f(t),$$

$$x_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) x_0(s)ds, \tag{7.7}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) x_{n-1}(s)ds$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … ..

Aşağıdaki

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$
$$= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \qquad (7.8)$$

serisini ele alalım. Bu serinin genel terimini değerlendirelim. Burada bu amaçla aşağıdaki değerlendirme yapalım.

$$x_1 - x_0 = \lambda \int_a^b K(t,s) x_0\,(s) ds$$

olduğundan ve $M = \max_{a \le s \le b} |f(s)|$ alarak

$$|x_1 - x_0| \le |\lambda| \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)| \,.\, \max_{a \le s \le b} |f(s)|.\,(b-a)$$
$$= |\lambda| L.\,M.\,(b-a)$$

bu değerlendirmeyi kullanarak

$$|x_2 - x_1| \le |\lambda| \int_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_0(s)| ds \le \; \lambda^2 L^2 M (b-a)^2$$

matematiksel indüksiyon yöntemini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeni buluruz.

$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le |\lambda| \int_a^b |K(t,s)|.\,|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds \le |\lambda|^n \,.\, L^n.\, M(b-a)^n$
(7.9)

Bu değerlendirmelerden (7.8) serisinin (7.6) şartında $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğu alınır. Burada

$$M \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad q = |\lambda L(b-a)|$$

serisi (7.8) serisinin majorant serisi olur. Weierstrass teoremine esasen (7.8) serisi $[a,b]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsak seri olur.(7.8) serisinin kısmi toplamı $x_n(t)$ dir.

$$x_n(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{n} (x_k(t) - x_{k-1}(t))$$

böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$$

(7.10)

limiti vardır.

$x(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisinin düzgün yakınsadığı limiti olduğundan $[a, b]$ aralığında sürekli olur ve (7.3) denkleminin verilmiş şartlarda çözümü olur.

Bunu göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b K(t, s) x_n(s) ds = \int_a^b K(t, s) x(s) ds \qquad (7.11)$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için ise aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\left| \int_a^b K(t, s) x(s) ds - \int_a^b K(t, s) x_n(s) ds \right| \leq \int_a^b |K(t, s)| |x(s) - x_n(s)| ds$$

$$\leq L. \int_a^b |x(s) - x_n(s)|\, ds \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad (7.12)$$

$x_n(t)$ dizisi $x(t)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan (7.12) eşitsizliğinin sağ yanı $n \to \infty$ şartında sıfıra yakınsadığından (7.11) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi burada (7.3) denkleminin verilmiş şartlarda çözümünün tekliğini ispatlayalım. Bunu ispatlamak için denklemin $u\ ve\ v$ olmak üzere iki tane çözümünün olduğunu varsayalım. Bu halde $u - v$ farkı aşağıdaki denklemin çözümü olur.

$$u - v = \lambda \int_a^b K(t, s)[u(s) - v(s)] ds$$

Bu eşitlikten aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\|u-v\|_{C_{[a,b]}} \leq |\lambda| L(b-a)\|u-v\|_{C_{[a,b]}}$$

bu eşitlikte $|\lambda|L(b-a) < 1$ olduğundan $\|u-v\|_{C_{[a,b]}} = 0$ olduğu alınır. Her bir $t\epsilon[a,b]$ için $u(t) \equiv v(t)$ olduğu bulunur.

Böylece teorem tam olarak ispatlandı.

7.3. Volterra Denklemi İçin Ardışık Yaklaşmalar Metodu

Üstedeki kısımda ispatlanmış olan teorem ikinci çeşit voltera denklemi için de geçerli olmakla uygulanabilir. İkinci çeşit volterra denklemi

$$x(t) = \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{7.13}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde

$$K(t,s) = \begin{Bmatrix} k(t,s) & a \leq s \leq t \\ 0 & t < s \leq b \end{Bmatrix}$$

almakla (7.3) şekline getirmekle olur.

Burada $k(t,s) \in C(q),\ q = \{(t,s); a \leq s \leq t\ , a \leq t \leq b\}$ alınır.

Yani $k(t,s)$ fonksiyonu q bölgesinde sürekli olduğu varsayılır.

