T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

VARYASYON HESABI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ahmet Serdar BAYKAL

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

VARYASYON HESABI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ahmet Serdar BAYKAL

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312015 numaralı öğrencisi Ahmet Serdar BAYKAL' ın hazırladığı **"Varyasyon Hesabı Problemlerinin Çözüm Metotları Üzerine"** başlıklı ~~Doktora~~/Yüksek Lisans tezi ile ilgili Tez Savunma Sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 01/06/2016 Çarşamba günü saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına oy birliği / oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22/06/2016 tarih ve 19 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/06/2016

Yrd.Doç.Dr. Handan ADIBELLI
Bozok Üniversitesi
Fen.Bil.Enst.Müd.V

İÇİNDEKİLER

VARYASYON HESABI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ahmet Serdar BAYKAL

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa;110

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde normlu uzaylarda tanımlanmış reel değerli fonksiyonellerin şartsız ve şartlı ekstremum problemlerinin (maksimum ve minimum değerlerinin bulunması problemlerinin) çözüm metotları ele alınıp incelendi. Uygulamalarda sık sık rastlanan aşağıdaki fonksiyonellerle bağlı ekstremum problemlerinin çözüm metotları incelendi:

$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$ $F(y) = \int_a^b f\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big)dx$

$F(y_1, y_2 \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx$ $F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$

Bu fonksiyonellerdeki f(...) fonksiyonlar verilmiş fonksiyonlardır. Ama y(x)... ve u(x,y) fonksiyonları uygun fonksiyonellerin argümentleridir.

Bu tezde bu tipli fonksiyoneller için şartlı ve şartsız ekstremum problemleri ele alındı ve bu ekstremum problemleri için Euler denklemlerinin bulunması gösterildi. Her bir hal için örnekler gösterildi ve incelendi.

Anahtar Kelimeler: Varyasyon Hesabı, Euler Denklemi, Ekstremum Problemi, Fonksiyonel,

VARIATIONS OF CALCULATION METHODS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM

Ahmet Serdar Baykal

Bozok University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics
Master of Science Thesis

2016; Page;110

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad Mustafayev

ABSTRACT

In this thesis, normed spaces defined in the valuable real unconditional and conditional functional problems of extreme (maximum and minimum values of no problems) were analyzed taken up solution methods. Specifically discussed Euler and Lagrange methods. Applications were evaluated in the following functional solution methods of frequently encountered problems with extreme connected:

$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$ $F(y) = \int_a^b f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)dx$

$F(y_1, y_2 \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$ $F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$

This functional at f (...) functions are given functions . But y (x) ... and u (x, y) function are the appropriate functional argument .

The thesis also mathematics direct method termed the methods were also discussed . These methods are resolved over the solution of the equation in operator -shaped variation about solving problems. Euler discussed here especially Poisson and Ostrogradski equations. The implementation of these methods are displayed in the appropriate examples.

Keywords: Calculus of Variations , Euler equation, affine manifolds , Functional

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad Mustafayev'e, bölüm başkanımız Doç. Dr. Akın Osman Atagün'e, yüksek lisans süresi boyunca desteklerini esirgemeyen bölüm hocalarımız Yrd. Doç. Dr. Abdullah Sönmezoğlu ve Yrd. Doç. Dr. Onur Oktay'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışma sürecinde bana daima destek olan ve sabrını esirgemeyen eşim Emine BAYKAL' a sonsuz teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\|\boldsymbol{x}\|$	: x Elemanının Normu
$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	: x ve y Elemanları Arasındaki Uzaklık
$\boldsymbol{E}$	: Lineer E Uzayı
$\tilde{\boldsymbol{E}}$	: Lineer E Uzayının Alt Kümesi
$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{m}}$	: Euclid Uzayı
$\boldsymbol{C}_{[a,b]}$	: $[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$\boldsymbol{C}^{n}{}_{[a,b]}$	: $[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış n. Mertebeden Diferansiyellenebilen Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$\boldsymbol{C}^{2}(\boldsymbol{G})$	: Kapalı G Bölgesinde Tanımlanmış İkinci Mertebeye Kadar Kısmi Türevli ve Sürekli Fonksiyonların Normlu Uzayı
L	: G Bölgesinin Sınırı
$\boldsymbol{c}_0$	: Verilmiş Sabit Sayı
sht	: Hiperbolik Sinüs Fonksiyonu
cht	: Hiperbolik Kosinüs Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Matematik analizin en önemli konularından biri bir serbest değişkene bağlı ve iki ve daha çok serbest değişkene bağlı fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerinin bulunmasıyla ilgili konulardır. Matematik analizde bu tip problemlere ekstremum problemleri denir. Dikkat edelim ki, matematik analizde ele alınan ekstremum problemleri, sonlu sayıda serbest değişkene bağlı fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerinin bulunmasıyla ilgili ekstremum problemleridir. Ancak matematikte genelde sonsuz sayıda değişkene bağlı fonksiyonların da ekstremum problemleri ele alınıp incelenir. Böyle ekstremum problemleri varyasyon hesabında ve matematiksel programlama teorisinde ele alınır[1-4].

Fiziğin ve geometrinin birçok problemlerinin çözümünde; elemanları fonksiyonlar olan kümede tanımlanmış, değerleri reel sayılar olan fonksiyonların (dönüşümlerin) maksimum ve minimum değerlerinin bulunmasıyla ilgili olan ekstremum problemleriyle karşılaşılır. Elemanları fonksiyonlar olan kümede tanımlanmış, değerleri sayılar olan fonksiyonlara matematikte fonksiyonel denir.

Mesela, y=f(x) eşitliği ile yazılan ve Oxy düzleminin $A_0\left(x_0, y_0\right)$ ve $B_1\left(x_1, y_1\right)$ noktalarını birleştiren $y = y\left(x\right)$ eğrisine karşı bu eğrinin uzunluğunu karşı koyalım. $y = y\left(x\right),\ x_0 \le x \le x_1$ eğrisinin uzunluğunu uygun olarak $\ell\left(y\right)$ ile gösterelim. A_0 ve B_1 noktalarını birleştiren eğrinin uzunluğu bu noktaları birleştiren eğriye bağlı bir fonksiyoneldir. Özel halde $y = y\left(x\right)$ fonksiyonu $\left[x_0, x_1\right]$ aralığında sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğundan bu eğrinin uzunluğu

$$\ell\left(y\right) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left[y'\left(x\right)\right]^2}\,dx$$

formülü ile hesaplanır. Bu hal için $\ell\left(y\right)$ fonksiyoneli gösterdiğimiz formülle tanımlanmış olur[1].

Burada ele aldığımız $y = y\left(x\right),\quad x_0 \le x \le x_1$ eğrisini Ox ekseni etrafında döndürdüğümüzde elde edilen yüzeyin, yani simetri ekseni Ox ekseni olan yüzeyin alanı

$$S(y)=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx$$

formülü ile hesaplanır. Bu $S(y)$ fonksiyoneli de $x_0 \le x \le x_1$ aralığında sürekli diferansiyellenen $y=y(x)$ fonksiyonlar kümesinde tanımlanmış fonksiyonel olduğu açıktır.

Şimdi burada Oxy düzleminin bir D bölgesinde tanımlanmış x ve y değişkenlerine bağlı ve grafiği bir yüzey olan $z=z(x,y)$ fonksiyonlarının bir M kümesini ele alalım. Bu M kümesinden alınmış her bir $z=z(x,y)$ fonksiyonuna onun grafiğinin $S(z)$ alanını karşı koyduğumuzda, M kümesinde tanımlanmış $S(z)$ fonksiyonelini tanımlamış oluruz. Burada $z=z(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğunda $S(z)$ fonksiyoneli aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$S(z)=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Matematikte fonksiyonellerin ekstremum problemlerinin çözüm metotlarının ele alınıp incelendiği dala varyasyon hesabı denir.

Böylece, varyasyon hesabında fonksiyonellerin en büyük ve en küçük değerlerinin bulunması problemleri ele alınıp incelenir ve çözüm metotları geliştirilir.

Burada hatırlatalım ki, mekaniğin ve fiziğin hemen hemen tüm prensipleri uygun bir fonksiyonelin ekstremum değer almasını iddia eder.

Mesela, optikte ışığın homojen olmayan ortamlarda yayılması Fermat prensibi ile incelenir. Fermat prensibinde, ışığın bir noktadan diğer bir noktaya gidişindeki yola en az zaman sarf edildiği söylenir. Burada Fermat prensibinin bir varyasyon prensibi olduğu görülür.

Varyasyon hesabının problemlerinin çözümünde matematiğin birçok dalları ile birlikte uygulamalı fonksiyonel analizin birçok tanım ve teoremlerinden büyük ölçüde istifade edilir. Bu yüzden bu tezde önce fonksiyonel analizin uygulamaya yönelik bazı tanım ve teoremlerinin kısaca ön bilgileri verildi.

Bu tezde özel olarak uygulamada sık sık rastlanan aşağıdaki şekildeki fonksiyonellerle ilgili ekstremum problemlerinin çözüm metotları incelendi:

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx,$$

$$I(y)=I(y_1, y_2, ..., y_n)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x)\right)dx,$$

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right)dx,$$

$$I(z)=\iint_D F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy.$$

Bu fonksiyonellerdeki F fonksiyonları verilmiş fonksiyonlardır. Ancak, $y(x), y_1(x), ..., y_n(x), z(x,y)$ fonksiyonları uygun fonksiyonellerin argümentleridir.

Bu tezde ele alınan bu tipli fonksiyonellerin ekstremum problemlerinin çözümü için Euler denklemlerinin alınması gösterildi. Ayrıca ayrı ayrı denklemlerde Euler denklemlerinin çözümü gösterildi.

2.LİNEER VE NORMLU UZAYLARDA FONKSİYONEL BAĞLANTILAR VE VARYASYON HESABININ KONUSU

2.1. Lineer Uzaylar

2.1.1. Lineer Uzayın Tanımı

x, y, z, ... elemanlarının, E kümesinde bu elemanların toplamı ve elemanların skaler sayı ile çarpımı tanımlanırsa ve bu işlemler aşağıdaki şartları sağlarsa, E kümesine Lineer Uzay denir [5]:

1) $x + y = y + x, \ \forall x, y \in E$

2) $(x+y)+z = x+(y+z), \ \forall x, y, z \in E$

3) Öyle $0 \in E$ elemanı var ki, $\forall x \in E$ için $0+x = x$

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \qquad \forall \lambda, \mu$ sayıları ve $\forall x \in E$ elemanı için

5) $1.x = x, \ 0.x= 0 \ \ \forall x \in E$ (sonuncu eşitlikte soldaki 0 – skaler sayı, ama sağdaki 0 ise E kümesinin elemanıdır)

6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y \qquad \forall\lambda$ sayısı ve $\forall x,y \in E$

7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \qquad \forall\lambda, \mu$ sayıları ve $\forall x \in E$

1-7 şartlarını sağlayan boş olmayan E kümesine bazen vektör uzay da denir.

Skaler sayılar olarak reel veya kompleks sayılar alınır. Reel sayılar alındığında lineer uzay reel lineer uzay [6], kompleks sayılar alındığında ise lineer uzay kompleks lineer uzay [5] olarak adlandırılır.

$(-1)x$ elemanı $-x$ gibi gösterilir ve x elemanının ters elemanı olarak adlandırılır. Böylece, lineer uzayda elemanların farkı $y - x$ gibi tanımlanır.

2.1.2. Lineer Uzaylara Örnekler

Örnek 1. m-boyutlu reel koordinatlı sütun $x=(\xi_k)_1^m, \ y=(\eta_k)_1^m, \ z=(\zeta_k)_1^m, \dots$ vektörlerin kümesini R^m ile gösterilsin. R^m kümesinde x ve y vektörlerinin $x+y$ toplamını ve x vektörünün reel λ sayısı ile çarpımını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x+y=(\xi_k)_1^m+(\eta_k)_1^m=(\xi_k+\eta_k)_1^m, \qquad \lambda.x=\lambda(\xi_k)_1^m=(\lambda.\xi_k)_1^m.$$

Bu işlemler 1-7 aksiyomlarını sağlar. Böylece, R^m kümesi reel lineer uzaydır. R^m uzayında tüm koordinatları sıfır olan m boyutlu sütun vektör sıfır elemanı olarak alınır.

Örnek 2. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli reel değerli tüm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ... fonksiyonların kümesini $C_{[a,b]}$ gibi gösterelim.

Burada $x + y = x(t) + y(t)$ iki sürekli fonksiyonun toplamı gibi sürekli fonksiyondur. $\lambda x = \lambda x(t)$ çarpımı da $x(t)$ sürekli olduğundan keyfi skaler λ sayısı için sürekli fonksiyondur, yani $x + y \in C_{[a,b]}$, $\lambda x \in C_{[a,b]}$ olur.

$C_{[a,b]}$ kümesindeki toplam ve skaler sayı ile çarpma işlemleri 1-7 aksiyomlarını sağlar. Böylece, $C_{[a,b]}$ reel lineer uzaydır.

Örnek 3. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış k kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesini $C^k_{[a,b]}$ gibi işaret edelim. $x(t), y(t) \in C^k_{[a,b]}$ için $x(t) + y(t) \in C^k_{[a,b]}$ ve her bir reel λ sayısı için $\lambda x(t) \in C^k_{[a,b]}$ olduğundan $C^k_{[a,b]}$ kümesi de reel lineer uzaydır.

2.1.3. Lineer Uzaylarda Elemanların Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı. Sonlu ve Sonsuz Boyutlu Lineer Uzaylar

E lineer uzay, $x_1, x_2, ..., x_n$ bu uzaydan alınmış elemanlar olsun. $a_1, a_2, ..., a_n$ skaler sayılar olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ şeklindeki toplama $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanlarının lineer kombinasyonu[3] denir.

Tümü sıfır olmayan, yani $\sum_{K=1}^{n} |\alpha_k| > 0$ şartını sağlayan, öyle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ skaler sayıları varsa ki, $\sum_{K=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$, o zaman $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanlarına lineer bağımlı elemanlar[5] denir.

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$ eşitliği yalnız ve yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$

şartında sağlandığında $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ elemanlarına lineer bağımsız elemanlar[6] denir.

Örnek 1. R^m uzayında

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

elemanları lineer bağımsız elemanlardır.

Lineer uzayda m tane lineer bağımsız vektör varsa ve her bir m+1 sayıda vektör bu uzayda lineer bağımlı olursa, o zaman bu lineer uzay m-boyutludur denir.

R^m uzayının m boyutlu olduğu kolaylıkla gösterilir. m-boyutlu lineer E uzayında keyfi m sayıda lineer bağımsız elemanlar sistemine bu uzayda baz[5] denir.

R^m uzayında (1) vektörler sistemi bazdır.

Eğer her bir doğal n sayısı için lineer E uzayında n sayıda lineer bağımsız eleman bulunursa, o zaman bu uzay sonsuz boyutludur denir.

$C_{[a,b]}$ uzayı sonsuz boyutlu uzaydır. Gerçektende, bu uzaydan alınmış

$$1, t, t^2, ..., t^n, ... \qquad\qquad (a \le t \le b)$$

fonksiyonlar dizisinin keyfi n sayıda alınmış ilk $1, t, t^2, ..., t^n$ elemanları lineer bağımsızdır. $1, t, .., t^n$ lineer bağımlı olsaydı, tümü sıfıra eşit olmayan öyle $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ sayıları bulunurdu ki, her bir $t \in [a,b]$ için

$$a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n = 0$$

eşitliği sağlanırdı. Bu ise olamaz, çünkü aksi halde n dereceli polinomun sonsuz sayıda kökü olmuş olurdu. n-dereceli polinomun en çok n sayıda kökü vardır.

$C_{[a,b]}^k$, $k \ge 1$ uzayı da sonsuz boyutludur.

2.1.4. Lineer ve Afin Manifoldları

$\widetilde{E}$ kümesi lineer E uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her bir $x, y \in \widetilde{E}$ ve her bir λ ve μ skaler sayıları için $\lambda x + \mu y \in \widetilde{E}$ olursa, o zaman $\widetilde{E}$ kümesi E uzayında lineer manifolddur denir.

$C_{[a,b]}^k$, $k \ge 1$ uzayının $C_{[a,b]}$ uzayında lineer manifold olduğu açıktır.

$L \subset E$ kümesi lineer E uzayında bir lineer manifold olsun ve $x_0 \notin L$, ama $x_0 \in E$. O zaman $x_0 + L = \{x_0 + u.\ u \in L\}$ kümesine E uzayında lineer afin manifoldu denir.

E sonlu boyutlu olduğunda L lineer manifoldunun boyutuna $x_0 + L$ lineer afin manifoldunun boyutu[5] denir.

Üç boyutlu uzayda orijinden geçmeyen her bir düzlem ve doğru bu uzayda lineer afin manifoldudur.

2.1.5. Lineer Uzaylarda Dönüşümlerin Bazı Çeşitleri ve Varyasyon Hesabının Konusu

E_x ve E_y lineer uzaylar ve G ise E_x uzayından E_y uzayına bir dönüşüm olsun. $D(G) \subseteq E_x$ bu dönüşümün tanım kümesi, $R(G) \subseteq E_y$ ise bu dönüşümün değerler kümesi olsun.

Eğer burada E_x sonlu boyutlu lineer uzay ama E_y abstrakt lineer uzay olduğunda G dönüşümüne abstrakt fonksiyon denir. Eğer E_x-lineer uzay ama E_y-sayısal doğru veya kompleks düzlem olursa, o zaman G dönüşümüne fonksiyonel denir. Eğer E_x ve E_y abstrakt uzaylar (mesela lineer uzaylar) olursa, o zaman G dönüşümüne operatör[6] denir.

Varyasyon hesabında bir sınıf reel fonksiyonellerin (değerleri reel sayılar olan dönüşümlerin) en büyük ve en küçük değerlerinin bulunması problemleri, yani, bir sınıf fonksiyonellerin ekstremum problemleriyle ilgili problemler ele alınacaktır. Başka bir deyimle formal olarak varyasyon hesabı, sonsuz boyutlu uzaylarda diferansiyel hesabıdır.

2.1.6. Lineer Uzaylarda Fonksiyonellere Örnekler

Örnek 1. Lineer uzaylarda lineer fonksiyoneller

$f(x)$ fonksiyonelinin lineer E uzayının tümünde tanımlanmış olduğunu varsayalım. Keyfi $x,y \in E$ elemanları ve keyfi skaler α ve β sayıları için $f(\alpha x+\beta y)= \alpha f(x)+\beta f(y)$ sağlandığında $f(x)$ fonksiyoneline E uzayında tanımlanmış lineer fonksiyonel denir. Mesela, her bir keyfi alınmış, değişmez sağlanan $y(t) \in C_{[a,b]}$ için

$$F(x) = \int_a^b (x'(t) + y(t))dt$$

fonksiyonelinin $C'_{[a,b]}$ uzayında lineer fonksiyonel olduğu açıktır. $C_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış $F(y)= y(t_0)$, $a \leq t_0 \leq b$ fonksiyonelinin de lineerliği

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0) = \alpha F(y_1) + \beta F(y_2)$$

eşitliğinden alınır. $x_0(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli fonksiyon olsun. O zaman,

$$F(y) = \int_a^b x_0(t)y(t)dt, \quad y \in C_{[a,b]}$$

eşitliğiyle tanımlanmış $F(y)$ fonksiyonelinin $C_{[a,b]}$ uzayında lineer fonksiyonel olduğu açıktır.

Sonlu m-boyutlu E lineer uzayında tanımlanan lineer fonksiyonelin genel şeklini yazalım. $e_1, e_2, ..., e_m$ elemanları sistemi E uzayının herhangi bir bazı olsun. E uzayında tanımlanmış lineer $f(x)$ fonksiyonelinin $e_1, e_2, ..., e_m$ baz elemanlarındaki değerlerini uygun olarak $f(e_1)=c_1, f(e_2)=c_2, ..., f(e_m)=c_m$ ile gösterelim. $x \in E$ elemanının $e_1, e_2, ..., e_m$ baz elemanlarına açılımı,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_m e_m$$

olsun. O zaman,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i f(e_i) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_m\xi_m .$$

Buradan görüyoruz ki, sonlu m-boyutlu lineer uzayda lineer fonksiyonelin $x \in E$ vektöründeki değeri bu vektörün E-deki her hangi bazdaki koordinatlarının lineer fonksiyonudur, yani;

$$f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_m\xi_m .$$

Örnek 2. Lineer uzaylarda bilineer ve quadratik (kare) fonksiyoneller

Pratik çalışmalarda sık sık birkaç argümente bağlı lineer fonksiyonellerle de karşılaşılır. Buna göre de bilineer, trilineer vs. k-lineer fonksiyoneller[6] de tanımlanır. k-lineer fonksiyonellere seminileer fonksiyonel de denir. Şimdi biz burada mesela bilineer fonksiyonelin tanımını verelim.

x ve y argümentleri E lineer uzayında değişen iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonelinde *y'*yi değişmez sağladığımızda bu fonksiyonel x'e göre lineer fonksiyonel ve *x'*i değişmez sağladığımızda ise *y'*ye göre lineer fonksiyonel olduğunda $f(x,y)$ fonksiyoneline bilineer fonksiyonel[4] denir. Bilineer $f(x,y)$ fonksiyonelinde y argümentini x argümentiyle değiştirdiğimizde elde edilen f (x,x) fonksiyoneline quadratik (kare) fonksiyonel[4] denir. Mesela,

$$f(x,y) = \int_a^b a(t)x(t)y(t)dt$$

ifadesi $a(t)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli önceden verilmiş fonksiyon olduğunda $x, y \in C_{[a,b]}$ değişkenlerinin bir bilineer fonksiyonelidir. Ama bu fonksiyonelde y değişkenini x değişkeniyle değiştirmekle elde edilmiş

$$F(x) = f(x,x) = \int_a^b a(t)x^2(t)dt$$

fonksiyoneli $C_{[a,b]}$ uzayında bir quadratik fonksiyoneldir.

$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli verilmiş fonksiyonlar olduğunda,

$$f(x)=\int_a^b \left(a(t)x^2(t)+b(t)x(t)x'(t)+c(t)x'^2(t)\right)dt$$

ifadesi $C^1_{[a,b]}$ uzayında bir quadratik fonksiyonel tanımlar. Aşağıdaki

$$f(x,y)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)ds\,dt$$

ifadesinde $K(s,t)$, $a\leq s,t \leq b$ fonksiyonu sürekli verilmiş fonksiyon olduğunda $x,y\in C_{[a,b]}$ değişkenlerinin bilineer fonksiyonelidir.

Sonlu m-boyutlu lineer E uzayında bilineer fonksiyonelin genel şekli kolaylıkla bulunabilir. Gerçektende, $f(x,y)$ argümentleri x,y değişkenleri lineer m-boyutlu E uzayında değişen verilmiş bir bilineer fonksiyonel olsun. $e_1, e_2, ..., e_m$ elemanlar sistemi E uzayında baz olsun. m^2 sayıda $\alpha_{ij}\left(i,j=1,2,\ldots,m\right)$ sayılarını aşağıdaki eşitliklerle tanımlayalım:

$$f\left(e_i,e_j\right)=\alpha_{ij}, \qquad i,j=\overline{1,m}.$$

O zaman $x,y\in E$ vektörlerinin

$$x=\sum_{i=1}^m \xi_i e_i \qquad , \qquad y=\sum_{i=1}^m \eta_i e_i$$

açılımlarını kullanarak buluruz

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^m \xi_i e_i,\sum_{j=1}^m \eta_j e_j\right)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \xi_i f\left(e_i,e_j\right)\eta_j$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \xi_i\alpha_{ij}\eta_j=\sum_{i,j=1}^m \xi_i\alpha_{ij}\eta_j \qquad (1)$$

Böylece, her bir bilineer fonksiyonel sonlu m-boyutlu lineer uzayda $e_1, e_2, .., e_m$ bazında x ve y vektörlerinin koordinatlarının bilineer formudur.

Özel halde (1) formülünün yardımıyla kare (quadratik) fonksiyoneli için m-boyutlu lineer E uzayında aşağıdaki şekilde genel ifade yazılır

$$F(x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \xi_i = \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} \xi_i \ .$$

Böylece, quadratik fonksiyonelin sonlu m-boyutlu lineer uzayda genel şekli x vektörünün koordinatlarının quadratik formudur. $F(x)=f(x,x)$ quadratik fonksiyonelinin değeri $x \neq 0$ $\forall x \in E$ için $f(x)>0$ şartını sağlarsa bu quadratik fonksiyonel pozitif belirlidir denir.

2.1.7. Lineer Uzaylarda Kabarık (Convex) Kümeler ve Kabarık (Convex) Fonksiyoneller

Lineer E uzayından $x_1, x_2 \in E$ noktalarını alalım. E uzayındaki $x=(1-t)x_1+tx_2$, $t \in [0,1]$ noktaları kümesine x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren parça veya aralık denir.

Tanım 1. W kümesi E uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her bir $x_1, x_2 \in W$ noktalarını birleştiren parçada W kümesine dâhil olursa, o zaman W kümesine kabarık (convex) küme[5] denir.

Lineer E uzayında her bir lineer manifold kabarık kümedir. $W \subset E$ kabarık küme olduğunda her bir $x_0 \in E$ için,

$$x_0 + W = \{x_0 + u,\ u \in W\}$$

kümesi de kabarık küme olur. Özel halde lineer uzayda her bir lineer afin manifoldları da kabarık kümedir.

Tanım 2. $P(x)$ fonksiyoneli lineer E uzayında tanımlanmış reel fonksiyonel olsun. Eğer keyfi $x_1, x_2 \in E$ ve keyfi $t \in [0,1]$ için,

$$P((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)P(x_1) + tP(x_2) \qquad (1)$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $P(x)$ fonksiyoneline kabarık fonksiyonel[2] denir.

Kabarık fonksiyonellerle kabarık kümeler inşa edilebilir. Mesela, $P(x)$ fonksiyoneli lineer E uzayında tanımlanmış kabarık fonksiyonel olsun. $x_0 \in E$ noktasını ve reel c sayısını alalım. O zaman aşağıdaki,

$$Q = \{\, x \in E : P(x - x_0) \leq c \,\}$$

kümesi kabarık kümedir. Gerçektende,

$P(x_1 - x_0) \leq c$ ve $P(x_2 - x_0) \leq c$ şartını sağlayan x_1 ve $x_2 \in E$ elemanları alırsak Q kümesinin tanımına esasen $x_1, x_2 \in Q$ olduğu alınır. Her bir $t \in [0,1]$ için,

$$P\big((1-t)x_1 + tx_2 - x_0\big) = P\big((1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)\big) \leq$$

$$\leq (1-t)P(x_1 - x_0) + tP(x_2 - x_0) \leq (1-t)c + tc = c$$

olur. Buradan Q kümesi x_1 ve x_2 noktaları ile birlikte bu noktaları birleştiren parçayı da sağladığı görülür, yani Q kümesi kabarık kümedir.

2.2. Normlu Uzaylar

Bu kısımda bazı lineer uzaylarda elemanların normu tanımlanacak. Elemanların normunun tanımlanması elemanlar arasındaki uzaklığın tanımlanmasına ve böylece, lineer uzayda metrik tanımlanmasına imkân sağlıyor. Uzayda metriğin tanımlanması uzayda dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonellerin ve operatörlerin sürekliliği, diferansiyellenmesi gibi problemlerin incelenmesine yol açar.

2.2.1. Normlu Uzayın Tanımı

Tanım 1. Normlu uzay öyle lineer E uzayına denir ki, bu uzayın her bir $x \in E$ elemanına karşı bir reel negatif olmayan $\|x\|$ sayısı karşı getirilir, bu sayıya x elemanının normu denir[1] ve elemanın normu aşağıdaki şartları sağlar:

1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ yalnız ve yalnız $x=0$ olduğunda;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

tüm $x,y \in E$ ve tüm skaler λ sayıları için.

Buradan görüyoruz ki, norm tüm E uzayında tanımlanmış 1)-3) şartlarını sağlayan kabarık fonksiyoneldir.

3) şartına normun üçgen eşitsizliği adı verilir. Bu eşitsizliğin yardımıyla aşağıdaki ters üçgen eşitsizliği de ispatlanır.

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \quad . \tag{1}$$

Normlu uzayda iki $x,y \in E$ elemanları arasındaki uzaklık aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\rho(x,y) = \|x - y\| . \tag{2}$$

Normun 1)-3) özelliklerinden (2) formülü ile tanımlanmış $\rho(x,y)$ mesafesinin aşağıdaki mesafe aksiyomlarını sağladığı gösterilir:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y)=0$ yalnız ve yalnız x=y olduğunda;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Üçgen eşitsizliğinden ve normun 2)-homojenlik aksiyomundan aşağıdaki eşitsizliğin her bir $t \in [0,1]$ için ve her bir $x,y \in E$ için,

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\|$$

sağladığı görülür. Buradan ise $\|x\|$ normunun lineer E uzayında kabarık (convex) fonksiyonel olduğu alınır.

Normlu E uzayında $x_0 \in E$ verilmiş bir nokta $r>0$ pozitif bir sayı olmakla,

$$S_r(x_0) = \{ x \in E : \|x - x_0\| < r \}$$

kümesine merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan açık yuvar denir. $S_r(x_0)$ yuvarına x_0 noktasının r komşuluğu[2] da denir.

Kapalı yuvar aşağıdaki eşitlikle tanımlanır

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan küre[2] denir.

$$\overline{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$$

olduğu açıktır.

Normun kabarık fonksiyonel olmasından $S_r(x_0)$ ve $\overline{S}_r(x_0)$ kümelerinin kabarık kümeler olduğu elde edilir.

Tanım 2. M kümesi normlu E uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer M kümesi için öyle bir $R>0$ sayısı bulunursa ki, her bir $x \in M$ için $\|x\| \leq R$ eşitsizliği sağlanır, o zaman M kümesine sınırlı küme[1] denir.

2.2.2. Normlu Uzaylara Örnekler

Örnek 1. E^m Euclide uzayı.

E m-boyutlu bir lineer uzay olsun. Bu uzayın $e_1, e_2, ..., e_m$ bazını alalım. $x \in E$ elemanının $e_1, e_2, ..., e_m$ bazındaki açılımını yazalım:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_m e_m \ .$$

$x \in E$ elemanının normunu,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

formülü ile tanımlayalım. (3) eşitliği ile tanımlanan bu norma x elemanının Euclide normu veya “sferik” (küresel) normu[1] da denir. Bu normun norm aksiyomlarını sağladığı kolaylıkla gösterilir. m-boyutlu lineer E uzayında elemanın normu (3) formülü ile tanımlandıktan sonra elde edilen normlu uzaya Euclide uzayı denir ve E^m gibi[2] gösterilir. Bu uzayda x ve y elemanları arasındaki uzaklık

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formüldeki $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$ sayıları y vektörünün $e_1, e_2, ..., e_m$ bazındaki koordinatlarıdır.

Örnek 2. Sürekli fonksiyonların Lineer $C_{[a,b]}$ uzayında $x \in C_{[a,b]}$ elemanının normunu,

$$\|x\|_{C_{[a,b]}} = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

formülü ile tanımlayalım.

Bu normun, normun 1) ve 2) aksiyomlarını sağladığı açıktır. Normun 3) aksiyomunun da sağlandığı aşağıdaki eşitsizliklerden anlaşılır

$$|x(t) + y(t)| \le |x(t)| + |y(t)| \le \max_{a \le t \le b} |x(t)| + \max_{a \le t \le b} |y(t)| =$$

$$= \|x\| + \|y\|,$$

buradan da,

$$\|x+y\| = \max_{a \le t \le b} |x(t) + y(t)| \le \|x\| + \|y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu normlu uzayda $C_{[a,b]}$ gibi işaret edilir.

Örnek 3. $C_{[a,b]}^k,\ k \ge 1$ uzayı, Lineer $C_{[a,b]}^k,\ k \ge 1$ uzayında elemanın normunu ya

$$\| x \|_{C_{[a,b]}^k} = \max \left\{ \max_{[a,b]} |x(t)|, \max_{[a,b]} |x'(t)|, ..., \max_{[a,b]} x_{(t)}^{(k)} \right\}$$

ya da,

$$\|x\|_{c^k[a,b]} = \sum_{i=0}^{k} max_{[a,b]} \left| x^{(i)}(t) \right|$$

olarak tanımlayalım. Burada $x^{(i)}(t)$ gösterisi $x(t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre i-nci mertebeden türevidir.

Bu normların da norm aksiyomlarını sağladığı kolaylıkla gösterilir.

2.2.3. Normlu Uzaylarda Sınırlı ve Sürekli Fonksiyoneller

E bir normlu uzay $F(x)$ tanım kümesi $D(F)\subseteq E$ ve değerler kümesi sayısal $R(F)=\{A{:}A=F(y),\ y\in D(F)\}$kümesi olan bir fonksiyonel olsun.

Tanım 1. $F(x)$ fonksiyoneli tanım kümesindeki her bir sınırlı kümeyi değerler kümesinde sınırlı kümeye dönüştürdüğünde bu fonksiyonele sınırlı fonksiyonel[2] denir.

Tanım 2. Eğer keyfi $\varepsilon>0$ sayısına karşı öyle $\delta>0$ sayısı bulmak mümkün olursa ki, $\|x-x_0\|<\delta$ şartını sağlayan her bir $x\in D(F)$ için $|F(x)-A|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman A sayısına $F(x)$ fonksiyonelinin $x\to x_0$ şartındaki limiti denir[3] ve

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D(F)}} F(x)=A \text{ gibi yazılır.}$$

Tanım 3. $F(x)$ fonksiyonelinin tanım kümesi $D(F)$ olsun. x_0 noktasıyla birlikte bu noktanın bir $S(x_0)$ komşuluğunu da sağladığını varsayalım. Eğer keyfi $\varepsilon>0$ sayısına karşı öyle bir $\delta>0$ sayısı bulmak mümkün olursa ki, $\|x-x_0\|<\delta$ şartını sağlayan her bir $x\in S(x_0)$ noktası için $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $F(x)$ fonksiyoneli x_0 noktasında süreklidir[3] denir.

$F(x)$ fonksiyonelinin x_0 noktasındaki sürekliliğinin üstteki tanımla eşdeğer (equvalent) olan aşağıdaki tanımı da verilir. Eğer $x_0\in D$(F) noktasına yakınsak olan her bir $x_n\in D(F)$ dizisi için, yani $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$ şartını sağlayan $\forall x_n\in D(F)$ için $\lim_{n\to\infty}|F(x_n)-F(x_0)|=0$ şartı sağlanırsa o zaman $F(x)$ fonksiyoneli x_0 noktasında süreklidir denir.

Örnek 1. E^m uzayında m-değişkenli sürekli $F(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_m)$ fonksiyonunun E^m Euclide uzayında sürekli fonksiyonel olduğu açıktır.

Örnek 2. $C_{[a,b]}$ uzayında verilmiş lineer

$$F(x)= x(t_0),\ a<t_0<b$$

Fonksiyonelinin her bir $x_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında sürekli olduğu aşağıdaki eşitsizliklerden alınır:

$$|F(x) - F(x_0)| = |x(t_0) - x_0(t_0)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_0(t)| = \| x - x_0 \|.$$

Burada keyfi $\varepsilon > 0$ aldığımızda $\delta = \varepsilon$ gibi seçersek $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda,

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \|x - x_0\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini alırız.

Bu fonksiyonelin $C_{[a,b]}$ uzayında sınırlı olması,

$$|F(x)| = |x(t_0)| \leq \max_{[a,b]} |x(t)| = \|x\|$$

eşitsizliğinden alınır. $[a, b]$ aralığında sürekli olan her bir fonksiyon sınırlıdır.

Örnek 3. $C_{[a,b]}$ uzayında,

$$F(x) = \int_a^b A(t)x(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanan lineer $F(x)$ fonksiyonelinin sürekli ve sınırlı fonksiyonel olduğunu gösterelim. Burada $A(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış önceden verilmiş sürekli bir fonksiyondur.

$A(t)$ fonksiyonu kapalı $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan Weierstrass teoremine göre bu fonksiyon $[a,b]$ aralığında sınırlıdır. Yani öyle M>0 sayısı bulmak olur ki, keyfi $t \in [a,b]$ için $|A(t)| \leq M$ eşitsizliği sağlanır.

$F(x)$ fonksiyonelinin her bir $x_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında sürekli fonksiyon olduğunu ispatlayalım. Bu özellik aşağıdaki eşitsizlikten alınır

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |A(t)| |x(t) - x_0(t)| dt \leq M \int_a^b \max_{[a,b]} |x(t) - x_0(t)| dt =$$

$$= M \cdot (b - a) \|x - x_0\|.$$

Eğer keyfi $\varepsilon > 0$ aldığımızda $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M \cdot (b - a)}$ seçersek $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda,

$$|F(x) - F(x_0)| \le M \cdot (b-a)|x - x_0| < \varepsilon$$

eşitsizliği alınmış olur. Böylece, x_0 noktası $C_{[a,b]}$ uzayından keyfi alındığından $F(x)$ fonksiyoneli sürekli fonksiyoneldir.

F(x) fonksiyonelinin sınırlı fonksiyonel olduğu,

$$|F(x)| \le M(b-a) \cdot \| x \|$$

eşitsizliğinden görülür.

Örnek 4. Lineer uzayda tanımlanmış norm sürekli fonksiyoneldir. Normun sürekli olması $\big| \|x'\| - \|x''\| \big| \le \|x' - x''\|$ eşitsizliğinden bulunur.

2.2.4. Lineer Ve Bilineer Sürekli Fonksiyonellerin Bazı Özellikleri

Teorem 1. $x=0$ noktasında sürekli olan lineer $F(x)$ fonksiyoneli her bir $\|x\| \le r$ yuvarında sınırlıdır.

İspat. $F(x)$ fonksiyoneli $x=0$ noktasında sürekli olduğundan keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısına karşı öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki, $\|x\| < \delta$ şartı sağlandığında $|F(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\|x\| \le r$ şartını sağlayan x elemanını alalım. Burada r sayısı keyfi alınmış pozitif sayıdır. Bu x elemanı için $\left\| \frac{\delta}{r} x \right\| \le \delta$ eşitsizliği sağlandığından $\left| F\left(\frac{\delta}{r} x \right) \right| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. $F(x)$ fonksiyoneli lineer olduğundan $F\left(\frac{\delta}{r} x \right) = \frac{\delta}{r} F(x)$ eşitliği doğrudur. Bunu üstteki sonuncu eşitsizlikte dikkate alırsak buluruz.

$$|F(x)| \le \frac{r}{\delta} \varepsilon = M \; .$$

Bu ise $F(x)$ fonksiyonelinin $\|x\| \le r$ yuvarında sınırlı olduğunu gösterir. Teorem ispatlandı.

Teorem 2. $F(x)$ lineer fonksiyoneli birim $\|x\| \le 1$ yuvarında sınırlı olduğunda, yani bu lineer fonksiyonel için öyle $c>0$ sabiti var ki, $\|x\| \le 1$ şartını sağlayan her bir x elemanı için $|F(x)| \le c$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman her bir $x \in E$ için,

$$|F(x)| \le c\|x\| \qquad (4)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu fonksiyonel *E* uzayının her bir noktasında süreklidir.

İspat. Keyfi $x \in E$, $x \neq 0$ elemanı için $\dfrac{x}{\|x\|}$ elemanının birim yuvarda olduğu açıktır. Bu yüzden $\left| F\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq c$ olur. Bu sonucu eşitsizlikte $F(x)$ fonksiyonelinin lineer olduğu dikkate alındığında (4) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

Teoremin ikinci kısmı aşağıdaki eşitsizlikten alınır:

$$|F(x) - F(x_0)| = |F(x - x_0)| \leq c\|x - x_0\|.$$

Teorem 1 ve 2 den $x=0$ noktasında sürekli olan lineer fonksiyonelin *E* uzayının her bir noktasında sürekli olduğu görülür. Buradan lineer normlu *E* uzayının her hangi bir $x_0 \in E$ noktasında sürekli olan lineer fonksiyonel bu uzayın her bir noktasında süreklidir.

E sonsuz boyutlu normlu uzay $f(x,y)$ ise E uzayında tanımlanmış bilineer sürekli fonksiyonel olsun.

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$ şartı sağlandığında $|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $f(x,y)$ bilineer fonksiyoneli $x_0, y_0 \in E$ noktasında süreklidir denir.

$f(x,y)$ bilineer fonksiyonelinin $x=0$, $y=0$ noktasında sürekli olduğunu varsayalım. O zaman öyle $c > 0$ sabiti bulunur ki,

$$|f(x,y)| \leq c\|x\|.\|y\| \tag{5}$$

eşitsizliği her bir $x, y \in E$ için sağlanır. Gerçektende, $f(x,y)$ fonksiyoneli $x=0$ ve $y=0$ için sürekli olduğunda, mesela $\varepsilon=1$ aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki $\|x\| < \delta$ ve $\|y\| < \delta$ olduğunda $|f(x,y)| < 1$ eşitsizliği sağlanır. $x \neq 0$, $y \neq 0$ olan her bir $x, y \in E$ için $\left\| \delta \dfrac{x}{\|x\|} \right\| < \delta$, $\left\| \delta \dfrac{y}{\|y\|} \right\| < \delta$ olduğundan,

$$\left| f\left(\delta \frac{x}{\|x\|}, \delta \frac{y}{\|y\|} \right) \right| < 1$$

eşitsizliği sağlanır. $f(x,y)$ bilineer olduğundan bu sonuncu eşitsizlikten

$$|\, f(x,y)| < \frac{1}{\delta^2}\| x \|.\| y \| = c\| x \|.\| y \|$$

eşitsizliğini buluruz.