Burada

$$L = \max_q |k(t,s)|$$

almakla (7.13) denklemi için daha güçlü teorem ispatlanabilir. Burada da aynı yöntemle ardışık yaklaşmalar dizisi inşa edilir.

$$x_0(t) = f(t),$$

$$x_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x_{n-1}(s)ds$$

$$\equiv f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)x_{n-1}(s)ds, \quad n = 1,2,\dots$$

burada

$$x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \qquad (7.14)$$

serisinin terimlerinin değerlendirmeleri aşağıdaki şekilde iyileştirilmiş değerlendirmeler olur.((7.9)-la karşılaştır)

$$|x_0(t)| = |f(t)| \leq M$$

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq |\lambda| \left| \int_0^t k(t,s)x_0(s)ds \right| \leq |\lambda|.L.M(t-a)$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq |\lambda| \left| \int_a^t k(t,s)[x_1(s) - x_0(s)]ds \right|$$

$$\leq |\lambda|.^2 L^2.M \int_a^t (s-a)ds = |\lambda|^2.L^2.M.\frac{(t-a)^2}{2!}$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … ….

$$|x_n - x_{n-1}| \leq |\lambda| \left| \int_a^t k(t,s)[x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)]ds \right|$$

$$\leq |\lambda|^n.L^n.M \int_a^t \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = |\lambda|^n.L^n.M.\frac{(t-a)^n}{n!}$$

(7.14) serisinin majorant serisini

$$M.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|.L.(b-a)]^n}{n!}$$

serisi olarak alabiliriz.

Bu seri her bir λ için yakınsaktır. Bu serinin toplamı

$$M.e^{[|\lambda|L(b-a)]}$$

olur. Böylece (7.14) serisi $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsak seri olur, yani

$$x_n(t) \rightrightarrows x(t) \epsilon C_{[a,b]}$$

olur.

$x(t)$ limit fonksiyonunun (7.13) denkleminin çözümü olması için aynı yöntemle ispatlanır. Çözümün tekliği ise

$$|u-v| \leq \mu . L . \int_a^t |u(s)-v(s)| ds$$

eşitliğinden alınır.

Böylece burada aşağıdaki teorem ispatlandı.

TEOREM: Sürekli çekirdekli (7.13) Volterra denkleminin $[a, b]$ aralığında sürekli olan tek çözümü her bir $f(t) \epsilon C_{[a,b]}$ ve her bir λ için vardır.

7.4. Sıkıştıran Operatörler Prensibinin ve Ardışık Yaklaşmalar Metodunun Lineer Olmayan İntegral Denklemlere Uygulanması

Bizim burada amacımız

$$u(x)=\lambda \int_a^b F\big(x, y, u(y)\big) dy+f(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{7.15}$$

denklemini $u_0(x) \equiv 0, \quad -\infty<a<b<+\infty$ olmakla

$$u_{n+1}(x)=\lambda \int_a^b F\big(x, y, u_n(y)\big) dy+f(x), \qquad a \leq x \leq b, \; n=0,1,2, \ldots \tag{7.16}$$

ardışık yaklaşımlar metodu ile çözmektedir.

Bunun için burada aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

1) $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyon olsun;
2) $F(x, y, u)$ fonksiyonu $[a, b] x[a, b] x \mathbb{R},(\mathbb{R}=(-\infty,+\infty))$ bölgesinde tanımlanmış reel değerli fonksiyon olmakla bu fonksiyonun F_u kısmi türevide $[a, b] x[a, b] x \mathbb{R}$ bölgesinde sürekli fonksiyon olsun;
3) Öyle $L>0$ sayısı olsun ki, her bir $x, y \in[a, b]$ ve her bir $u \in \mathbb{R}$ için

$$|F_U(x, y, u)| \leq L$$

eşitsizliği sağlansın;

4) Reel değerli λ parametresi $(b-a)|\lambda| L<1$ eşitsizliğini sağlasın;

5) $X = C_{[a,b]}$ ve $\|u\| = \max_{a \le x \le b} |u(x)|$ olsun

(1)-(5) şartları sağlandığında

i) (7.15) denkleminin tek bir tane $u \in X$ çözümü olur;

ii) (7.16) eşitlikleri ile inşaa edilmiş $\{u_n\}$ dizisi X uzayında bir $u \in X$ elemanına yakınsar;

iii) Her bir $n = 0,1,2, \dots$ için aşağıdaki hatalar değerlendirmeleri sağlanır

$$\|u_n - u\| \le K^n (1-k)^{-1} \|u_1\|,$$

$$\|u_{n+1} - u\| \le K(1-K)^{-1}. \|u_{n+1} - u_n\|, \quad K = (b-a). |\lambda|. L$$

(i)-(ii)-(iii) özelliklerini ispatlayalım.