(5) eşitsizliğinde y elemanını x elemanı ile değiştirdiğimizde quadratik $F(x)= f(x,x)$ fonksiyoneli $x=0$ noktasında sürekli olduğunda her bir $x \in E$ için,

$$|F(x)| \le c\|x\|^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı bulunur.

Örnek 1. Aşağıdaki,

$$I(y(t)) = \int_0^1 [y(t) + 2y'(t)]dt$$

fonksiyonelinin $C^1_{[0,1]}$ uzayında sürekli fonksiyonel olduğunu gösterelim.

Bunun için keyfi $y_0 \in C^1_{[0,1]}$ fonksiyonunu alalım. Hatırlatalım ki,

$$\|y - y_0\|_{C^1_{[0,1]}} = \max\left\{ \max_{0\le t\le 1}|y(t) - y_0(t)|,\ \max_{0\le t\le 1}|y'(t) - y_0'(t)| \right\}.$$

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım, gösterelim ki, öyle $\delta > 0$ sayısı var ki $|y(t) - y_0(t)| < \delta$ ve $|y'(t) - y_0'(t)| < \delta$ olduğunda $|I(y(t)) - I(y_0(t))| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım

$$|I(y(t)) - I(y_0(t))| = \left|\int_0^1 (y(t) + 2y'(t) - y_0(t) - 2y_0'(t))dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 [y(t) - y_0(t)]dt + 2\int_0^1 [y'(t) - y_0'(t)]dt\right|$$

$$\le \int_0^1 |y(t) - y_0(t)|dt + 2\int_0^1 |y'(t) - y_0'(t)|dt$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} |y(t) - y_0(t)| + 2\max_{0\le t\le 1} |y'(t) - y_0'(t)|.$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ gibi seçersek, o zaman $|y(t) - y_0(t)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ ve $|y'(t) - y_0'(t)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ şartlarını sağlayan her bir $y(t) \in C^1_{[0,1]}$ fonksiyonu için $|I(y(t)) - I(y_0(t))| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlandığını görürüz.

Böylece, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına karşı öyle $\delta > 0$ sayısı var ki, mesela $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\|y(t) - y_0(t)\| < \delta$ olduğunda $|I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$ olur. Fonksiyonelin sürekliliğinin tanımına esasen verilmiş fonksiyonelin $y_0(t)$ noktasında sürekli olduğunu göstermiş oluruz. Burada $y_0(t)$ fonksiyonu $C^1_{[0,1]}$ uzayından keyfi alındığından bu fonksiyonel tüm $C^1_{[0,1]}$ uzayında sürekli olur.

Örnek 2. Aşağıdaki

$$I(y) = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + y^2(t)}\, dt$$

fonksiyonelinin $C_{[0,1]}$ uzayında sürekli fonksiyonel olduğunu gösterin. Bunu göstermek için keyfi $y_0(t) \in C_{[0,1]}$ ve $h(t) \in C_{[0,1]}$ fonksiyonlarını alalım. $y_\alpha(t) = y_0(t) + \alpha h(t)$ olsun. Burada α sayısı küçük parametredir. $y_\alpha(t) \in C_{[0,1]}$ olduğu açıktır. Buradan aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$I(y_\alpha(t)) = I(y_0(t) + \alpha h(t)) = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + (y_0(t) + \alpha h(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + y_0^2(t) + 2\alpha y_0(t) h(t) + \alpha^2 h^2(t)}\, dt.$$

Sonuncu eşitlikten $\alpha \to 0$ şartında limit alsak buluruz:

$$\lim_{\alpha \to \infty} I\left[y_\alpha(t)\right] = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + y_0^2(t)}\, dt = I(y_0(t)).$$

Bu ise $I(y)$ fonksiyonelinin $y_0 \in C_{[0,1]}$ noktasında sürekli olduğunu gösterir. $y_0(t)$ fonksiyonu $C_{[0,1]}$ uzayından keyfi alındığında bu fonksiyonelin $C_{[0,1]}$ uzayında sürekli olduğu alınır.

2.3. Normlu Uzaylarda Diferansiyellenebilir Fonksiyoneller

2.3.1. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar

Burada önce biz diferansiyellenebilir fonksiyonun matematik analizdeki tanımını hatırlatalım.

$F(x)=F(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$ n değişkenli fonksiyonun $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n$ argümentlerinin her birine göre sürekli kısmi türevleri olduğunda bu fonksiyonun $x=(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$ noktasından $x+h=(\xi_1+h_1\xi_2+h_2,\dots.\xi_n+h_n)$ noktasına geçtiğimizde aldığı $\Delta F=F(x+h)-F(x)$ artış aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\Delta F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F\left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{i-1},\xi_i+\theta_i h_i,\xi_{i+1},\dots,\xi_n\right)}{\partial\xi_i}h_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\xi_1,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}h_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F(\xi_1,\xi_i,\dots\xi_{i-1},\xi_i+\theta_i h_i,\xi_{i+1},\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}-\frac{\partial F(\xi_1,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}\right]h_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\xi_1,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}h_i+r(x,h), \qquad (1)$$

burada $0<\theta_i<1$, $i = 1,2,\dots,n$ şartını sağlayan reel sayılardır ve

$$r(x,h)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F(\xi_i,\dots\xi_{i-1}\xi_i+\theta_i h_i,\xi_{i+1},\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}-\frac{\partial F(\xi_i,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}\right]h_i. \qquad (2)$$

(1) formülündeki $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\xi_1,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}h_i$ ifadesine $F(x)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli denir ve dF gibi işaret olunur. Böylece,

$$dF=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)}{\partial\xi_i}h_i. \qquad (3)$$

$F(x)$ fonksiyonunun diferansiyelinin ifadesinden görüyoruz ki, $F(x)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli dF, h yer değişme vektörünün h_1, h_2, ..., h_n koordinatlarının lineer fonksiyonudur[1].

$\dfrac{\partial F}{\partial \xi_i}$ kısmi türevleri sürekli fonksiyonlar olduğunda (2) formülü ile tanımlanmış $r(x,h)$ ifadesinin mutlak değerini h vektörünün normu $\|h\| = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile karşılaştırdığımızda $|r(x,h)|$ ifadesinin $\|h\|$ ifadesine nazaran daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen olduğu görülür, yani $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \dfrac{|r(x,h)|}{\|h\|} = 0$ olur. Başka bir ifadeyle keyfi $\varepsilon > 0$ aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulmak olur ki, $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan tüm h yer değişme vektörleri için,

$$\frac{|r(x,h)|}{\|h\|} \le \varepsilon \qquad \text{veya} \qquad |r(x,h)| \le \varepsilon \|h\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel halde $F(x)$ fonksiyonunun x noktasının küçük bir komşuluğunda $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, i, j = 1,2,\ldots,n$ ikinci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olduklarında r(x,h) ifadesini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$r(x,h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\xi_1 + \theta h_1, \xi_2 + \theta h_2, \ldots \xi_n + \theta h_n)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} h_i h_j \qquad (4)$$

burada $0 < \theta < 1$.

Eğer (4) formülünde iştirak eden $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ kısmi türevleri $x = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ noktasının bir küçük komşuluğunda $c > 0$ sabiti ile sınırlı olursa, yani $\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right| \le c$, $i,j=1,2,\ldots,n$ eşitsizlikleri x noktasının yakın komşuluğunda sağlandığında,

$$|r(x,h)| \le c.n^2 \|h\|^2$$

değerlendirilmesi bulunur.

Böylece, bu halde $|r(x,h)|$ ifadesini $\|h\|$ ile karşılaştırdığımızda $|r(x,h)|$ ifadesinin $\|h\|$ dan küçüklük derecesinin ikiden küçük olmadığını gösteriyor. Buna göre de (1) formülünde birinci toplamın mutlak değeri h vektörünün normunun küçük değerlerinde genellikle daha büyük üstünlük oluşturur. Bu yüzden de birinci toplama $F(x)$ fonksiyonunun artışının esas lineer kısmı denir.

Bu özelliklere dayanarak n-boyutlu E^n Euclide uzayında diferansiyellenebilir fonksiyonlar tanımlanır. $F(x)$ fonksiyonunun E^n Euclide uzayının bir S alt kümesinde tanımlanmış olduğunu varsayalım. $x_0 \in S$ noktasından $x_0 + h \in S$ noktasına geçtiğimizde $F(x)$ fonksiyonunun $\Delta F = F(x_0 + h) - F(x_0)$ artışı aşağıdaki şekilde,

$$\Delta F(x_0) = L(x_0, h) + r(x_0, h) \tag{5}$$

gösterilebilirse ve burada $L(x_0,h)$ ifadesi h değişme vektörünün lineer fonksiyonu, $r(x_0,h)$ ifadesi ise üstte anlatıldığı anlamda h vektörü ile mukayesede daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen olduğunda $F(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Dikkate alalım ki, (4) formülü ile tanımlanan $r(x,h)$ ifadesini

$$r(x,h) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\xi_1 \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} h_i h_j +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F(\xi_1 + \theta h_1, \ldots \xi_n + \theta h_n)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(\xi_1, \ldots \xi_n)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right] h_i h_j$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ kısmi türevleri $x = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ noktasının bir küçük komşuluğunda sürekli fonksiyonlar olduğunda $r(x,h)$-in ifadesinin ikinci toplamı mutlak değerce $\|h\|^2$ sayısına nazaran daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen olur. $r(x,h)$-in ifadesinin birinci toplamı h vektörünün koordinatlarının quadratik (kare) formu olup $F(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden diferansiyelidir:

$$d^2 F = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\xi_1, \ldots \xi_n)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} h_i h_j . \tag{6}$$

E^n uzayında tanımlanmış $F(x)$ fonksiyonunun diferansiyeline verilen buradaki tanım normlu uzaylarda tanımlanmış fonksiyonellerin diferansiyeli için de benzer şekilde verilebilir.

2.3.2. Diferansiyellenebilir Fonksiyoneller

$F(x)$ fonksiyoneli normlu E uzayında tanımlanmış olsun $x_0 \in E$ noktasından $x_0 + h \in E$ noktasına geçtiğimizde $F(x)$ fonksiyonelinin aldığı $\Delta F(x_0) = F(x_0+h) - F(x_0)$ artışının,

$$\Delta F(x_0) = L(x_0,h) + r(x_0,h) \tag{7}$$

şeklinde gösterilebildiğini varsayalım[2]. Bu gösterilişte $L(x_0,h)$ ifadesi h değişkeninin lineer sürekli fonksiyoneli, $r(x_0,h)$ ifadesi ise onun mutlak değerini h vektörünün normu ile mukayese ettiğimizde daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen olsun. Yani r(x_0,h) ifadesi için keyfi ε>0 sayısı aldığımızda öyle δ>0 sayısı bulunur ki, $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan her bir h∈E vektörü için $|r(x_0,h)| \le \varepsilon \|h\|$ eşitsizliği sağlanır. Bu halde F(x) fonksiyoneli x_0 noktasında diferansiyellenebilirdir[4] denir.

Burada gösterilen şartları sağlayan lineer sürekli $L(x_0,h)$ fonksiyoneli tektir. Gerçektende, eğer üstte gösterilen şartları sağlayan iki tane $L_1(x_0,h)$ ve $L_2(x_0,h)$ lineer sürekli fonksiyonelleri olsaydı, o zaman

$$\Delta F(x_0) = L_1(x_0,h) + r_1(x_0,h),$$

ve

$$\Delta F(x_0) = L_2(x_0,h) + r_2(x_0,h)$$

açılımları doğru olurdu. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak buluruz:

$$L_1(x_0,h) - L_2(x_0,h) = r_3(x_0,h)$$

Bu eşitlikteki $r_3(x_0,h) = r_1(x_0,h) - r_2(x_0,h)$ ifadesinin mutlak değerini h vektörünün normu ile mukayese ettiğimizde daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen olduğunu buluruz. $L_3(x_0,h) = L_1(x_0,h) - L_2(x_0,h)$ fonksiyoneli h değişkenine bağlı lineer sürekli fonksiyoneldir. Böylece, keyfi $\varepsilon > 0$ aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı var ki, $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan her bir h∈E için,

$$|L_3(x_0,h)| = |r_3(x_0,h)| < \varepsilon \|h\|$$

değerlendirmesini buluruz.

Bu sonuncu eşitsizlikten görüyoruz ki, birim $\|h\| \le 1$ yuvarında $L_3(x_0,h)$ fonksiyonelinin mutlak değeri $\varepsilon > 0$ sayısını aşmıyor, yani $\max\limits_{\|h\| \le 1} |L_3(x_0,h)| \le \varepsilon$. Bu eşitsizlikte ε sayısı keyfi pozitif sayı olduğundan,

$L_3(x_0,h) \equiv 0$ ve böylece, $L_1(x_0,h) \equiv L_2(x_0,h)$ olduğunu buluruz.

$F(x)$ fonksiyonelinin x_0 noktasındaki ΔF artışının (7) açılımında tek tanımlanmış olan lineer sürekli $L(x_0,h)$ fonksiyoneline $F(x)$ fonksiyonelinin $x_0 \in E$ noktasındaki diferansiyeli veya varyasyonu denir ve $\delta F(x_0,h)$ şeklinde gösterilir[1].

2.3.3.Fonksiyonelin Varyasyonunun Hesaplanmasının Bir Yöntemi Veya Varyasyonun İkinci Tanımı

n değişkenli $F(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n)$ fonksiyonu bir $x_0 = (\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\ldots\xi_n^{(0)})$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunda bu fonksiyonun x_0 noktasında her bir yönde türevinin varlığı matematik analizden bize bellidir. Normlu uzaylarda tanımlanmış diferansiyellenebilir fonksiyoneller içinde bu özellik sağlanır. Bu özellikle bağlı aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma. Normlu E uzayında tanımlanmış $F(x)$ fonksiyoneli $x_0 \in E$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunda keyfi $h \in E$ vektörü için $F(x_0 + th)$ ifadesi t parametresinin fonksiyonu gibi diferansiyellenebilirdir ve $F(x_0 + th)$ fonksiyonunun t parametresine göre türevinin $t=0$ noktasındaki değeri $F(x)$ fonksiyonelinin x_0 noktasındaki $\delta F(x_0, h) = L(x_0, h)$ varyasyonuna eşittir[1]

$$\frac{d}{dt} F(x_0 + th)\Big|_{t=0} = \delta F(x_0, h) = L(x_0, h) \quad . \tag{8}$$

Böylece,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \frac{d}{dt} F(x_0 + th)\Big|_{t=0} = \delta F(x_0, h)$$

eşitliği F(x) fonksiyonelinin x_0 noktasındaki varyasyonunun ikinci tanımı gibi de alınır.

İspat. (8) formülünü ispatlamak için aşağıdaki eşitlikleri yazalım

$$\frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \frac{\delta F(x_0, th) + r(x_0, th)}{t} = \delta F(x_0, h) + \frac{r(x_0, th)}{t}$$

Bu eşitlikte $r(x_0, th)$ için keyfi $\varepsilon > 0$ aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı var ki,

$$\|th\| = |t| \|h\| < \delta$$

şartını sağlayan her bir $th \in E$ için,

$$|r(x_0, th)| < \varepsilon \|th\| = |t| \varepsilon \|h\|$$

eşitsizliği veya

$$\left| \frac{r(x_0, th)}{t} \right| < \varepsilon \|h\|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $\varepsilon > 0$ keyfi alındığından $\lim\limits_{t \to 0} \frac{r(x_0, th)}{t} = 0$ olur.

Böylece,

$$\frac{d}{dt} F(x_0 + th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0, h).$$

Lemma ispatlandı. Dikkate alalım ki, burada $\delta F(x_0, h)$ varyasyonunun bulunması için bir yöntem verilmiş oldu.

2.3.4. Fonksiyonelin Varyasyonunun Hesaplanmasına Ait Örnekler

Örnek 1. $C^1_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış,

$$I(y) = \int_0^1 y(\xi) y'(\xi) d\xi$$

fonksiyonelinin $y_0(t) = t$ ve $y_1(t) = t^2$ olduğunda aldığı $\Delta I = I(y_1) - I(y_0)$ artışını hesaplayın.

Çözüm.

$$\Delta I = I(y_1) - I(y_0) = \int_0^1 \xi^2 2\xi d\xi - \int_0^1 \xi .1. d\xi =$$

$$= 2\int_0^1 \xi^3 d\xi - \int_0^1 \xi d\xi = \frac{2}{4}\xi^4 \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\xi^2 \Big|_0^1 = 0 .$$

Örnek 2. $C_{[a,b]}$ uzayında verilmiş lineer

$$I(y) = \int_a^b y(t) dt$$

fonksiyonelinin her bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.

$$\Delta I = I(y_0 + h) - I(y_0) = \int_a^b [y_0(t) + h(t)] dt - \int_a^b y_0(t) dt = \int_a^b h(t) dt$$

Böylece, $\Delta I = \int_a^b h(t) dt$. Bu ise $h(t)$-ye göre lineer fonksiyoneldir. Bu hal için $r(y_0,h) \equiv 0$. Böylece, ele aldığımız fonksiyonel her bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında diferansiyellenebilirdir ve bu fonksiyonelin varyasyonu

$$\delta I = \int_a^b h(t) dt \text{ olur.}$$

Örnek 3. Normlu E uzayında tanımlanmış her bir lineer sürekli fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm. Keyfi $y_0 \in E$ alalım. y_0 noktasından $y_0+h \in E$ noktasına geçtiğimizde $F(y)$ lineer sürekli fonksiyonelinin $\Delta F(y_0)$ artışı için aşağıdaki ifade bulunur

$$\Delta F(y_0) = F(y_0 + h) - F(y_0) = F(y_0 + h - y_0) = F(h).$$

Buradan görüyoruz ki, lineer sürekli $F(y)$ fonksiyoneli için $r\,(y_0,h) \equiv 0$ olur. Böylece, lineer sürekli fonksiyonel tanımlandığı bölgenin her bir noktasında diferansiyellenebilirdir ve bu fonksiyonelin varyasyonu $\delta F = F(h)$ olur.

Örnek 4. $C_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış.

$$I(y) = \int_a^b y^2(t)\,dt$$

quadratik fonksiyonelinin $C_{[a,b]}$ uzayının her bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm. Keyfi $y_0 \in C_{[a,b]}$ ve $y_0 + h \in C_{[a,b]}$ noktaları için fonksiyonelin $\Delta I(y_0)$ artışı için buluruz

$$\Delta I = \int_a^b [y_0(t) + h(t)]^2\,dt - \int_a^b y_0^2(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b 2y_0(t)h(t)\,dt + \int_a^b h^2(t)\,dt$$

Bu açılımın sağ yanındaki birinci integral verilmiş her bir $y_0(t)$ elemanında $h(t)$ değişkenine göre lineer fonksiyoneldir. Bu açılımın ikinci integralini değerlendirelim

$$\int_a^b h^2(t)\,dt = \int_a^b |\,h(t)|^2\,dt \le \left(\max_{a \le t \le b} |\,h(t)|\, \right)^2 \int_a^b dt =$$

$$= (b-a)\|h\|^2$$

Buradan da

$$|r(y_h,h)| = \int_a^b |h(t)|^2 dt \le (b-a)\,\|h\|^2 =$$

$$=(b-a)\cdot\|h\|.\|h\| \;.$$

Böylece, ΔI artışı her bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında $\Delta y = L(y_0,h)+r(y_0,h)$ şeklinde gösterilir ve $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{|r(y_0 h)|}{\|h\|} \le \lim\limits_{\|h\|\to 0}(b-a)\|h\| = 0$.

Buradan da, diferansiyellenebilir fonksiyonelin tanımına esasen bu fonksiyonel her bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasında diferansiyellenebilirdir ve bu fonksiyonelin varyasyonu

$\delta I = 2\int_a^b y_0(t)h(t)dt$ eşitsizliği ile tanımlanır.

Örnek 5. Örnek 4-deki

$$I(y) = \int_a^b y^2(t)dt$$

fonksiyonelinin varyasyonunu ikinci tanımı esasında bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelin birinci tanım esasında bulunmuş varyasyonu,

$$\delta y = 2\int_a^b y(t)h(t)dt$$

formülü ile tanımlanmıştır. Şimdi bu fonksiyonelin varyasyonunu ikinci tanım esasında bulalım

$$I(y_0(t)+\alpha\, h(t)) = \int_a^b [y_0(t)+\alpha\, h(t)]^2 dt$$

Burada α parametredir. $I(y_0+\alpha h)$ fonksiyonunun α parametresine göre türevini alırsak buluruz:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I(y_0+\alpha h) = 2\int_a^b (y_0+\alpha h)h\,dt$$

böylece,

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial\alpha} I[y_0 + \alpha h]\bigg|_{\alpha=0} = 2\int_a^b y_0 h\, dt .$$

Buradan birinci ve ikinci anlamda esasında bulunmuş varyasyonların çakıştığı görülür.