Bunun için aşağıdaki eşitlikle A operatörünü tanımlayalım

$$(Au)(x) = \lambda \int_a^b F\big(x, y, u(y)\big) dy + f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

bu durumda ele aldığımız (7.15) integral denklemi aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazılmış olur.

$$u = Au$$

$u(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olduğunda Au fonksiyonuda $[a, b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyon olur. Bu yöntemle biz

$$A: X \to X$$

operatörünü alırız.

Her bir $x, y \in [a, b]$ ve $u, v \in \mathcal{R}$ için öyle $w\epsilon$ $\mathbb{R}$ bulunur ki, ortalama değer teoremine göre

$$|F(x, y, u) - F(x, y, v)| \le |F_u(x, y, w|. |u - v| \le L. |u - v|$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin yardımıyla aşağıdaki değerlendirme bulunur.

$$\|Au - Av\| \leq \max_{a \leq x \leq b} |(Au)(x) - (Av)(x)|$$

$$\leq |\lambda|(b-a)L \max_{a \leq X \leq b} |u(x) - v(x)|$$

dır. Böylece,

$$\|Au - Av\| \leq K\|u - v\|, \qquad her\ bir\ u, v \in X$$

olur. Böylece A operatörü sıkıştıran operatörler prensibinin şartlarını sağladığından i)-ii)-iii) özellikleri bu prensipten alınır.

7.5. Sıkıştıran Operatörler Prensibinin ve Ardışık Yaklaşmalar Metodunun Adi Türevli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Biz aşağıda verilen başlangıç-değer problemini, yani

$$U' = F(x, u), \ x_0 - h \leq x \leq x_0 + h \tag{7.16}$$

denkleminin

$$U(x_0) = u_0 \tag{7.17}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulmak isteriz. Burada $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası verilmiş noktadır. Böylece biz (7.16)-(7.17) probleminin öyle $u(x)$ çözümünü bulmak isteriz ki, bu çözüm $[x_0 - h, x_0 + h]$ diferansiyellenen olsun ve

$$S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r, |u - u_0| \leq r\}$$

olmak üzere her bir $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ için

$$\big(x, u(x)\big) \in S \tag{7.18}$$

sağlansın.

Burada $X = C_{[x_0 - h, x_0 + h]}$ ve $M = \{u \in X : \|u - u_0\| \leq r\}$ olsun. Burada

$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ (7.16)-(7.17) ve (7.18) ile birlikte aşağıdaki integral denklemi ele alalım.

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F\big(y, u(y)\big) dy, \ \ x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, \ \ u \in M \tag{7.19}$$

(7.19) integral denklemine uygun olarak aşağıdaki ardışık yaklaşmaları inşaa edelim.

$$u_0(x) \equiv u_0,$$

$$u_{n+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F\big(y, u_n(y)\big)dy\,, x_0 - h \le x \le x_0 + h, \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (7.20)$$

dır. Burada aşağıdaki teorem doğrudur.

TEOREM (PİCARD-LİNDELÖF TEOREMİ): Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

1) $F: S \to R$ fonksiyonu ve $F_u: S \to R$ kısmi türevi fonksiyonu sürekli fonksiyonlardır.
2) $\mu = \max_{(x,u)\epsilon S}|F(x,u)|$ ve $L = \max_{(x,u)\in S}|F_u(x,u)|$ olmakla h reel sayısını öyle seçelim ki,

   $0 < h \le r,\ h.\mu \le r,\ h.L < 1$ şartları sağlansın.

(1) ve (2) şartları sağlandığında aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) (7.16)-(7.17) probleminin (7.18) şartını sağlayan tek çözümü vardır.
ii) Bu çözüm aynı zamanda (7.19) integral denkleminin de çözümü olur;
iii) (7.20) ardışık yaklaşmalarıyla inşaa edilmiş $\{U_n\}$ dizisi X Banach uzayında $u \in X$ elemanına yakınsar.
iv) $n = 0,1,2,\ldots$ için aşağıdaki hata değerlendirmeleri bulunur.

$$\|u_n - u\| \le K^n(1-K)^{-1}\|u_1 - u_o\|,$$

$$\|u_{n+1} - u\| \le K(1-K)^{-1}\|u_{n+1} - u_n\|,\ \ k = h.L$$

İSPAT: İlk önce aşağıdaki eşitlikle A integral operatörünü tanımlayalım:

$$(\mathrm{Au})(\mathrm{x}) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F\big(y, u(y)\big)dy,\ \text{her bir } x \in [x_0 - h, x_o + h]\,. \quad (7.21)$$

Bu halde (7.19) integral denklemini

$$U = Au,\ \ u \in M \qquad (7.22)$$

Operatör denklemi şeklinde yazarız.

$u \in M$ alındığında $u(x)$ fonksiyonu $[x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında sürekli olmakla her bir $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ için $(x, S(x)) \in S$ olur. Bu yüzdende $F(x, u(x))$ fonksiyonunda $[x_0 - h, x_o + h]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Buradan da Au fonksiyonunun $[x_0 - h, x_o + h]$ aralığında sürekli fonksiyon olduğunu garanti ediyor. Bu yöntemle

$$A: M \to M$$

operatörünü tanımlamış oluruz. Burada $A(M) \subseteq M$ olduğunu ispatlayalım.$u \in M$ alalım. O zaman her bir $x \in [x_0 - h, x_o + h]$ için

$\left|\int_{x_0}^{x} F\big(y, u(y)\big)dy\right| \leq |x - x_0|$ $\max_{(y,u)} F(y, u) \leq h.\mu \leq r$ olur. Buradan da

$$\|Au - u_0\| = \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \left|\int_{x_0}^{x} F\big(y, u(y)\big)dy\right| \leq r$$

Böylece $\qquad Au \in M$

Şimdi her bir $u, v \in M$ için

$$\|Au - Av\| \leq K\|u - v\|$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

Klasik ortalama değer teoremini kullanarak

$$|F(x, u) - F(x, v)| = |F_u(x, w)|.\,|u - v| \leq L.\,|u - v|$$

eşitsizliğinin her bir $(x, u), (x, v) \in S$ için sağlandığını buluruz. Buradan da

$$\|Au - Av\| = \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \left|\int_{x_0}^{x} \big[F\big(y, u(y)\big) - F(y, v(y))\big]dy\right|$$

$$\leq h.L. \max_{x_0 - h \leq y \leq x_0 + h} |u(y) - v(y)| = K.\,\|u - v\|,$$

burada

$$k = h.L$$

dır. Bu eşitsizliği kullanarak A operatörünün sıkıştıran operatör olduğunu buluruz.

SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan operatörler için sıkıştıran operatörler prensibi anlatıldı. Sıkıştıran operatörlü operatör denklemlerin ardışık yaklaşımlar metodu gösterildi. Sıkıştıran operatörler prensibinin ve ardışık yaklaşımlar metodunun uygulanması ile lineer cebirsel denklemler sisteminin yaklaşık çözüm yöntemi gösterildi. Sıkıştıran operatörler prensibinin ve ardışık yaklaşımlar metodunun İntegral ve diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmasına uygulanması gösterildi ve incelendi.

KAYNAKLAR

1. Trenogin N.S. Funksiyonalniy Analiz M.:Nauka.1980.
2. Eberhard Zeidler Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics, NEW YORK,1991.
3. Lyusternik L.A., Sobolev V.İ. Kratkiy Kurs Funksionalnogo Analiza. M.;Vışş.skola,1982.
4. Hüseynov A. İntegral Denklemler, Azertedrisneşr.1962.
5. Fedoryuk M.V. Obıknovennıye Diferansialnıye Urarneniya. M.;Nauka.1980.
6. Lizorkin P.I. Kurs Differansialnıx i İntegralnıx Uravneniy s Dopolnitelnımi Glavami Analiza. Nauka.1981.
7. Habibzade A. Funksional Analiz Bakü "Maarif" neşriyatı 1978.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Bolu'da doğan Elvan ERDOĞAN, ilköğrenimini Gazipaşa İlk Öğretim Okulunda, orta öğrenimini ise Bolu ATATÜRK lisesinde ve yüksek öğrenimini de 2005-2009 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır. 2011-2012 yılları arasında Erciyes Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimi almıştır. Ocak 2015 de ise Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Sıkıştıran Operatörler Prensibi ve Ardışık Yaklaşımlar Metodu ve Onların Bazı Uygulamaları Üzerine" başlıklı tezine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri:

Adres: Sokullu Mehmet Paşa Sok. Kentpark sitesi kat8 No:29 Yozgat/Merkez

Cep: 0506 466 16 26

E-posta: elvantoraman14@hotmail.com