Örnek 6. $C_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış

$$I(y) = \int_a^b f(t, y(t))dt$$

fonksiyonelinde integral altındaki $f(t,y)$ fonksiyonunun $a \leq t \leq b$, $-\infty < y < \infty$ bölgesinde t ve y argümentlerine göre ikinci mertebeye kadar (ikinci mertebede dâhil olmakla) sürekli kısmi türevlerinin var olduğunda bu fonksiyonelin varyasyonunun

$$\delta I = \int_a^b \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} h(t)dt$$

formülü ile verildiğini gösterin.

Çözüm. $I(y)$ fonksiyonelinin herhangi bir $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktasından $y_0 + h \in C_{[a,b]}$ noktasına geçtiğinde aldığı artışı yazalım:

$$\Delta I = I(y_0 + h) - I(y_0) = \int_a^b [f(t, y_0(t) + h(t)) - f(t, y_0(t))]dt$$

$f(t,y)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan bu fonksiyonun y argümentine göre y_0 noktasındaki artışı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$f(t, y_0 + h) - f(t, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}.h + r(t, y_0, h)$$

Burada $r(t,y_0,h)$ fonksiyonunun mutlak değerini h vektörünün $\|h\| = \max\limits_{[a,b]} |h(t)|$ normu ile mukayese ettiğimizde daha yüksek mertebeden sonsuz küçülendir, yani

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|r(t, y_0, h)|}{\|h\|} = 0 \text{ olur.}$$

$f(t,y)$ fonksiyonu y değişkenine göre ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir olduğundan

$$r(t,y_0,h)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,y_0+\theta h)}{\partial y^2}h^2, \qquad 0<\theta<1$$

şeklinde gösterilebilir ve öyle $c>0$ sayısı bulmak olur ki, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|<c$ eşitsizliği sağlanır. Buna göre de,

$$|r(t,y_0,h)|\le\frac{c}{2}\|h\|^2$$

değerlendirilmesi yapılır. Böylece, bunları fonksiyonelin artışının ifadesinde dikkate alırsak buluruz:

$$\Delta I(y_0)=\int_a^b\frac{\partial f(t,y_0)}{\partial y}h(t)dt+r_0(y_0,h).$$

Bu eşitlikteki ikinci toplamın mutlak değeri için aşağıdaki değerlendirme yapılır:

$$|r_0(y_0,h)|\le\int_a^b|r(t,y_0(t),h(t))|dt\le\frac{c}{2}\int_a^b\|h\|^2dt=$$

$$=\frac{1}{2}c(b-a)\|h\|^2.$$

Burada biz $I(y)$ fonksiyonelindeki $f(t,y)$ fonksiyonu üstte gösterilen özelliklere sahip olduğunda fonksiyonelin ΔI artışını y_0 noktasında lineer baş kısma ve daha yüksek mertebeden sonsuz küçülen kısma açmış olduk. Bu yüzden de $I(y)$ fonksiyoneli, $y_0\in C_{[a,b]}$ elemanı keyfi alındığından $C_{[a,b]}$ uzayında diferansiyellenebilirdir ve bu fonksiyonelin varyasyonu

$$\delta I=\int_a^b\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}h(t)dt$$

formülü ile hesaplanmış olur.

Örnek 7. $C^1_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış

$$I(y)=\int_a^b f(t,y(t),y'(t))dt$$

fonksiyonelinde $f(t,y,y')$ fonksiyonunun $a \le t \le b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$ bölgesinde (t,y,y') argümentlerinin her birine göre sürekli olduğunda ikinci mertebeye dek ikinci mertebede dâhil olmakla tüm kısmi türevleri var ve sürekli olduğunda varyasyonunu bulalım.

Bunun için keyfi alınmış $y_0 \in C^1_{[a,b]}$ noktasından $y_0 + h \in C^1_{[a,b]}$ noktasına geçtiğimizde fonksiyonelin ΔI artışını hesaplayalım:

$$\Delta I(y_0(t)) = \int_a^b [f(t,y_0+h,y_0'+h') - f(t,y_0,y_0')]dt .$$

Burada $f(t,y,y')$ fonksiyonunun Taylor serisine açılımı formülünü kullanarak buluruz

$$f(t,y_0+h,y_0'+h') - f(t,y_0,y_0') = \frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial y'}h' +$$
$$+ r(t,y_0,y_0',h,h'),$$

burada $r(t,y_0,y_0',h,h')$ Taylor formülünde kalan terimdir.

Bu açılımı ΔI -nın ifadesinde kullanırsak buluruz:

$$\Delta I[y_0(t)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial y'}h' \right) dt + \int_a^b r(t,y_0,y_0',h,h')dt \ .$$

Bu sonuncu açılımın sağ yanındaki birinci toplam h ve h' vektörlerine göre lineerdir. Şimdi sonuncu açılımdaki ikinci toplamı değerlendirelim. Bunun için $f(t,y,y')$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevlerinin y ve y' argümentlerine göre her bir sınırlı bölgede bir $M>0$ sayısı ile sınırlı olduklarını varsayalım, yani gösterilen bölgede

$$\left| \frac{\partial^2 f(t,y,y')}{\partial y^2} \right| \le M , \left| \frac{\partial^2 f(t,y,y')}{\partial y \partial y'} \right| \le M , \left| \frac{\partial^2 f(t,y,y')}{\partial y'^2} \right| \le M$$

eşitsizliklerinin sağlandığını varsayalım. O zaman $r(t,y_0,y_0',h,h')$ kalan terimin

$$r\left(t, y_0, y_0', h, h'\right) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f\left(t, y_0+\theta h, y_0'\right)}{\partial y^2} h^2 + \right.$$
$$2\frac{\partial^2 f\left(t, y_0+\theta h, y_0'+\theta h'\right)}{\partial y \partial y'} hh'$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f\left(t, y_0, y_0'+\theta h'\right)}{\partial y'^2} h'^2 \right]$$

açılımını kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz:

$$\int_a^b \left| r\left(t, y_0, y_0', h, h'\right)\right| dt \le 2M \int_a^b \|h\|^2 dt = 2M(b-a)\|h\|^2 .$$

Burada

$$\|h\| = max\left\{ \max_{[a,b]} |h|, \max_{[a,b]} |h'| \right\}.$$

Böylece, ΔI nın açılımının ikinci terimi $\|h\|$ ile mukayese edildiğinde ikinci mertebeden sonsuz küçülendir. Buna göre de ele aldığımız fonksiyonel $C^1_{[a,b]}$ uzayında diferansiyellenebilirdir ve onun varyasyonu aşağıdaki formülle belirlenir:

$$\delta I(y) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right) dt .$$

Örnek 8. $C^1_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış

$$I(y) = \int_{-1}^{1} \left(ty^2 + e^y y' \right) dt$$

fonksiyonelinin varyasyonunu bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelde $f\left(t, y, y'\right) = ty^2 + e^y y'$ fonksiyonu t, y, y' değişkenlerinin hepsine göre süreklidir ve tüm mertebeden kısmi türevleri y, y' değişkenlerinin her bir sınırlı değişme bölgesinde sınırlıdırlar. Bu yüzden de bu fonksiyonel $C^1_{[-1,1]}$ uzayında diferansiyellenebilirdir ve onun varyasyonu

$$\delta I = \int_{-1}^{1} \left[\left(y'e^y + 2ty \right) h + e^y h' \right] dt .$$

Örnek 9. Örnek 7-de gösterilmiş yöntemle $C^m_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış

$$F(y)=\int_a^b f\left(t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(m)}(t)\right)dt$$

fonksiyonelinin $C^m_{[a,b]}$ uzayında diferansiyellenebilir olduğu ve onun varyasyonunun

$$\delta F=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}h(t)+\frac{\partial f}{\partial y'}h'(t)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}h^{(m)}(t)\right]dt$$

formülü ile verildiği ispatlanır.

Örnek 10. Argümenti birkaç değişkene bağlı fonksiyonlar olan bir fonksiyoneli ele alalım.

$$F(z)=\iint_G f\left(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)\right)dxdy\,.$$

Bu fonksiyonelin argümenti *z*(*x*,*y*), θ_{xy} düzleminin sınırlı *G* bölgesinde tanımlanmış iki değişkenli fonksiyondur. Bu fonksiyoneli *G* bölgesinde kendisi ve birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı olan $C^1(G)$ uzayında ele alalım. $C^1(G)$ uzayında norm,

$$\|z\|=max\left\{\max_{(x,y)\in G}|z(x,y)|,\max_{(x,y)\in G}|z_x(x,y)|,\max_{(x,y)\in G}|z_y(x,y)|\right\}$$

formülü ile tanımlanır.

Bu fonksiyonelin integral altındaki f fonksiyonunun tüm argümentlerine göre ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlerinin olduğunu varsayalım. Fonksiyonelin $z_0(x,y)$ argümentinin *h*(*x*,*y*) artışı aldığını varsayarak fonksiyonelin artışını hesaplayalım:

$$\Delta F=\iint_G\left[f\left(x,y,z_0+h,z_{0x}+h_x,z_{0y}+h_y\right)-f\left(x,y,z_0,z_{0x},z_{0y}\right)\right]dxdy=$$

$$=\iint_G\left[\frac{\partial f}{\partial z}h+\frac{\partial f}{\partial z_x}h'_x+\frac{\partial f}{\partial z_y}h'_y\right]dxdy+$$

$$+\iint_G r\left(x,y,z_0,z_{0x},z_{0y},h,h_x,h_y\right)dxdy\,.$$

Bu açılımdaki birinci toplam h-a göre lineerdir. İkinci toplam ise aşağıdaki şekilde değerlendirilir

$$\iint_G \left| r\left(x,y,z_0,z_{0x},z_{0y},h,h_x,h_y\right)\right| dxdy \le 9M\,.|G|.\|h\|^2 .$$

Burada $|G|$ ifadesi G bölgesinin alanını gösterir ve M sayısı ise f fonksiyonunun ikinci mertebeden tüm argümentlere nazaran kısmi türevlerinin mutlak değerlerini sınırlayan sayıdır. Böylece, ele aldığımız fonksiyonel $C^1(G)$-de diferansiyellenebilirdir ve onun varyasyonu

$$\delta F(z_0) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial z_x}h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y}h_y\right] dxdy$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek 11. Birkaç fonksiyonel argümente bağlı fonksiyoneli ele alalım. Mesela,

$$F\left(y_,,\ldots,y_n\right) = \int_a^b f\left(x,y_1(x),\ldots,y_n(x),y_1'(x),\ldots,y_n'(x)\right)dx$$

fonksiyonelini ele alalım.

Bu fonksiyoneli elemanları $y = \left(y_1(x),\ldots,y_n(x)\right),(a \le x \le b)$ vektör fonksiyonları olan ve bu vektör fonksiyonların koordinatları $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olan $C^1_{n[a,b]}$ lineer uzayında ele alalım. $C^1_{n[a,b]}$ uzayında elemanın normunu

$$\|y\| = max\left\{\max_{[a,b]}|y_1(x)|,\ldots,\max_{[a,b]}|y_n(x)|,\max_{[a,b]}|y_1'(x)|,\ldots,\max_{[a,b]}|y_n'(x)|\right\}$$

gibi tanımlayalım.

Bu fonksiyonelde integral altındaki f fonksiyonunun ikinci mertebeden $y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'$ argümentlerine göre kısmi sürekli türevleri var ve M sayısıyla sınırlı olduğunu varsayalım. $y = \left(y_1,\ldots,y_n\right)$ vektörü $h = \left(h_1,\ldots,h_n\right)$ olmakla y+h artışı aldığında F fonksiyonelinin artışını hesaplayalım:

$$\Delta F = \int_a^b f\left(x,y_1+h_1,\ldots,y_n+h_n,y_1'+h_1',\ldots,y_n'+h_n'\right)dx -$$

$$-\int_a^b f\left(x, y_1,...,y_n, y_n',...,y_n'\right)dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n'}h_n'\right)dx +$$

$$+\int_\iota^b r\left(x, y_1,...,y_n, y_1',...,y_n', h_1,...,h_n'\right)dx\,.$$

Bu açılımdaki birinci terim h vektörüne nazaran lineerdir. İkinci toplam ise aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\int_a^b \left|r\left(x, y_1,...,y_n', h_1,...,h_n'\right)\right| dx \le n^2 M(b-a).\|h\|^2\,.$$

Böylece, ele aldığımız bu fonksiyonel $C^1_{n[a,b]}$ uzayında diferansiyellenebilirdir ve bu fonksiyonelin varyasyonu,

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n'}h_n'\right]dx$$

şeklindedir.

Örnek 12. Örnek 7, Örnek 9 ve Örnek 10- daki fonksiyonellerin varyasyonlarını varyasyonun ikinci tanımı esasında bulun.

a) $I(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$ fonksiyonelinin $C^1_{[a,b]}$ uzayında varyasyonunu varyasyonun ikinci tanımı esasında bulalım:

$$\delta I(y,h) = \frac{d}{dt}I(y+th)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b f\left(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x)\right)dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[f_y'(x, y+th, y'+th')h + f_{y'}'(x, y+th, y'+th')h'\right]dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[f_y'(x,y,y')h + f_{y'}'(x,y,y')h'\right]dx\,.$$

Burada integralin t parametresine göre diferansiyelinin alınması kuralı uygulandı. Böylece,

$$\delta I(y,h)=\int_a^b \left[f'_y h+ f'_{y'}h'\right]dx .$$

b) $F(y)=\int_a^b f\left(x,y,y',\dots,y^{(m)}\right)dx$ fonksiyonelinin $C^m_{[a,b]}$ uzayında varyasyonun ikinci tanımı esasında varyasyonunu bulalım. Tanıma esasen,

$$\delta F(y,h)=\frac{d}{dt}F(y+th)\bigg|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_a^b f\left(x,y(x)+th(x),\dots,y^{(n)}(x)+th^{(n)}(x)\right)dx\bigg|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b \left[f'_y\left(x,y+th,\dots,y^{(n)}+th^{(n)}\right)h+\dots+ f'_{y^{(n)}}\left(x,y+th,\dots,y^{(n)}+th^{(n)}\right)h^{(n)}\right]dx\bigg|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b \left[f'_y\left(x,y,\dots,y^{(n)}\right)h+ f'_{y'}\left(x,y,\dots,y^{(n)}\right)h'+\dots+ f'_{y^{(n)}}\left(x,y,\dots,y^{(n)}\right)h^{(n)}\right]dx .$$

Böylece,

$$\delta F(y,h)=\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}h+\dots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}h^{(n)}\right]dx .$$

c) $F(z)=\iint_G f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$ fonksiyonelinin $C^1(G)$ uzayında varyasyonunu varyasyonun ikinci tanımı esasında hesaplayalım. Varyasyonun ikinci tanımına esasen buluruz:

$$\delta F(z,h)=\frac{d}{dt}F(z+th)\bigg|_{t=0}=\frac{d}{dt}\iint_G f\left(x,y,z(x,y)+th(x,y),\right.$$

$$\left.z'_x(x,y)+th'_x(x,y),z'_y(x,y)+th'_y(x,y)\right)dxdy\Big|_{t=0}=$$

$$=\iint_G \left[f'_z\left(x,y,z+th,z'_x+th'_x,z'_y+th'_y\right)h+ f'_{z'_x}\left(x,y,z+th,z'_x+th'_x,z'_y+th'_y\right)h'_x+\right.$$

$$\left.+ f'_{z'_y}\left(x,y,z+th,z'_x+th'_x,z'_y+th'_y\right)h'_y\right]dxdy\Big|_{t=0}=$$

$$= \iint_G \left[f'_z(x,y,z,z'_x,z'_y)h + f'_{z'_x}(x,y,z,z'_x,z'_y)h'_x + f'_{z'_y}(x,y,z,z'_x,z'_y)h'_y \right] dxdy .$$

Böylece,

$$\delta F(z,h) = \iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z'_x} h'_x + \frac{\partial f}{\partial z'_y} h'_y \right) dxdy .$$

Not. Fonksiyonelin varyasyonunun ikinci tanımı birinci tanımına nazaran daha geniştir. Fonksiyonelin birinci tanım anlamında varyasyonu olduğunda ikinci tanım anlamında da varyasyonunun olduğunu ve bunların çakıştığını gösterdik. Ama öyle fonksiyoneller vardır ki, onların artışından lineer baş kısmı ayırmak mümkün olmuyor. Buna rağmen bu fonksiyonellerin ikinci tanım anlamda varyasyonu olabilir.

2.3.5. Fonksiyonelin İkinci Varyasyonu

Lineer normlu E uzayında tanımlanmış $F(y)$ fonksiyonelinde $y \in E$ noktasını $y+h \in E$ noktası ile değiştirdiğimizde $F(y)$ fonksiyonelinin

$$\Delta F(y,h) = F(y+h) - F(y)$$

artışının

$$\Delta F(y,h) = L(y,h) + \frac{1}{2} Q(y,h) + r_1(y,h) \qquad (1)$$

şeklinde gösterildiğini varsayalım. Burada $L(y,h)$ ifadesi h değişkenine nazaran E uzayında lineer fonksiyonel, $Q(y,h)$ ifadesi ise h değişkenine nazaran E-de quadratik (kare) fonksiyonel ve $r_1(y,h)$ ise $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \frac{|r_1(y,h)|}{\|h\|^2} = 0$ şartını sağlıyor.

Başka deyimle keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle $\delta > 0$ sayısı var ki, $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan her bir $h \in E$ için

$$|r_1(y,h)| < \varepsilon \|h\|^2 \qquad (2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda F(y) fonksiyoneli $y \in E$ noktasında iki kez diferansiyellenebilirdir[1] denir ve $L(y,h)$ ifadesine $F(y)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu $Q(y,h)$ ifadesine ise $F(y)$ fonksiyonelinin ikinci varyasyonu denir ve aşağıdaki gibi işaret edilir:

$$L(y,h) = \delta F(y,h), \qquad Q(y,h) = \delta^2 F(y,h).$$

Böylece, fonksiyonelin birinci varyasyonu h değişkenine göre lineer fonksiyonel, ikinci varyasyonu ise h değişkenine göre quadratik fonksiyoneldir.

Fonksiyonelin birinci varyasyonu gibi ikinci varyasyonunun da tek olduğu gösterilir. Fonksiyonelin ikinci varyasyonunu

$$\delta^2 F(y,h) = \frac{d^2}{dt^2} F(y+th)\Big|_{t=0} \tag{3}$$

formülü ile de tanımlamak mümkündür.

Fonksiyonel iki kez diferansiyellenebilir olduğunda bu tanımların çakıştığı gösterilir.

Genelde integralle tanımlanan fonksiyonellerde, mesela, $C^1_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış

$$F(y) = \int_a^b f(t,y,y')dt \tag{4}$$

fonksiyonelinde olduğu gibi, integral altındaki $f(t,y,y')$ fonksiyonunun y ve y' argümentlerine nazaran üçüncü mertebeden tüm kısmi türevlerinin sürekli fonksiyon olduğu halde (üçüncü mertebede dâhil olmakla) bu tipli fonksiyonelin ikinci varyasyonunu bulmak için integral altındaki f fonksiyonunu y noktası komşuluğunda üçüncü terimde dâhil olmakla Taylor formülüne açmak fonksiyonelin birinci ve ikinci varyasyonunu bulmak için faydalı olur. Mesela,

$$F(y) = \int_a^b f(t,y)dt \tag{5}$$

fonksiyoneli halinde integral altındaki fonksiyonunu aşağıdaki şekilde Taylor formülüne açalım:

$$f(t,y+h) - f(y) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial f(t,y+\theta h)}{\partial y^3} h^3 \tag{6}$$

burada $0 < \theta < 1$. (6) açılımını kullanarak (5) fonksiyonelinin artışı için aşağıdaki açılımı buluruz:

$$\Delta F(y,h) = \int_a^b [f(t,y(t)+h(t)) - f(t,y(t))]dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} h(t)dt + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial y^2} h^2(t)dt + \frac{1}{6}\int_a^b \frac{\partial^3 f(t,y+\theta h)}{\partial y^3} h^3(t)dt =$$

$$= L(y,h) + \frac{1}{2} Q(y,h) + r_1(y,h) \qquad .$$

Burada

$$L(y,h) = \int_a^b \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} h(t)dt$$

ifadesi h değişkenine göre lineer fonksiyoneldir ;

$$Q(y,h) = \int_a^b \frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial y^2} h^2(t)dt$$

ifadesi ise h değişkenine göre quadratik (kare) fonksiyoneldir ve

$$r_1(y,h) = \frac{1}{6}\int_a^b \frac{\partial^3 f(t,y+\theta h)}{\partial y^3} h^3(t)dt$$

ifadesi ise $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{|r_1(y,h)|}{\|h\|^2} = 0$ şartını sağlayan ifade olduğu gösterilecektir. Buradaki $L(y,h)$ ve $Q(y,h)$ fonksiyonellerinin $h \in E$ değişkenine göre uygun olarak lineer ve quadratik fonksiyoneller oldukları açıktır. $r_1(y,h)$ fonksiyonelinin (2) eşitsizliğini sağladığını gösterelim.

$r_1(y,h)$-ın ifadesindeki $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ türevi y noktasının yeteri kadar küçük komşuluğunda sürekli fonksiyon olduğu için bu türev her bir yeteri kadar küçük sonlu bölgede sınırlı fonksiyondur. Başka bir deyimle öyle $c > 0$ sabiti var ki, $\left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right| \leq c$ eşitsizliği sağlanır. Bu değerlendirmeyi dikkate alarak $r_1(y,h)$ için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$|r_1(y,h)| \leq \frac{1}{6} c.(b-a)\|h\|^3 .$$

Burada keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \dfrac{6}{c(b-a)}\varepsilon$ alınırsa $\|h\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her bir $h \in E$ için $|r_1(y,h)| < \varepsilon\|h\|^2$ eşitsizliği sağlanır.

Böylece, ele aldığımız fonksiyonel için

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} h(t)\,dt,$$

$$\delta^2 F(y,h) = \int_a^b \frac{\partial^2 f(t,h)}{\partial y^2} h^2(t)\,dt$$

formüllerini buluruz.

Örnek. $C^1_{[0,1]}$ uzayında tanımlanmış

$$I(y) = \int_0^1 \left(xy^2 + y'^3\right)dx \tag{7}$$

fonksiyonelinin ikinci varyasyonunu bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelde y noktasını $y + h \in C^1_{[0,1]}$ noktasıyla değiştirerek aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\Delta I = I(y+h) - I(y) = \int_0^1 \left[x(y+h)^2 + (y'+h')^3 - xy^2 - y'^3\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2xyh + xh^2 + 3y'^2h' + 3y'h'^2 + h'^3\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2xyh + 3y'^2h'\right)dx + \int_0^1 \left[xh^2 + 3y'h'^2\right]dx + \int_0^1 h'^3 dx. \tag{8}$$

Burada $y \in C^1_{[0,1]}$ noktası değişmez sağlandığında (8) eşitliğinin sağ yanındaki birinci

$$L(y,h) = \int_0^1 \left(2xyh + 3y'^2h'\right)dx$$

toplamı $h \in C^{1}_{[0,1]}$ değişkenine nazaran lineer fonksiyoneldir ; (8)-in sağ yanındaki ikinci $\frac{1}{2}Q(y,h) = \int_0^1 \left[xh^2 + 3y'h'^2\right]dx$ toplamı quadratik (kare) fonksiyoneldir. Nihayet, sonuncu, üçüncü toplam aşağıdaki gibi değerlendirilir:

$$|\, r(y,h)| = \left| \int_0^1 h'^3 dx \right| \leq \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |h'| \right)^3 \leq \|h\|^3_{C^1_{[0,1]}} .$$

Buradan da, ele aldığımız fonksiyonelin iki kez diferansiyellenebilir olduğunu ve

$$\delta I(y,h) = \int_0^1 \left(2xyh + 3y'^2 h'\right)dx,$$

$$\delta^2 I(y,h) = 2\int_0^1 \left[xh^2 + 3y'h'^2\right]dx$$

olduğunu buluruz.

Böylece, üstte gösterilmiş tanımlara dayanarak

$$F(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$$

fonksiyonelinin ikinci varyasyonunu

$$\delta^2 F(y,h) = \int_a^b \left[f_{yy}h^2 + 2 f_{yy'}hh' + f_{y'y'}h'^2\right]dx \tag{9}$$

Şeklinde ;

$$F(y) = \int_a^b f\left(x,y,y',\ldots,y^{(m)}\right)dx$$

fonksiyoneli için

$$\delta^2 F = \int_a^b \left[f_{yy}h^2 + \ldots + f_{y^{(k)}y^{(\ell)}} h^{(k)} h^{(\ell)} + \ldots + f_{y^{(m)}y^{(m)}} \left(h^{(m)}\right)^2\right] dx \tag{10}$$

şeklinde ve son olarak

$$F(y_1,\ldots,y_n)=\int_a^b f\left(x,y_1,\ldots,y_n,y_1^1,\ldots,y_n^1\right)dx$$

fonksiyoneli için ise

$$\delta^2 F=\int_a^b\left[\sum f_{y_i y_k}h_i h_k+\sum f_{y_i y_k}h_i h_k'+\sum f_{y_k' y_i'}h_k' h_i'\right]dx \qquad (11)$$

şeklinde olduğu bulunur.

2.4. Diferansiyellenebilir Fonksiyoneller İçin Ekstremum Problemi

Normlu E uzayının belli bir $\mathcal{M} \subseteq E$ bölgesinde tanımlanmış reel değerli fonksiyonelin bu bölgede en büyük ve en küçük değerlerinin bulunması problemine fonksiyonelin ekstremum problemi[2] denir. Bu kısımda biz önce normlu uzaylarda tanımlanmış diferansiyellenebilir reel değerli fonksiyoneller için şartsız ekstremum problemini ele alacağız.

2.4.1. Şartsız Ekstremum Problemi

F(y) normlu E uzayında her yerde tanımlanmış reel değerli fonksiyonel olsun. Bu fonksiyonelin E uzayında minimum ve maksimum değerlerinin bulunması problemine şartsız ekstremum problemi denir.

Tanım 1. y_0 noktası E uzayından alınmış bir nokta olsun. Eğer her bir $y \in E$ için

$$F(y_0)\leq F(y), \qquad\qquad (F(y_0)\geq F(y))$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $F(y)$ fonksiyoneli y_0 noktasında mutlak (global) minimum (global-mutlak maksimum) alır[3] denir.

Tanım 2. Eğer $y_0 \in E$ noktasının öyle $S_r(y_0)=\{y\in E:\|y-y_0\|<r\}$ komşuluğu varsa ki, her bir $y\in S_r(y_0)$ için,

$$F(y_0)\leq F(y) \quad , \quad (F(y_0)\geq F(y))$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $F(y)$ fonksiyoneli y_0 noktasında lokal minimum (lokal maksimum) alır denir. Bu halde y_0 noktası $F(y)$ fonksiyonelinin lokal minimum (lokal maksimum) noktası[4] olur.

Minimum ve maksimum noktalarına fonksiyonelin ekstremum noktaları denir.

Verilmiş F(y) fonksiyoneli için şartsız ekstremum problemi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$F(y)\xrightarrow{\hspace{2cm}} \underset{y\in E}{extr} \qquad (1)$$

(1) extremum probleminin çözümüne optimal çözüm denir.

Dikkate alalım ki, fonksiyonelin her bir global ekstremum noktası aynı zamanda onun lokal ekstremum noktasıdır. Buna göre de, fonksiyonelin lokal ekstremumu için yazılmış her bir gerekli şart bu fonksiyonelin global ekstremumu için de gerekli şart olur. Ama bunun tersi genelde doğru değildir. Böyle ki, fonksiyonelin global ekstremum olması için yazılmış her bir gerekli şart, genelde lokal ekstremum için gerekli şart olmayabilir.

2.4.2. Fonksiyonelin Ekstremumunun Varlığı İçin Gerekli Şart

Hatırlatalım ki, matematik analizde diferansiyellenebilir fonksiyonların lokal ekstremumlarını bulmak için fonksiyonun diferansiyeli sıfıra eşitlenir. Diferansiyellenebilir fonksiyoneller için de benzer kural verilir.

Teorem. Aşağıdaki

$$F(y) \xrightarrow[y\in E]{} extr \tag{1}$$

probleminde $F(y)$ fonksiyonelinin normlu E uzayında diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım. O zaman her bir $y_0 \in E$ ekstremum noktasında her bir $h \in E$ için $F(y)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu sıfıra eşittir, yani $\forall h \in E$ için

$$\delta F(y_0, h) = 0 \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Keyfi $h \in E$ için t parametresine bağlı $F(y_0 + th)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon t değişkenine göre diferansiyellenebilirdir. $t=0$ noktası $F(y_0 + th)$ fonksiyonunun ekstremum noktasıdır. Bu yüzden $F(y_0 + th)$ fonksiyonunun t değişkenine göre türevinin $t=0$ noktasındaki değeri sıfıra eşittir. Diğer yandan varyasyonun ikinci tanımına esasen,

$$\left.\frac{d}{dt} F(y_0 + th)\right|_{t=0} = \delta F(y_0, h)$$

olduğundan her bir $h \in E$ için $\delta F(y_0, h) = 0$ olduğunu buluruz. Teorem böylelikle ispatlanır.

(2) denklemini sağlayan her bir $y_0 \in E$ noktasına $F(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası denir.

Buradan görüyoruz ki, (1) ektremum problemini çözmek için (2) denklemini çözüp $F(y)$ fonksiyonelinin tüm stasionar noktalarını bulup, sonra ise bu stasionar noktalardan $F(y)$ fonksiyoneline maksimum ve minimum değer veren ekstremum noktalarını seçmek gerekir.

2.4.3.Stasionar Noktada Fonksiyonelin Minimumunun Varlığı İçin Gerek ve Yeter Şartlar

Normlu E uzayında tanımlanmış $F(y)$ fonksiyoneli iki kez diferansiyellenebilir olduğunda bu fonksiyonelin ikinci varyasyonundan faydalanarak fonksiyonelin stasionar noktalarından onun maksimum ve minimum noktalarını seçmek olur.

Böylece, $F(y)$ fonksiyoneli $y_0 \in E$ noktasında iki kez diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğunu ve y_0 noktasının ise bu fonksiyonelin stasionar noktası olduğunu varsayalım. O zaman her bir $h \in E$ için $\delta F(y_0,h)=0$ olduğundan $F(y)$ fonksiyonelinin y_0 noktasındaki artışı her bir $h \in E$ için aşağıdaki şekilde olur:

$$\Delta F(y_0,h)=\frac{1}{2!}\delta^2 F(y_0,h)+r_1(y_0,h).$$

Burada $r_1(y_0,h)$ fonksiyoneli $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{|r_1(y_0,h)|}{\|h\|^2}=0$ şartını sağlayan fonksiyoneldir.

Buradan limitin tanımına esasen keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulmak olur ki, $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan her bir $h \in E$ için $|r_1(y_0,h)| < \varepsilon \|h\|^2$ değerlendirilmesi yazılabilir. Bu durumda sonuncu eşitsizlikten görüyoruz ki, öyle bir $\theta \in [-1,1]$ sayısı bulmak olur ki,

$$r_1(y_0,h)=\theta.\varepsilon.\|h\|^2$$

eşitliği sağlanır.

Böylece, fonksiyonelin y_0 noktasındaki $\Delta F(y_0,h)$ artışı $\|h\| < \delta$ şartını sağlayan her bir $h \in E$ için,

$$\Delta F(y_0,h)=\frac{1}{2}\delta^2 F(y_0,h)+\theta\varepsilon\|h\|^2 \qquad (3)$$

şeklinde göstermiş oluruz.

$F(y)$ fonksiyonelinin stasionar y_0 noktasında $\Delta F(y_0,h)$artışının (3) açılımını kullanarak y_0 stasionar noktasının minimum noktası olması için gerekli ve yeterli şartlar alınabilir.

Teorem. F(y) fonksiyonelinin stasionar y_0 noktasının bu fonksiyonele minimum değer vermesi için

a) Gerekli şart her bir $h \in E$ için,

$$\delta^2 F(y_0,h) \geq 0 \tag{4}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır ;

b) Yeterli şart bir değişmez $c>0$ sabitinde her bir $h\in E$ için,

$$\delta^2 F(y_0,h) \geq c\|h\|^2 \tag{5}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. **a)** kısmını ispatlayalım. $F(y)$ fonksiyonelinin stasionar y_0 noktasında minimum değer aldığını varsayalım. Ama buna bakmayarak varsayalım ki, bir $h_0\in E$ vektöründe $\delta^2 F(y_0,h_0)<0$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda

$$0<\varepsilon<\frac{\left|\delta^2 F(y_0,h_0)\right|}{4\|h_0\|^2}$$

eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon>0$ sayısı alalım. $h=th_0$ şeklinde $h\in E$ vektörü alalım. t parametresini öyle seçelim ki, $\|h\|=|t|\|h_0\|<\delta$ eşitsizliği sağlansın. Dikkate alalım ki, buradaki $\delta>0$ sayısı (3) açılımının yazılışında $\varepsilon>0$ sayısına karşı seçilmiş δ sayısıdır. Böylece, $|t|<\dfrac{\delta}{\|h_0\|}$ eşitsizliğini sağlayan t parametreleri için $h=th_0$ halinde (3) açılımı sağlanır.

Bu halde F(y) fonksiyonelinin y_0 noktasındaki $\Delta F(y_0,th_0)$ artışı aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\Delta F(y_0,th_0)=\frac{1}{2}\delta^2 F(y_0,th_0)+\theta.\varepsilon.\|th_0\|^2=$$

$$=\frac{1}{2}t^2\left[\delta^2 F(y_0,h_0)+\theta.\varepsilon.2\|h_0\|^2\right].$$

Bu açılımda $\varepsilon>0$ sayısı (6) eşitsizliğini sağlayan bir sayı ve $\theta\in[-1,1]$ olduğundan $\Delta F(y_0,th_0)<0$ olduğunu alırız. Bu ise y_0 noktasında $F(y)$ fonksiyonelinin minimum değer alması şartına çelişkidir. Bu çelişki teoremin a kısmını ispatlıyor.

Teoremin b) kısmını ispatlamak için $0<\varepsilon<\dfrac{c}{4}$ alalım. $F(y)$ fonksiyonelinin y_0 noktasındaki artışını merkezi y_0 noktasında yarıçapı $\delta>0$ olan yuvarda alttan değerlendirelim. y_0 noktası $F(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası olduğundan (3) açılımına esasen yazarız:

$$\Delta F(y_0,h)=\frac{1}{2}\delta^2 F(y_0,h)+\theta.\varepsilon.\|h\|^2.$$

(5) şartını bu eşitliğin sağ yanında dikkate alırsak buluruz:

$$\Delta F(y_0,h)\geq\frac{1}{2}\|h\|^2(c+\theta.2\varepsilon)>0,\ \|h\|>0.$$

Sonuncu eşitsizlikten stasionar y_0 noktasında $F(y)$ fonksiyonelinin minimum değer aldığı görülür[1].

2.4.4. Varyasyon Hesabının Esas Lemması

Lemma. $A(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. Eğer $[a,b]$ aralığında sürekli olan her bir $h(t)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b A(t)h(t)dt=0 \tag{7}$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman $a \leq t \leq b$ için $A(t)\equiv 0$ olur.

İspat. Lemmayı ispatlamak için aksini farz edelim. Lemmanın şartlarının sağlandığını, ama $A(t)\not\equiv 0$ olduğunu varsayalım. Bu halde $[a,b]$ aralığından öyle $t_0\in[a,b]$ noktası bulmak olur ki, $A(t_0)\neq 0$. Tam belirlilik için $A(t_0)>0$ olduğunu varsayalım. O zaman $A(t)$ fonksiyonu t_0 noktasında sürekli olduğundan t_0 noktasının öyle $(t_0-\delta,t_0+\delta)\subset[a,b]$ komşuluğunu bulmak olur ki, bu komşulukta $A(t)>\frac{1}{2}A(t_0)$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ aralığının dışında, yani $[a,b]\backslash(t_0-\delta,t_0+\delta)$ bölgesinde sıfıra eşit olan ve $h(t_0)>0$ şartını sağlayan $h(t)\geq 0$, $\forall t\in[a,b]$ olmakla $[a,b]$ aralığında sürekli olan $h(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu $h(t)$ fonksiyonu için buluruz:

$$\int_a^b A(t)h(t)dt=\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}A(t)h(t)dt>\frac{A(t_0)}{2}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}h(t)dt>0$$

Bu ise lemmada (7) şartının sağlanmasına çelişkidir. Bu çelişki lemmanın doğruluğunu ispatlıyor. Burada ispatladığımız lemmaya varyasyon hesabının esas lemması denir.

2.4.5. Varyasyonun Hesabının Esas Lemmasının Uygulanmasıyla Fonksiyonelin Minimumu İçin Stasionar Noktalarda Elde Edilen Gerek ve Yeter Şartlar

Örnek olarak $C_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım:

$$F(y)=\int_a^b f(x,y(x))dx. \tag{8}$$

Bu fonksiyonelde integral altındaki *f* (*x,y*) fonksiyonunun üçüncü mertebede dâhil olmakla argümentlerine göre tüm kısmi türevlerinin var ve sürekli olduğunda bu fonksiyonelin ekstremum problemini inceleyelim. Bu fonksiyonelin herhangi bir $y \in C_{[a,b]}$ noktasındaki birinci varyasyonu

$$\delta F(y,h)=\int_a^b \frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}h(t)dt \tag{9}$$

formülü ile tanımlanır.

Ekstremumun varlığı için gerekli şarta esasen (8) fonksiyonelinin ekstemum noktaları her bir $h \in C_{[a,b]}$ için

$$\delta F(y,h)=\int_a^b \frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}h(t)dt = 0 \tag{10}$$

denklemini sağlıyor. (10) denklemini sağlayan $y_0 \in C_{[a,b]}$ noktalarına (8) fonksiyonelinin stasionar noktaları denir. (10) eşitliğinde $\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}$ fonksiyonu $a \le x \le b$ aralığında *x*-değişkenine göre sürekli fonksiyondur. (10) eşitliği a ≤ x ≤ b aralığında sürekli olan her bir *h*(*x*) fonksiyonu için sağlandığından varyasyon hesabının esas lemmasına esasen (10) eşitliği,

$$\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}=0, \qquad a \le x \le b \tag{11}$$

şartında sağlanır.

Böylece, (11) denkleminin çözümleri olan her bir $y_0(x) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonu (8) fonksiyonelinin stasionar noktası olur. Başka deyimle (8) fonksiyonelinin stasionar noktalarını bulmak için (11) denklemini *y*-ye göre çözmek gerekir.

(8) fonksiyonelinin ikinci varyasyonu

$$\delta^2 F(y,h)=\int_a^b \frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial y^2}h^2(x)dx \tag{12}$$

formülü ile tanımlanır.

(12) formülünden görüyoruz ki, (8) fonksiyonelinin stasionar $y_0(x)$ noktasında her bir $h(x) \in C_{[a,b]}$ için $\delta^2 F(y_0, h) \geq 0$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman

$$f_{yy}(x, y_0(x)) \geq 0, \; a \leq x \leq b \tag{13}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden $y_0(x)$ stasionar noktasının (8) fonksiyoneline minimum değer vermesi için (13) şartının sağlanmasının gerekli şart olduğunu buluruz.

Şimdi $y_0(x)$ stasionar noktasında (8) fonksiyonelinin artışını aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\Delta F(y_0, h) = \frac{1}{2!}\int_a^b f_{yy}(x, y_0(x))h^2(x)dx + \frac{1}{3!}\int_a^b f_{yyy}(x, y_0(x) + \theta\, h(x))h^3(x)dx =$$

$$= \int_a^b h^2(x)\left[\frac{1}{2} f_{yy}(x, y_0(x)) + \frac{1}{6} f_{yyy}(x, y_0(x) + \theta h(x))h(x)\right]dx,$$

$0 < \theta(x) < 1.$

(8) fonksiyonelinin $y_0(x)$ stasionar noktasında yazılmış $\Delta F(y_0, h)$ artışının bu ifadesinden görüyoruz ki, her bir $x \in [a, b]$ için,

$$f_{yy}(x, y_0(x)) > 0 \tag{14}$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman yeteri kadar küçük (yani $\|h\|_{C_{[a,b]}}$ küçük olan $h(x) \in C_{[a,b]}$ için) $h(x)$ yer değişme vektörleri için $\Delta F(y_0, h) > 0$ eşitsizliği sağlanır. Buna göre de (14) şartı $y_0(x)$ stasionar noktasının (8) fonksiyonelinin minimum noktası olması için yeterli şart olduğunu gösterir.

3.VARYASYON HESABININ EN SADE PROBLEMLERİ İÇİN EULER DEKLEMLERİ

3.1. $\mathbf{F(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx}$ Şekilli Fonksiyoneller

3.1.1. Euler Denklemi

Aşağıdaki

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx \tag{1}$$

fonksiyonelinin $C^2_{[a,b]}$ uzayında verildiğini varsayalım. Bu fonksiyonelde integral altındaki, $f(x,y,y')$ fonksiyonunun ikinci mertebede dâhil olmakla

$a \le x \le b,\ -\infty < y, y' < \infty$ bölgesinde ikinci mertebedeki tüm kısmi türevlerinin var ve sürekli olduklarını farz edelim. $C^2_{[a,b]}$ uzayında,

$$\mathcal{M}=\left\{y\in C^2_{[a,b]} : y(a)=A, y(b)=B\right\}$$

kümesini ele alalım. Bu küme *A=B=0* olduğunda $C^2_{[a,b]}$ uzayında lineer manifold oluşturur. Ama $|A|+|B|>0$ olduğunda ise $\mathcal{M}$ kümesi $C^2_{[a,b]}$ uzayında lineer afin manifoldu oluşturur. $F(y)\underset{y\in M}{\to extr}$ problemini ele alalım ve (1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ kümesinde yerleşen stasionar noktalarını bulalım. Dikkate alalım ki (1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ kümesinde yerleşen stasionar noktalarına varyasyon hesabında bu fonksiyonelin ekstremalları da denir[1].

Burada, kısaca

$$y(a)=A, \quad y(b)=B$$

şartlarını sağlayan öyle $y(x)\in C^2_{[a,b]}$ fonksiyonlarının bulunması istenir ki, bu fonksiyonlar için,

$$\delta F(y,h)=0 \tag{2}$$

şartı sağlansın. (1) fonksiyonelinin ekstremum problemi $\mathcal{M}$ kümesinde ele alındığında $h(x)\in C^2_{[a,b]}$ artışının

$$h(a)=h(b)=0 \tag{3}$$

şartlarını sağlaması gerektir. Gerçektende, (1) fonksiyonelinin artışı hesaplandığında $y,\, y+h \in \mathcal{M}$ alındığından

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B$$

ve

$$y(a) + h(a) = A, \qquad y(b) + h(b) = B$$

şartlarını sağlaması gerekir. Bu şartların sağlanmasından ise (3) şartları alınır. (1) fonksiyonelinin varyasyonu,

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \left[f_y h + f_{y'} h' \right] dx \tag{4}$$

formülü ile hesaplandığını göstermiştik. Bu formülün ikinci toplamında integrali kısmi integrason formülünün uygulanmasıyla aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$\int_a^b f_{y'} h' dx = \int_a^b f_{y'} dh = f_{y'} h(x) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f_{y'} \right) h(x)\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} f_{y'} \right) h(x)\, dx. \tag{5}$$

Bu formülün alınmasında (3) şartları kullanıldı. (5) eşitliğini (4) formülünde dikkate alırsak (2) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] h(x)\, dx.$$

Fonksiyonelin ekstremum noktalarında her bir mümkün, yani (3) şartlarını sağlayan her bir $h(x) \in C^2_{[a,b]}$ fonksiyonu için,

$$\int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] h(x)\, dx = 0 \tag{6}$$

şartını sağlaması gerek şarttır.

Varyasyon hesabının esas lemmasını (6) eşitliğine uyguladığımızda $a \le x \le b$ için,

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{7}$$

denklemini buluruz. Bu denklemdeki x-e göre türevi tam açarsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$f_y - f_{y'x} + f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0. \tag{8}$$

(7) veya (8) denklemlerine (1) fonksiyonelinin $y(a) = A$ ve $y(b) = B$ şartlarında Euler denklemi denir.

Böylece, ele alınan problemin stasionar noktalarını bulmak için, başka deyimle ekstremallarını bulmak için (7) Euler denkleminin

$$y(a)= A,\ y(b)=B \tag{9}$$

şartlarını sağlayan çözümlerini bulmak gerekir.

(7) Euler denklemi için elde ettiğimiz sınır değer problemin genelde çözümü olmayabilir. Çözümü olduğunda ise tek olmayabilir. Gerçekten de, (7) denklemine eşdeğer olan (8) denklemine dikkat ettiğimizde bu denklemin yüksek mertebeli türeve göre lineer olan ikinci mertebeli diferansiyel denklem olduğunu görüyoruz. (7) veya (8) denkleminin integralleri c_1 ve c_2 keyfi sabitlerine bağlı $y = y(x,c_1,c_2)$ integral eğrileri (1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ kümesindeki stasionar noktaları veya ekstremallarıdır. Böylece, (1) fonksiyonelinin ekstremumu yalnız $y = y(x,c_1,c_2)$ ekstremallarında alınabilir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerini seçmekle (9) şartlarını sağlayan ekstremallar seçmek olur. Genelde böyle ekstremalların sayısı birden fazla olabilir. Euler denkleminin (9) şartlarını sağlayan çözümü yok olursa, o zaman (1) fonksiyonelinin ekstremum probleminin $C^2_{[a,b]}$ uzayında çözümü yoktur. Eğer Euler denkleminin (9) sınır şartlarını sağlayan tek çözümü varsa, o zaman bu çözüm ele alınan ekstremum probleminin çözümü olabilir[3].

Örnek 1. Aşağıdaki

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(y')^2 - y^2\right] dx$$

fonksiyonelinin $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelde $f(x,y,y') = (y')^2 - y^2$.

$f_y = -2y$ ve $f_{y'} = 2y'$ olduğundan $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ Euler denklemi $y'' + y = 0$ şeklinde olur. Bu denklemin genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitlerine bağlı $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ şeklinde fonksiyonlar ailesidir. $y(0)=0$ ve $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

sınır şartlarında $c_1=0$ ve $c_2=1$ olduğunu buluruz. Böylece, ele aldığımız fonksiyonelin ekstremum değeri yalnız $y=sinx$ eğrisi üzerinde alınabilir.

Örnek 2.

$$F(y)=\int_0^1 \left(y'^2+12xy\right)dx$$

fonksiyonelinin $y(0)=0$, $y(1)=1$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulunuz.

Çözüm.

Bu fonksiyonelde $f(x,y,y')=y'^2+12xy$ olduğundan $f_y=12x$, $f_{y'}=2y'$,

$$\frac{d}{dx}f_{y'}=2y'' \text{ olur.}$$

Böylece, bu fonksiyonel için $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$ Euler denklemi,

$$y''=6x$$

şeklinde olur. Bu denklemin genel çözümü,

$$y(x)=x^3+c_1x+c_2$$

şeklindedir. Sınır şartlarının sağlanmasından $c_1=c_2=0$ olduğu bulunur. Böylece, bu fonksiyonelin verilmiş sınır şartlarını sağlayan yalnız bir tane $y=x^3$ ekstremalı vardır.

Örnek 3.

$$F(y)=\int_1^2 \left(y'^2-2xy\right)dx$$

fonksiyoneli $y(1)=0$ ve $y(2)=1$ şartlarını sağlayan hangi eğriler üzere ekstremum değer alabilir?

Çözüm. Bu fonksiyonelde $f(x,y,y')=y'^2-2xy$ olduğundan

$$f_y=-2x, \quad f_{y'}=2y' \text{ ve } -\frac{d}{dx}f_{y'}=-2y''.$$

Böylece, bu fonksiyonel için $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$ Euler denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y''=-x$$

Bu denklemin genel çözümü,

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

şeklinde olur.

Sınır şartlarının sağlanmasından c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için aşağıdaki lineer denklemler sistemini buluruz:

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{6}$$

$$2c_1 + c_2 = \frac{2}{6}$$

Bu sistemden $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2=0$ olur. Böylece, fonksiyonel ekstremum değerini yalnız,

$$y = \frac{x}{6}\left(1 - x^2\right)$$

eğrisi üzere alabilir.

Örnek 4.

$$F(y) = \int_1^3 (3x - y)y\,dx$$

fonksiyonelinin $y(1)=1$, $y(3) = 4\frac{1}{2}$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelde $f(x,y,y') = -y^2 + 3xy$ ve $f_y = -2y + 3x$, $f_{y'} = 0$ olduğundan bu fonksiyonelin Euler denklemi $3x-2y=0$ şeklinde olur. Buradan $y(x) = \frac{3}{2}x$ olduğu bulunur. Fonksiyonelin bir tane ekstremalı vardır. Bu ekstremal ise $y(1)=1$ şartını sağlamadığından ele alınan varyasyon probleminin çözümü yoktur.

Örnek 5.

$$F(y) = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right)dx$$

fonksiyonelinin $y(0)=1$, $y(2\pi)=1$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelin Euler denklemi

$$y'' + y = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

formülü ile yazılır. Sınır şartlarını kullanarak C keyfi sabit olmak üzere,

$$y(x) = \cos x + c \sin x$$

fonksiyonunun burada verilen varyasyon probleminin ekstremalları olduğu bulunur. Böylece, bu halde ele alınan varyasyon probleminin sonsuz sayıda ekstremalı vardır.

3.1.2. Euler Denkleminin Mertebesinin İndirgenebilindiği Haller (Euler Denkleminin İntegrallenebilindiği Haller)

Önceki bölümde Euler denkleminin genelde ikinci dereceli diferansiyel denklem olduğunu gördük. İkinci dereceli diferansiyel denklemler genel olarak çok az hallerde açık şekilde integrallenebilinir[1]. Burada Euler denkleminin açık şekilde integrallendiği sade haller ele alınacaktır.

3.1.2.1. İntegral Altı $f(x, y, y')$ Fonksiyonunun y' Değişkenine Bağlı Olmadığı Hal

$f(x,y,y')$ fonksiyonu y' değişkenine bağlı olmadığında, bu fonksiyon $f = f(x,y)$ şeklinde olur. Bu halde ise Euler denklemi

$$f_y(x,y) = 0 \tag{1}$$

şeklinde olur[1]. Bu denklemin çözümü serbest değişen bir parametreye bağlı olmadığından onun her hangi bir $y(x)$ çözümü genelde $y(a)=A$, $y(b)=B$ şartlarını sağlamayabilir. Çok özel hallerde (1) denkleminin çözümü olan y(x) eğrisi (a,A), (b,B) noktalarından geçebilir. Bu halde fonksiyonel bu eğri üzere ekstremal değer alabilir.

Örnek 1.

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)\,dx$$

fonksiyonelinin $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ şartlarını sağlayan ekstremalini bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelin Euler denklemi

$$2x - 2y = 0$$

şeklindedir. Böylece, $y(x) = x$ fonksiyonelin tek ekstremalidir. Bu ekstremal için sınır şartları sağlandığından $y = x$ doğrusu üzere $\int_0^{\pi} y(2x-y)dx$ integralı ekstremum değer alabilir. Ama başka sınır şartlarında, mesela $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ sınır şartlarında $y(x)=x$ ekstremali $(0,0)$ ve $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ noktalarından geçmediğinden ele alınan varyasyon probleminin bu halde çözümü yoktur.

3.1.2.2. İntegral Altı $f(x, y, y')$ Fonksiyonunun y' Değişkenine Lineer Bağlı Olduğu Hal

$f(x,y,y')$ fonksiyonunun y' değişkenine lineer bağlı olduğu hali, yani,

$$f(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)y'$$

şeklinde olduğu hali ele alalım.

Bu halde Euler denklemi aşağıdaki şekilde olur:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{d}{dx}N(x,y) = 0 \ .$$

Bu denklem aşağıdaki şekillerde de yazabilir:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}' - \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}' = 0$$

veya

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \ .$$

Sonuncu denklemden görüyoruz ki, bu halde Euler denklemi, birinci halde olduğu gibi, diferansiyel denklem olmayıp sonlu bir cebirsel denklemdir. $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ denkleminden bulunan eğri, genelde sınır şartlarını sağlamaz. Böylece, bu halde de varyasyon probleminin sürekli fonksiyonlar sınıfında genellikle çözümü olmuyor. Eğer bir D bölgesinde $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ eşitliği sağlanırsa, o zaman $f(x,y,y')dx \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ifadesi tam diferansiyelli ifade olur ve bu halde fonksiyonel

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx=\int_{(a,A)}^{(b,B)} Mdx+Ndy$$

şeklinde yazılır. Bu halde fonksiyonelin değeri integralleme yoluna bağlı olmuyor. Yani $F(y(x))$ fonksiyonelinin değeri (*a*,*A*), (*b*,*B*) noktalarını birleştiren ve D bölgesinde yerleşen tüm sürekli eğriler üzere aynı değer alır. Böylece, bu halde varyasyon problemi anlamını yitirmiş olur.

Örnek 2. Aşağıdaki fonksiyonelin ekstremum problemini inceleyin.

$$F(y)=\int_a^b \left(y^2+2xyy'\right)dx, y(a)=A, y(b)=B.$$

Çözüm. Burada $f(x,y,y'')$ fonksiyonu y' değişkenine lineer olarak bağlıdır. Bu halde,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

ve böylece, $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y-2y=0$ olduğundan integral altındaki

$\left(y^2+2xy\frac{dy}{dx}\right)dx$ ifadesi tam diferansiyelli ifadeye dönüşür.

$$\left(y^2+2xy\frac{dy}{dx}\right)dx=y^2dx+2xydy$$

Bu yüzden fonksiyoneldeki integral integralleme yoluna bağlı değildir.

$$F(y)=\int_a^b \left(y^2dx+2xydy\right)=\int_{(a,A)}^{(b,B)} d\left(xy^2\right)=xy^2\Big|_a^b=bB^2-aA^2.$$

Sonuncu eşitliklerden görüyoruz ki, (*a*,*A*), (*b*,*B*) noktalarından geçen her bir eğri üzere fonksiyonelin değeri aynı olup bB^2-aA^2 sayısına eşit olur. Buna göre de bu ekstremum probleminin hiçbir anlamı yoktur.

3.1.2.3. Fonksiyonelde İntegral Altındaki $f(x,y,y')$ Fonksiyonunun Yalnız y' Değişkenine Bağlı Olduğu Hal

Bu halde $F(y)=\int_a^b f(y')dx$ şeklindeki fonksiyoneller ele alınır. Bu şekilli fonksiyoneller için Euler denklemi

$$\frac{d}{dx}f_{y'}(y')=0$$

veya

$$f_{y'y'}(y').y''=0 \qquad (2)$$

şeklinde olur. (2) Euler denkleminden $y''=0$ veya $f_{y'y'}(y')=0$ denklemleri bulunur. $y''=0$ denkleminden ekstremallar için iki c_1 ve c_2 parametrelerine bağlı $y(x)=c_1x+c_2$ doğrular ailesi bulunur[4].

$f_{y'y'}(y')=0$ denkleminin ise bir veya birkaç $y'=k_i$ çözümleri olabilir. Burada k_i sabit, belli sayılardır. Bu sonuncu denklem bir dereceli adi türevli lineer diferansiyel denklem olduğundan onun çözümü de bir c parametresine bağlı $y(x)=k_ix+c$ doğrular ailesidir. Elde ettiğimiz bu doğrular ailesi üstte elde ettiğimiz doğrular ailesine dâhildir. Böylece, $f=f(y')$ halinde fonksiyonelin ekstremalları iki parametreli $y(x)=c_1x+c_2$ şekilli doğrulardır.

Örnek 3. Eğrinin uzunluğunu ifade eden

$$F(y)=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

fonksiyonelinin ekstremalları $y = c_1x+ c_2$ doğrular ailesidir.

Örnek 4. Maddi noktanın $A(a, y_a)$ noktasından $B(b,y_b)$ noktasına $y(x)=y$ eğrisi üzere hareket ettiğini varsayalım. Noktanın hareket hızının yalnız $y'(x)$-e bağlı olduğunu farz edelim, yani $\frac{ds}{dt}=r(y')$ olsun. Burada $s(t)$ maddenin gittiği yol, t ise bu yolu gitmeye sarf olunan zamandır. Özel halde ds yolunu gitmek için sarf olunan zaman $dt=\frac{ds}{r(y')}$ olur. Ama $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ olduğundan,

$$dt=\frac{ds}{r(y')}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{r(y')}dx$$

formülü bulunur. Buna göre de, maddi nokta $A(a,y_a)$ noktasından $B(b,y_b)$ noktasına $y(x)$ eğrisi üzere hareket ettiğinde sarf olunan T zamanı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$T(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{r(y')}dx.$$

Bu fonksiyonelde de integral altındaki fonksiyon yalnız y' değişkenine bağlı olduğundan bu fonksiyonelin ekstremalları da yalnız doğrular oluyor.

Örnek 5.

$$F(y)=\int_0^1 y'^2 dt \to extr$$

probleminin $y(0)=1$, $y(1)=0$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulunuz.

Çözüm. Bu problemin ekstremalinin $y_0(t)=-t+1$ olduğu açıktır. Bu ekstremal ele aldığımız fonksiyonele $C^1_{[0,1]}$ uzayının $\mathcal{M}=\left\{y\in C^1_{[0,1]} : y(0)=1, y(1)=0\right\}$ afin manifoldunda mutlak minimum verir. Gerçektende, $h(0)=0$ ve $h(1)=0$ şartlarını sağlayan her bir $h\in C^1_{[0,1]}$ fonksiyonu için,

$$\Delta F(y_0,h)=F(y_0+h)-F(y_0)=\int_0^1\left(2y_0'h'+h'^2\right)dt=\int_0^1 h'^2(t)dt\geq 0$$

Buradan da $y_0=-t+1$ ekstremalinin fonksiyonele mutlak minimum değer verdiği görülür.

3.1.2.4. İntegral Altındaki Fonksiyon Yalnız x ve y' Değişkenlerine Bağlı Olduğu Hal (y-Değişkenine Bağlı Olmayan Hal)

$$f(x,y,y')\equiv f(x,y').$$

Bu halde $f_y\equiv 0$ olduğundan Euler denklemi aşağıdaki

$$\frac{d}{dx}f_{y'}(x,y')=0 \tag{3}$$

şeklinde olur. Bu denklemin her yanını x değişkenine göre integrallersek aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$f_{y'}(x,y')=c.$$

Burada c keyfi sabit sayıdır[4].

Böylece, Euler denklemi bir dereceli diferansiyel denklem şekline salınmış olur.

Örnek 6. $F(y)=\int_0^1 x^2 y'^2 dx$ fonksiyonelinin $y(0)=0$, $y(1)=1$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Bu problem için Euler denklemi,

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2 y'\right)=0$$

şeklinde olduğundan, fonksiyonelin ekstremallar ailesi

$$y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2$$

şeklinde olur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir. Bu ekstremallar $y(0)=0$ şartını sağlamadığından bu varyasyon probleminin ekstremalı yoktur.

Örnek 7. $F(y)=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}} y'^2(x)dx$ fonksiyonelinin $y(0)=0$, $y(1)=1$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelin Euler denklemi

$$\frac{d}{dt}\left(2x^{\frac{2}{3}}y'\right)=0$$

şeklindedir. Bu denklemin genel çözümü ise $y(x)=c_1x^{\frac{1}{3}}+c_2$ şeklindedir. Sınır şartlarını sağlayan tek ekstremsal $y_0(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ekstremalıdır. Bu ekstremal için,

$$F(y_0+h)=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+h'(x)\right)^2 dx=F(y_0)+\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}h'^2(x)dx\geq F(y_0)$$

olduğundan $y_0(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ekstremalın fonksiyonele mutlak minimum verdiği görülür. Ama dikkate almak gerekir ki, $y_0(x)=x^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonu $C^1_{[0,1]}$ uzayına dâhil değildir.

Örnek 8. Maddi noktanın $A(a,y_a)$ noktasından $B(b,y_b)$ noktasına bu noktalardan geçen $y(x)$ eğrisi üzere hareketinde hareket hızı $r = x$, yani $\frac{ds}{dt} = 0$ formülü ile verildiğini varsayalım. Bu halde A noktasından B noktasına $y(x)$ eğrisi üzere gösterilen hızla maddi nokta hareket ettiğinde sarf olunan $T(y)$ zamanı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\, dx .$$

Bu fonksiyonel için Euler denklemi,

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

şeklinde olur. Buradan ise,

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

olduğu bulunur. Burada c_1 keyfi sabittir. Sonuncu denklemi çözmek için $y' = tgt$ parametresini dâhil edersek,

$$x = \frac{1}{c}\frac{y'}{v_1 + y'^2} = \frac{1}{c_1} sin\, t .$$

Burada $\frac{1}{c_1} = c$ gibi gösterilmiştir. O zaman,

$$x = c\, sin\, t$$

olur. Diğer yandan,

$$\frac{dy}{dx} = tgt$$

olduğundan buluruz,

$$dy = tgt\, dx = c.tgt.cos\, t\, dt = c\, sin\, dt .$$

Buradan ise,

$$y(t) = -c\, cos\, t + c_0$$

olduğu bulunur. Böylece,

$$x = c\,sin\,t$$

$$y - c_0 = -c\,cos\,t$$

parametrik denkleminden t parametresini yok edersek,

$$x^2 + (y - c_0)^2 = c^2$$

buluruz. Burada c_0, c keyfi sabitler olup, bu denklem merkezi $(0,c_0)$ noktalarında, yani ordinat ekseni üzerindeki noktalarda olan $r=c$ yarıçaplı çemberler ailesinin denklemleridir.

3.1.2.5. İntegral Altı Fonksiyonun Yalnız y ve y' Değişkenlerine Bağlı Olduğu Hal

$$f = f(y,y')$$

Bu halde Euler denklemi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

aşağıdaki şekilde olur.

$$f_y - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0.$$

(4)

Bu denklemi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left(f - y'f_{y'}\right) = 0.$$

Buradan ise ekstremallar için aşağıdaki denklemi buluruz[2].

$$f - y'f_{y'} = c.$$

Sonuncu denklemin sağ yanındaki c keyfi sabit sayıdır.

Örnek 9. Dönme yüzeyinin alanını ifade eden aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım

$$S[\,y\,] = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Bu fonksiyonelde

$$f = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$$

olup, yalnız y ve y' değişkenine bağlıdır. Bu fonksiyonelin Euler denkleminin yardımıyla elde edilen ekstremallar denklemi,

$$f - y'f_{y'} = c$$

denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 .$$

Burada c_1 keyfi sabit sayıdır. Burada da sadeleştirmeler yaparak

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

buluruz. Bu denklemi çözmek için $y' = sht$ şeklinde parametre dâhil edilirse,

$$y = c_1 cht$$

olur. $dx = \dfrac{dy}{y'}$ olduğundan ise,

$$dx = \frac{c_1 sht\, dt}{sht} = c_1 dt; \qquad x=c_1t + c_2 \ .$$

Böylece, eğrinin parametrik denklemi,

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 t + c_2 , \\ y &= c_1 cht \end{aligned}\right\}$$

şeklinde alınır. Bu denklemden t parametresini yok etsek buluruz.

$$y(x) = c_1 ch\frac{x - c_2}{c_1} .$$

Bu denklem zincir eğriler ailesinin denklemidir. Bu eğrilerin dönmesinden elde edilen yüzey Katenoid adını alır. Buradaki c_1 ve c_2 keyfi sabit sayılar eğrinin sınır şartlarının sağlanmasından seçilebilir. Bu eğrilerin dönmesinden elde edilen yüzey minimal alanlı olur. Düzlemde $A(a,y_a)$ ve $B(b,y_b)$ noktalarının verilmesine bağlı olarak problemin bir, iki veya hiçbir çözümü olmayabilir.

Örnek 10. Brahistohron hakkında problemi ele alalım. Brahistohron hakkında problem adlanan problem Iohan Bernoulli tarafından 1696 yılında Acta Eruditorum dergisinde yayınlanmıştır[1]. Bu tarihi adeta varyasyon hesabının gelişiminin başlangıcı olarak alırlar. Bu problemde dik xoy düzleminde yerleşen, bir dik doğru üzerinde olmayan *A* ve *B* noktalarını birleştiren öyle *y* eğrisinin bulunması istenir ki, maddi nokta sürtünme ve ortamın mukavemeti dikkate alınmadan bu eğri üzere yuvarlanarak ağırlık kuvvetinin etkisi altında *A* noktasından *B* noktasına en kısa zaman süresinde ulaşsın. Burada ox ekseni yatay, oy ekseni ise dik olmakla aşağı yöneltilir. A noktası ise koordinat başlangıcında alınır.

Maddi noktanın kendi ağırlık kuvveti etkisiyle hareketindeki hız,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formülde g sabiti serbest düşme ivmesidir. Bu formülün yardımıyla maddi noktanın $A(0,0)$ noktasından $B(b,y_b)$ noktasına $y(x)$ eğrisi üzere hareketinde sarf olunan zaman aşağıdaki formülle bulunur[2]:

$$T(y) =)\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,$$

$$y(0) = 0,\ y(b) = y_b,\ b > 0.$$

Bu fonksiyonelde $f(x,y,y')$ fonksiyonu yalnız y ve y' değişkenlerine bağlı olup, x değişkenine açık şekilde bağlı değildir. Buna göre de bu hal için Euler denkleminin birinci integrali vardır. Euler denkleminin birinci integrali,

$$f - y'f_{y'} = c$$

şeklinde yazılır. Böylece, ele aldığımız fonksiyonel için Euler denkleminin birinci integrali uygun olarak,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

şeklinde olur. Bu denklemde sadeleştirmeler yaparak

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

veya

$$y(1+y'^2) = c_1$$

buluruz. Burada c_1 keyfi sabit sayıdır. Sonuncu diferansiyel denklemi çözmek için

$y' = ctgt$ almakla t parametresi dâhil edelim. O zaman

$$y = \frac{c_1}{1+ctg^2 t} = c_1 \sin^2 t = \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 \sin t \cos t \, dt}{ctgt} = 2c_1 \sin^2 t \, dt = c_1(1 - \cos 2t)dt$$

ve

$$x = c_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + c_2 = \frac{c_1}{2}(2t - \sin 2t) + c_2.$$

Böylece, aranan eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\left.\begin{aligned} x - c_2 &= \frac{c_1}{2}(2t - \sin 2t), \\ y &= \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2t). \end{aligned}\right\}$$

Bu denklemde $2t = \theta$ alalım. $x=0$ olduğunda $y=0$ şartının sağlanması gerektiğinden, $c_2=0$ olduğunu da dikkate alırsak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta),$$
$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) \; .$$

Bu alınan denklemler sikloidler ailesinin parametrik denklemleridir. Burada $\frac{c_1}{2}$ sabit yuvarlanan çemberin yarıçapını gösterir. Bu yarıçap eğrinin $B(b,y_b)$ noktasından geçmesi şartından bulunur. Böylece, Brahistohron sikloida olduğu bulunur[3].

3. 2. n Sayıda Fonksiyona Bağlı Fonksiyoneller

Birçok pratik problemlerin çözümünde sonlu sayıda $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonlarına bağlı

$$F(y_1, y_2 \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx \qquad (1)$$

şeklinde fonksiyonellerle karşılaşılır. Bu fonksiyonel $C^1_{n[a,b]}$ uzayında tanımlanmış integral şeklinde fonksiyoneldir. Hatırlatalım ki, $C^1_{n[a,b]}$ uzayı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve sürekli diferansiyellenebilir (kendisi ve birinci mertebeden türevi $[a,b]$ aralığında sürekli olan)

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

şeklinde vektör – fonksiyonlardır. $C^1_{n[a,b]}$ uzayında norm

$$\|y\| = \max_{a \le x \le b} \left\{ |y_1(x)|, \ldots, |y_n(x)|, |y_1'(x)|, \ldots, |y_n'(x)| \right\}$$ veya

$$\|y\| = \max \left\{ \max_{a \le x \le b} |y_1(x)|, \ldots, \max_{a \le x \le b} |y_n'(x)| \right\}$$

formülü ile tanımlanır[2].

3.2.1. Varyasyonun Hesaplanması

$C^1_{n[a,b]}$ uzayında verilmiş (1) fonksiyonelinin birinci varyasyonunu yöne göre diferansiyelleme yöntemiyle hesaplayalım. Bunun için (1) fonksiyonelinde integral altındaki $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$ fonksiyonunun tüm argümentlerine nazaran ikinci mertebeye kadar (ikinci mertebede dâhil olmakla) kısmi türevleri var ve sürekli olduklarını varsayalım. Bu şartlar sağlandığında (1) fonksiyoneli $C^1_{n[a,b]}$ uzayında diferansiyellenebilirdir. Bu fonksiyonelin varyasyonunu aşağıdaki yöntemle hesaplayalım:

$$\delta F(y,h) = \frac{d}{dt} F(y+th)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y+th, y'+th')\,dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y_1+th_1, \ldots, y_n+th_n, y_1'+th_1', \ldots, y_n'+th_n')\,dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[f_{y_1}(x, y+th, y'+th')h_1 + \ldots + f_{y_n'}(x, y+th, y'+th')h_n \right] dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[f_{y_1}h_1 + \ldots + f_{y_n}h_n + f_{y_1'}h_1' + \ldots + f_{y_n'}h_n' \right] dx\,.$$

(2)

Burada h yer değişme vektörü olup $h(x)=(h_1(x),\ldots,h_n(x))$ eşitliği ile tanımlanır ve $h\in C^1_{n[a,b]}$.

3.2.2. Euler Denklemi (Ve Bir Özel Hal)

(1) fonksiyonelinin

$$\left.\begin{array}{l} y_1(a)=A_1, y_2(a)=A_2,\ldots,y_n(a)=A_n \\ y_1(b)=B_1, y_2(b)=B_2,\ldots,y_n(b)=B_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

şartlarını sağlayan ekstremum problemi için gerek şartı bulalım.

Genel teoreme esasen $h(a)=0,\ h(b)=0$ şartlarını sağlayan her bir $h\in C^1_{n[a,b]}$ için ekstremal y noktasında $F(y)$ fonksiyonelinin $\delta F(y,h)$ varyasyonu sıfıra eşittir. (1) fonksiyonelinin (3) şartını sağlayan ekstremum probleminin Euler denklemini yazmak için yalnız $y_j(x)$ değişkenine artış verelim. Yani, $y_1(x),\ldots,y_{j-1}(x),y_{j+1}(x),\ldots,y_n(x)$ değişkenlerini fonksiyonelde değişmez sağlayalım. Ama $y_j(x)$ değişkenini $y_j(x)+h_j(x)$ değişkeni ile değiştirelim. Burada $h_j(x)$ fonksiyonu $h_j(a)=h_j(b)=0$ şartını sağlıyor. Bu durumda $F(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j,y_{j+1},\ldots,y_n)$ fonksiyoneli yalnız $y_j(x)$ fonksiyonuna bağlı fonksiyonele dönüşür:

$$\tilde{F}(y_j)=F(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j,y_{j+1},\ldots,y_n) \qquad (4)$$

Bu yaklaşımla ekstremum problemi $\tilde{F}(y_j)$ fonksiyonelinin $y_j(a)=A_j$, $y_j(b)=B_j$ şartlarını sağlayan ekstremum probleminin incelenmesi problemine getirilmiş olur.

Ama $\tilde{F}(y_j)$ fonksiyoneline $y_j(a)=A_j$, $y_j(b)=B_j$ şartlarında ekstremum değer veren $y_j(x)$ ekstremali aşağıdaki Euler denkleminin:

$$f_{y_j}-\frac{d}{dx}f_{y_j'}=0$$

$$y_j(a)=A_j\ ,\ y_j(b)=B_j$$

şartlarını sağlayan çözümü olması gerekmektedir.

Burada $y_j(x)$ fonksiyonunda j indisi F değerleri alabilmekle keyfi alındığından üstte yazılmış Euler denklemi her bir $y_1(x),\dots,y_n(x)$ fonksiyonları için yazılmış olur. Buna göre de (1) fonksiyonelinin (3) şartlarını sağlayan ekstremalları aşağıdaki ikinci dereceli adi türevli

$$f_{y_j} - \frac{d}{dx} f_{y_j'} = 0 \quad , \quad j=1,2,...,n \tag{5}$$

Euler denklemler sisteminin

$$y_j(a) = A_j \ , \ y_j(b) = B_j \quad , \quad j=1,2,...,n \tag{6}$$

sınır değer şartlarını sağlayan çözümleridir.

Bazen Euler denklemler sistemini açık şekilde yazmak daha faydalı olur. Bunun için

$$\frac{d}{dx} f_{y_j'} = f_{y_{jx}'} + \sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k} y_k' + \sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k'} y_k''$$

açılımından istifade edilebilir.

Örnek 1.

$$F(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 + z'^2 + 2yz\right) dx$$

fonksiyonelinin

$$y(0) = 0 \ , y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$z(0) = 0 \ , z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm: Bu fonksiyonel için Euler denklemler sistemi aşağıdaki şekilde alınır:

$$y'' - z = 0,$$

$$z'' - y = 0.$$

Burada $z = y''$ şeklinde alıp ikinci denklemde yerine yazarsak y fonksiyonunu bulmak için;

$$y^{(iv)} - y = 0$$

denklemini buluruz. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$k^4 - 1 = 0$$

ve kökleri

$$k_1 = 1 \quad , \quad k_2 = -1 \quad , \quad k_3 = i \quad , \quad k_4 = -i$$

olduğundan $y^{(iv)} - y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri e^x, e^{-x}, $cosx$ ve $sinx$ olur. Genel çözüm

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

şeklinde yazılır. $z(x) = y''(x)$ olduğundan

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

genel çözümü bulunur. Sınır şartlarından $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 1$ olduğuna göre

$$y(x) = \sin x \ , \ z(x) = -\sin x$$

ekstremalı bulunur.

Özel Hal.

Euler diferansiyel denklemler sisteminin genel çözümü çok az halde, açık şekilde yazılır. Bu yüzdende çok az-az hallerde ekstremaller açık şekilde bulunurlar. Ama (1) fonksiyonelinde integral altındaki fonksiyon x değişkenine açık şekilde bağlı olmadığından, yani; $f(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ şeklinde olduğunda (1) fonksiyonelinin Euler diferansiyel denklemler sisteminin mertebesi azaltılabilir. Gerçektende,

$$f_{y'x} \equiv 0$$

olduğundan Euler denklemler sistemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f_{y_i} - \sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k} . y_k' - \sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k'} . y_k'' = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Bu denklemin her yanını y_j' değişkeni ile çarpıp j indisine göre 1'den n'e kadar taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{y_j} y_j' - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k} y_k' y_j' - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{y_j' y_k'} y_k'' y_j' = 0 .$$

Bu denklemin sol yanı

$$f\left(y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\right) - \sum_{j=1}^{n} y_j' f_{y_j'}$$

ifadesinin x değişkenine göre tam diferansiyelidir. Buna göre de

$$\frac{d}{dx}\left\{ f\left(y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\right) - \sum_{j=1}^{n} y_j' f_{y_j'} \right\} = 0$$

yazılır. Bu denklemin her yanını x'e göre integrallersek Euler denklemler sisteminin bu özel hal için birinci integrali bulunur:

$$f\left(y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\right) - \sum_{j=1}^{n} y_j' f_{y_j'} = c,$$

burada c keyfi sabit sayıdır. Bu eşitliğin sol yanına bulunmuş ekstremallar yazıldığında c sabiti için belli uygun değerler bulunur.

Örnek 2.

$$F(y,z) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

fonksiyonelinin Euler denklemler sistemini yazınız.

Çözüm. Bu fonksiyonelin Euler diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y^3}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2+z'^2)}} = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{y(1+y'^2+z'^2)}} = 0 \ .$$

yukarıda gösterilen ilk eşitliğe göre

$$f-y^{'}f_{y^{'}}-z^{'}f_{z^{'}}\equiv\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+y^{'2}+z^{'2}}}=c_1$$

eşitliğini buluruz. Üstteki ikinci denklemden ise,

$$\frac{z^{'}}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+y^{'2}+z^{'2}}}=c_2$$

eşitliğini buluruz. Bu denklemlerde c_1 ve c_2 sabit sayılardır. Bu iki denklemden

$$z^{'}=\frac{c_2}{c_1}=k$$

ve böylece , $z(x)=kx+c_0$ olduğu bulunur. Burada c_0 integralleme sabitidir. Sonuncu, elde ettiğimiz denklemlerin birincisinde $z^{'2}=k^2$ eşitliğini dikkate alırsak $y(x)$ ekstremalı için aşağıdaki diferansiyel denklem bulunur:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+k^2+y^{'2}}}=c_1.$$

Bu denklemden

$$y^{'2}=\frac{1}{c_1^2y}-\left(k^2+1\right)$$

veya

$$y^{'2}=\left(k^2+1\right)\left(\frac{1}{c^2y}-1\right)$$

olduğu bulunur. Burada $c=\left(k^2+1\right)c_1^2$, sonuncu denklemi değişkenlerine ayırarak buluruz:

$$dx=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\frac{dy}{\pm\sqrt{\frac{1}{c^2y}-1}}.$$

Bu denklemi integrallersek

$$x - c_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1}}$$

buluruz. Burada c_3 yeni bir integralleme sabitidir. Son eşitlikte $\frac{1}{c^2} = m$ yazılırsa ve

$$y = m\tau \ , \ \tau = sin^2 \frac{\theta}{2}$$

değişkenlerini kullanırsak:

$$x - c_3 = \pm \frac{m}{\sqrt{k^2 + 1}} \int \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} d\tau =$$

$$= \pm \frac{m}{2\sqrt{1 + k^2}} \int (1 - cos\theta) d\theta$$

buradan ise aşağıdaki şekilde parametrik çözüm bulunur:

$$x - c_3 = \pm \frac{m}{2\sqrt{K^2 + 1}} (\theta - sin\theta) ,$$

$$y = m sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m}{2} (1 - cos\theta).$$

Bu denklem, yukarıdaki parametrik eşitliklerle verilen eğri sikloid eğrisidir. Bu eğri $z = kx + c_0$ düzleminde bulunur.

Örnek 3.

$$F(y,z) = \int_1^2 \left(y'^2 + z^2 + z'^2 \right) dx$$

fonksiyonelinin

$$y(1) = 1 \ , \ y(2) = 2 \ , \ z(1) = 0 \ , \ z(2) = 1$$

şartlarını sağlayan ekstremallerini bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonel için Euler diferansiyel denklemler sistemi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0\,,$$

$$f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0$$

aşağıdaki

$$y'' = 0\,,$$

$$z - z'' = 0\,,$$

şeklinde alınır. Bu sistemi çözdüğümüz zaman buluruz:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \quad , \quad z(x) = c_3 e^x + c_4 e^{-x}\,.$$

Sınır şartlarının sağlanmasından

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = \frac{1}{e^2 - 1} \quad , \quad c_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1}\,,$$

böylece aranan ekstremal

$$y = x$$

$$z = \frac{sh(x-1)}{sh1}$$

şeklinde bulunur.

3.2.3. Hamilton Prensibi. Lagrange Denklemi

Varyasyon hesabında elde edilen Euler diferansiyel denklemler sistemi uygulamalı matematiğin birçok dallarında, özellikle de maddi noktanın dinamiğinde çok önemli rol oynamaktadır[2].

Mesela, sonlu sayıda maddesel noktalardan (kütlesi olan parçacıklardan) oluşan mekanik sistemin hareketi (zamana göre durumu) Hamilton integrali olarak adlandırılan integralle verilen (tanımlanan) bir fonksiyonelin ekstremum şartı ile belirlenebilir. Bunu kısaca açıklayalım:

Mekanik sistemin durumu n sayıda bağımsız $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (genelleştirilmiş) koordinatlarla bir değerli olarak belirlendiğinde bu sistemin n sayıda serbestlik derecesi vardır denir. Mesela, sistemin bir maddesel noktadan (bir parçacıktan) oluştuğunda bu sistemin q_1, q_2, q_3 genelleşmiş koordinatları olarak noktanın kartezyen veya küresel koordinatları alınabilir. Bu koordinatlarla bir parçacıklı sistem bir değerli olarak belirlendiğinden bir parçacıktan oluşan sistemin serbestlik derecesi $n=3$ olur. Sistem iki tane, birbiriyle uzunluğu $\ell = 1$ olan, kütlesiz sert bağla bağlanmış parçacıklardan oluştuğunda q_i genelleşmiş koordinatlar olarak parçacığın birinin üç kartezyen koordinatları ve iki tanede parçacıkları birleştiren doğrunun yönü alınırsa, bu iki parçacıklı sistemin durumu bu tür seçilmiş, genelleştirilmiş koordinatlarla tam belirlenir. Buna göre de bu iki parçacıklı sistemin serbestlik derecesi $n=5$ olur[1].

Genel olarak dinamik sistem bu sistemin kinetik enerji ve potansiyel enerji fonksiyonlarıyla tam olarak verilir. Sistem zamana bağlı olarak hareket ettiğinde, sistemin durumunu bir değerli olarak belirleyen q_i genelleşmiş koordinatları t zamanının $q_i(t)$ fonksiyonları olur. Bu durumda $\dfrac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$ "genelleşmiş" hızlar olur. Bu halde

$$T = T(q_1, q_2, \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \dot{q}_i a_{ij} \dot{q}_j \tag{1}$$

şeklinde öyle $T = T(q_1, \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n)$ fonksiyonu bulunur ki, bu fonksiyon sistemin kinetik enerjisini ifade eder. Bu fonksiyonda $a_{ij} = a_{ji}$ olmasıyla bu katsayılar t değişkenine açık şekilde bağlı olmayıp $q_1, q_2, \ldots, q_n$ koordinatlarının fonksiyonları olur. (1) fonksiyonu aşağıdaki yöntemle elde edilebilir.

Sistemin maddesel noktalarının kartezyen koordinatlarının, sistemin genelleştirilmiş $q_1, q_2, \ldots, q_n$ koordinatlarıyla ifade edildiğini varsayalım. O zaman

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \ldots q_n), \\ y_k &= y_k(q_1, \ldots q_n), \\ z_k &= z_k(q_1, \ldots q_n), \end{aligned}\right\} \qquad k = 1, 2, \ldots, m \ .$$

Maddesel noktaların hızlarının kartezyen koordinatları genelleşmiş $\dot{q}_i$ hızlarının lineer homojen fonksiyonları şeklinde ifade edilebilir:

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \ , \ \dot{y}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \ , \quad \dot{z}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \ . \tag{2}$$

Parçacıkların kütlelerinin onların uygun hızlarının karesine çarpımının yarısının toplamı sistemin kartezyen koordinatlardaki kinetik enerjisini ifade eder :

$$T = \sum_{K=1}^{m} \frac{m_K}{2} \left(\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2 + \dot{z}_K^2 \right) . \tag{3}$$

(2) eşitliklerini (3) eşitliğinde dikkate alırsak T kinetik enerjisinin (1) formülü ile verilen ifadesini buluruz.

Dinamik sistem kinetik enerji fonksiyonundan başka $U = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ potansiyel enerji fonksiyonu ile de karakterize olunur. Sistemin potansiyel enerji fonksiyonu yalnız genelleşmiş $q_1, \dots, q_n$ koordinatlara bağlı olup açık şekilde t zaman değişkenine bağlı değildir.

Dinamik sistem teorisinde, potansiyel enerjinin sisteme etki eden dış kuvvetleri belirlediği gösterilir. Kütleleri $m_1, m_2, \dots, m_m$ olan maddesel noktalar sisteminin verildiğini varsayalım. k numaralı parçacığın kartezyen koordinatları x_k, y_k, z_k olsun. Bu sistemin dinamik hareketi Newton denklemler sistemi ile verilir:

$$m_k \ddot{x}_k = f_{kx}, \quad m_k \ddot{y}_k = f_{ky}, \quad m_k \ddot{z}_k = f_{kz}. \tag{4}$$

Burada f_{kx}, f_{ky}, f_{kz} k numaralı maddesel noktaya etki eden f_k kuvvetinin koordinatlarıdır.

f_k kuvvetlerinin potansiyel fonksiyonuna sahip olduklarını varsayalım.

Yani öyle bir;

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_m, y_m, z_m)$$

fonksiyonu var ki,

$$f_{kx} = -\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad f_{ky} = -\frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad f_{kz} = -\frac{\partial U}{\partial z_k}, \quad k=1,2,\dots,m.$$

f_k , $k=1,2,\dots,m$ kuvvetlerinin potansiyel U fonksiyonunun var olması $dx_1, dy_1, dz_1, \dots, dx_m, dy_m, dz_m$ yer değiştirmelerinde sisteme etki eden kuvvetlerin yaptığı işi hesaplamaya imkân verir:

$$-dU = \sum_{k=1}^{m} \left(f_{kx} dx_k + f_{ky} dy_k + f_{kz} dz_k \right) = -\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right).$$

Böylece, sistemin bir durundan diğer duruma geçişinde görülen iş sistemin başlangıç durumundan son duruma geçiş yoluna bağlı olmayıp U potansiyel enerjisinin uygun durumlardaki değerleri farkına eşit olur.

Sistemin potansiyel enerji fonksiyonu $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_m, y_m, z_m)$ fonksiyonunda $x_k = x_k(q_1, \dots, q_n)$, $y_k = y_k(q_1, \dots, q_n)$, $z_k = z_k(q_1, \dots, q_n)$ dönüşümleri dikkate alınırsa, o zaman U fonksiyonunun,

$$U = U(q_1,\dots,q_n)$$

ifadesi bulunur.

Dinamik sistemin verilmiş başlangıç durumundan verilmiş son duruma $t_0 \le t \le t_1$ zaman aralığındaki reel geçişi öyle yapılır ki, bu harekette

$$H(q_1,..,q_n) = \int_{t_0}^{t_1} (T-U)dt \tag{5}$$

Hamilton fonksiyoneli ekstremum değer alır. Burada ifade edilen bu prensibe Hamilton prensibi denir. Hamilton prensibi dinamiğin esas prensibidir. Dinamiğin birçok kanunları bu prensipten alınır. Hamilton fonksiyonelinin ekstremumu için gerekli şartı yazdığımızda Euler denkleminden sistemin hareketinin Lagrange denklemi elde edilir[1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{6}$$

Lagrange denklemleri analitik dinamiğin esas denklemleridir.

Lagrange denklemlerinden enerjinin sağlanması kanunu elde edilir. Gerçektende, Hamilton fonksiyonelinde integral altındaki fonksiyon $L = T - U$ fonksiyonu açık şekilde serbest t değişkenine bağlı değildir. $L = T - U$ fonksiyonuna Lagrange fonksiyonu denir. Bu yüzden Hamilton fonksiyonelinin Euler denklemler sisteminin bir integrali aşağıdaki şekilde olur:

$$T - U - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} = C \ . \tag{7}$$

Bu ifadede U fonksiyonu $\dot{q}_i$ değişkenlerine bağlı olmadığından ve T fonksiyonu ise $\dot{q}_i$ değişkeninin karesine homojen bağlı olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

olur. Bunu (7) denkleminde yerine yazarsak

$$T + U = const.$$

Böylece, maddesel noktalar sistemin tam enerjisi (kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamı) zamana bağlı olarak değişmez.

Örnek. Kinetik enerjisi $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ve potansiyel enerjisi $U(x)$ olan m kütleli bir parçacıktan oluşan sistemi ele alalım. Bu parçacığa etki eden kuvvet

$$f(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

formülü ile hesaplanır. (6) denklemine uygun olarak bu sistemin hareketinin Lagrange denklemini yazalım:

$$\frac{d}{dx}\left(m\dot{x}\right) - \frac{\partial(-U)}{\partial x} = m\ddot{x} - f(x) = 0 .$$

Bu denklem m kütleli parçacığın hareketinin Newton denklemidir.

3.3. Yüksek Mertebeli Türevlere Bağlı Fonksiyoneller

$$F(y) = \int_a^b f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx \tag{1}$$

Yukarıdaki şekilli fonksiyonelleri ele alalım. Bu fonksiyonellerde integral altındaki $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ fonksiyonunun tüm argümentlerine göre birinci mertebeden kısmi türevlerinin var ve sürekli olduklarını varsayalım. Bu halde (1) şeklindeki fonksiyoneller $a \le x \le b$ aralığında tanımlanmış n-ci mertebeden tüm türevleri (n-ci mertebede dâhil) sürekli fonksiyonlar olan $y = y(x)$ fonksiyonları kümesinde tanımlanmış olur. Bu kümede $y(x)$ fonksiyonunun normu

$$\|y\| = max\left\{ \max_{a \le x \le b} |y(x)|, \max_{a \le x \le b} |y'(x)|, \ldots, \max_{a \le x \le b} |y^{(n)}(x)| \right\}$$

formülü ile tanımlanır. Elde edilen bu lineer normlu uzay $C^n_{[a,b]}$ gibi gösterilir. Fonksiyonelin varyasyonunun

$$\delta F(x, y) = \frac{d}{dt} F(y + th)\Big|_{t=0}$$

formülünü kullanarak (1) fonksiyonelinin varyasyonunu hesaplayalım:

$$\delta F(y, h) = \frac{d}{dt} \int_a^b f\left(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x), \ldots, y^{(n)}(x) + th^{(n)}(x)\right) dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \left[f_y' \left(x, y+th, \dots, y^{(n)} + th^{(n)}\right) h(x), \dots, f_{y^{(n)}}' \left(x, y+th, \dots, y^{(n)} + th^{(n)}\right) h^{(n)}(x) \right] dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_{y^{(k)}} \left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) h^{(k)}(x)\, dx\,.$$

Böylece, (1) fonksiyonelinin varyasyonu için aşağıdaki formül elde edilir:

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \left(f_y h + f_{y'} h' + \dots + f_{y^{(n)}} h^{(n)} \right) dx\,. \tag{2}$$

(1) fonksiyonelinde $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$ fonksiyonunun tüm argümentlerine nazaran $n+2$ mertebeye kadar ($n+2$ de dâhil olmak üzere) tüm kısmi türevleri var ve sürekli olduklarını varsayalım. $y = y(x)$ fonksiyonu ise $C_{[a,b]}$ uzayına dâhil olan fonksiyon olsun. Bu şartlar sağlandığında (1) fonksiyonelinin

$$\left. \begin{array}{l} y(a) = A_0 \;, y'(a) = A_1 \;, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1} \\ y(b) = B_0 \;, y'(b) = B_1 \;, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1} \end{array} \right\} \tag{3}$$

şartlarını sağlayan ekstremalları için gerekli şartı bulalım. Bu (3) şatlarındaki $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ parametreleri önceden verilmiş sabit sayılardır. (1) fonksiyonelinin (3) şartlarını sağlayan ekstremallerinin aşağıdaki

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0 \tag{4}$$

Euler diferansiyel denkleminin (3) şartlarını sağlayan çözümleri olduklarını gösterilebilir.

Bunu göstermek için (2) formülündeki toplamın integralini ayrı ayrı integrallerinin toplamı gibi yazıp sonra her bir integrali alıp parça parça integrasyon formülünün yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilir[1]:

$$\int_a^b f_{y'} h'(x)dx = f_{y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f_{y'}\right) h(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b f_{y''} h''(x)dx = f_{y''} h'(x)\Big|_a^b - \left(\frac{d}{dx} f_{y''}\right) h(x)\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} f_{y''}\right) h(x)\,dx\,,$$

………………………………………………………………………………

$$\int_a^b f_{y^{(n)}} h^{(n)}(x)dx = f_{y^{(n)}} h^{(n-1)}(x)\Big|_a^b - \left(\frac{d}{dx} f_{y^{(n)}}\right) h^{(n-2)}(x)\Big|_a^b + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_{y^{(n)}}\right) h(x)\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}}\right) h(x)\,dx\,.$$

(3) sınır şartlarının $y(x)+h(x)$ fonksiyonu ve onun türevlerinin sağlanması için $h(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $h'(x),\ldots,h^{(n-1)}(x)$ türevlerinin

$$\begin{aligned} h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(n-1)}(a)=0\ , \\ h(b)=h'(b)=\ldots=h^{(n-1)}(b)=0\ , \end{aligned} \qquad (5)$$

homojen şartların sağlanması gerekir. (5) şartlarını üstteki formüllerde dikkate alınırsa:

$$\int_a^b f_{y^{(k)}} h^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b \left(\frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}}\right) h(x)\,dx \ \ ,k=1,2,\ldots,n \qquad (6)$$

bulunur. Sonuncu eşitliği $F(y)$ fonksiyonelinin (2) formülleriyle gösterilen varyasyonunda dikkate alınırsa (1) fonksiyonelinin varyasyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\delta F(y,h) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}}\right) h(x)dx\ \ . \qquad (7)$$

Böylece , (1) fonksiyonelinin $y(x)\in C^{2n}_{[a,b]}$ elemanında ekstramum değer alması için gerek şart (5) şartlarını sağlayan her bir $h(x)\in C^{2n}_{[a,b]}$ artışı için bu fonksiyonelin varyasyonunun sıfıra eşit olmasıdır. Yani,

$$\delta F(y,h)=0$$

veya

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} \right) h(x) dx = 0 \tag{8}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuncu eşitlikte integral altında parantez içerisinde olan

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}}$$

ifadesi şartlara göre x değişkenine göre sürekli fonksiyondur. Bu yüzden (8) eşitliğinden varyasyon hesabının esas lemmasına göre buluruz:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} = 0 .$$

Böylece, (1) fonksiyonelinin (3) şartlarını sağlayan ekstremalları $2n$ dereceli adi türevli (4) Euler diferansiyel denkleminin (3) şartlarını sağlayan çözümleri olmalıdır. (4) diferansiyel denklemlerine bazen Euler-Poisson denklemleri de denir[1]. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü $2n$ sayıda keyfi sabitlere bağlı olur. Bu sabitler (3) sınır şartlarından bulunabilir.

Örnek 1. Aşağıdaki

$$F(y) = \int_0^1 \left(x^2 + y''^2 \right) dx$$

fonksiyonelinin $\left(y(0) = 1 , y'(0) = 1 , y(1) = 2 , y'(1) = 1 \right)$ şartlarını sağlayan ekstremallarını bulun.

Çözüm. Verilmiş fonksiyonelde $n = 2$ olduğundan bu fonksiyonel için Euler-Poisson diferansiyel denklemi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonelde integral altındaki $f = \left(x^2 + y''^2 \right)$ fonksiyonu y ve y' değişkenlerine bağlı olmadığından $f_y \equiv 0$ ve $f_{y'} \equiv 0$ olduğundan bu fonksiyonel için Euler-Poisson denklemi

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(2y'' \right) = 0$$

veya

$$y^{(IV)} = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ise

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

şeklinde yazılır. Elde edilmiş genel çözümün sınır şartlarını sağlamasından c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri için $c_1 = c_2 = 0$ ve $c_3 = c_4 = 1$ olduğu bulunur. Böylece, verilmiş fonksiyonelin verilen şartlardaki ekstremumu yalnız $y(x) = x + 1$ doğrusunda gerçekleşebilir.

Örnek 2.

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y''^2 - y^2 \right) dx$$

fonksiyonelinin $y(0) = 1\, , y'(0) = 0\, ,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\, ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şartlarını sağlayan ekstremalini bulun.

Çözüm. Bu fonksiyonelde $f = y''^2 - y^2$ fonksiyonu y' değişkenine bağlı olmadığından $n = 2$ için Euler - Poisson diferansiyel denklemi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0\ ,$$

$$f_y = -2y\ , f_{y''} = 2y'' \quad \text{ve} \quad \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 2y^{(IV)}$$

olduğundan aşağıdaki şekilde olur:

$$y^{IV} - y = 0\,.$$

Bu denklemin genel çözümü ise

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

şeklindedir. Sınır şartlarının sağlanmasından da c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri için $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ ve $c_3 = 1$ değerlerini buluruz. Böylece fonksiyonelin ekstremum değeri yalnız $y = \cos x$ fonksiyonunda gerçekleşebilir.

Örnek 3.

$$F(y)=\int_a^b \left(y''^2-2\varphi(x)y\right)dx$$

fonksiyonelini ele alalım. Bu fonksiyonelde $\varphi(x)$ verilmiş fonksiyondur. Bu fonksiyonelin Euler-Poisson diferansiyel denklemi

$$y^{(iv)}=\varphi(x)$$

şeklinde alınır.

Burada sonlu sayıda fonksiyonların yüksek türevlerine bağlı fonksiyonelleri ele alalım. Aşağıdaki:

$$F(y_1,y_2,\ldots,y_m)=\int_a^b f\left(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n_1)},\ldots,y_m,y_m',\ldots,y_m^{(n_m)}\right)dx \qquad (9)$$

şeklindeki fonksiyonelleri ele alalım.

Bu fonksiyonelin Euler-Poisson denklemini elde etmek için (9) fonksiyonelinde, mesela $y_i(x)$ değişkenini $y_i(x)+h_i(x)$ şeklinde değiştirirsek, ama diğer $y_1,y_2,\ldots,y_{i-1},y_{i+1}\ldots,y_m$ değişkenlerini değişmez sağlarsak (9) fonksiyoneli bir tane $y_i(x)$ fonksiyonunun yüksek mertebeli türevine bağlı fonksiyonele dönüşür. Sonuçta elde edilen bu $\tilde{F}(y_i)$ fonksiyoneli için Euler-Poisson diferansiyel denklemini yazacak olursak buluruz:

$$f_{y_i}-\frac{d}{dx}f_{y_i'}+\ldots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}f_{y_i^{(n_i)}}=0.$$

Buradaki *i* indisi keyfi olup $i=1,2,\ldots,n$ değerlerini aldığında (9) fonksiyonelinin aşağıdaki şekilde Euler-Poisson denklemler sistemini elde etmiş oluruz:

$$\sum_{k=0}^{n_i}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}f_{y_i^{(k)}}=0\ ,\quad i=1,2,\ldots,m\ . \qquad (10)$$

Özel halde (9) fonksiyoneli, mesela

$$F(y,z)=\int_a^b f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(m)}\right)dx \qquad (11)$$

şeklinde olursa, o zaman bu fonksiyonelin Euler-Poisson diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki şekilde yazılırsa:

$$\begin{cases} f_y - \dfrac{d}{dx} f_{y'} + \ldots + (-1)^{(n)} \dfrac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0, \\ f_z - \dfrac{d}{dx} f_{z'} + \ldots + (-1)^m \dfrac{d^m}{dx^m} f_{z^{(m)}} = 0 \ . \end{cases}$$

Not. (1) fonksiyonelinde integral altındaki $f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$ fonksiyonu y değişkenine bağlı olmadığında $f_y \equiv 0$ olduğundan Euler-Poisson denklemi aşağıdaki şekilde olur:

$$-\frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

Bu denklemin her yanını x değişkenine göre bir kez integrallersek buluruz:

$$f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_{y^{(n)}} = c.$$

Böylece, Euler-Poisson denkleminin derecesi aşağı indirilmiş olur.

Özel halde f fonksiyonu x değişkenine bağlı olmadığında x değişkeninin y- nin fonksiyonu olduğu kabul ederek (1) fonksiyoneli

$$\int_{y_0}^{y_1} \phi\left(y,x',x'',\ldots,x^{(n)}\right) dy$$

şeklinde yazılır ki, bu fonksiyonel içinde üstteki hale uygun olarak

$$\phi_{x'} - \frac{d}{dy}\phi_{x''} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \phi_{x^{(n)}} = c$$

denklemi yazılır.

3.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlara Bağlı Fonksiyoneller

3.4.1. Çok Değişkenli Fonksiyonlara Bağlı Fonksiyonellerin Varyasyonun Hesaplanması

$$F(u) = \iint_G f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \qquad (1)$$

fonksiyonelini ele alalım. Bu fonksiyonelde integral altındaki

$$f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

fonksiyonun tüm argümentlerine göre birinci mertebeden sürekli kısmi türevlerinin olduğunu varsayalım. (1) fonksiyoneli kapalı G bölgesinde tanımlanmış sürekli $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ kısmi türevleri olan $u(x,y)$ iki değişkene bağlı fonksiyonlar kümesinde tanımlanmış çok değişkene bağlı fonksiyona bağlı fonksiyoneldir. Kapalı G bölgesinde tanımlanmış sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların $u(x,y)$ kümesinde norm:

$$\|u\| = max\left\{\max_{(x,y)\in G}|u(x,y)|,\max_{(x,y)\in G}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\max_{(x,y)\in G}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right\}$$

formülü ile tanımlanır. Bu lineer normlu uzay $C^1(G)$ gibi gösterilir.

(1) fonksiyonelinin varyasyonunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\delta F(u,h) &= \frac{d}{dt}F(u+th)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt}\iint_G f\left(x,y,u+th,u_x+th_x,u_y+th_y\right)dxdy\Big|_{t=0} = \\
&= \iint_G \left[f_u h(x,y)+f_{u_x}h_x(x,y)+f_{u_y}h_y(x,y)\right]dxdy\Big|_{t=0} = \\
&= \iint_G \left[f_u h+f_{u_x}h_x+f_{u_y}h_y\right]dxdy\ .
\end{aligned}$$

Böylece (1) fonksiyonelinin varyasyonu için aşağıdaki formülü buluruz:

$$\delta F(u,h)=\iint_G \left[f_u h(x,y)+f_{u_x}h_x(x,y)+f_{u_y}h_y(x,y)\right]dxdy. \qquad (2)$$

3.4.2. Euler-Ostrogradskii Denklemi

(1) fonksiyonelinde integral altındaki $f(x,y,u,u_x,u_y)$ fonksiyonun tüm argümentlerine göre ikinci mertebeye kadar (ikinci mertebede dâhil olmakla) kısmi türevlerinin var ve sürekli olduklarını varsayalım. (1) fonksiyonelinin $C^2(G)$ uzayında tanımlandığını varsayalım. $C^2(G)$ uzayı kapalı *G* bölgesinde tanımlanmış ikinci mertebeye kadar (ikinci mertebede dâhil olmakla) kısmi türevleri var ve

sürekli olan $u(x,y), v(x,y), \dots$ fonksiyonlarının normlu uzayıdır. $u \in C^2(G)$ elemanının normu

$$\|u\| = \max\left\{ \max_{(x,y)\in G} |u|, \max_{(x,y)\in G} |u_x^{'}|, \max_{(x,y)\in G} |u_y^{'}|, \max_{(x,y)\in G} |u_{xy}^{''}|, \max_{(x,y)\in G} |u_{xx}^{''}|, \max_{(x,y)\in G} |u_{yy}^{''}| \right\}$$

formülü ile tanımlanır[4].

G bölgesinin sınırını L ile gösterelim. L eğrisi üzerinde tanımlanmış $\varphi(x,y)$ fonksiyonunun verildiğini varsayalım.

Aşağıdaki:

$$\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^2(\boldsymbol{G}) : \boldsymbol{u}\big|_L = \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\}$$

kümesi $C^2(G)$ uzayında bir lineer afin manifoldu oluşturur.

(1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ lineer afin manifoldunda yerleşen ekstremallarını bulalım.

Bunun için $F(u)$ fonksiyonelinin $\Delta F = F(u+h) - F(u)$ artışını $u, u+h \in \mathcal{M}$ olmak şartıyla hesaplamamız gerekir. Bunun için ise $h(x,y)$ artış fonksiyonu $h(x,y) \in C^2(G)$ şartını ve

$$h(x,y)\big|_L = 0 \qquad (3)$$

sınır şartını sağlaması gerekir. Gerçektende $u, u+h \in \mathcal{M}$ olmak üzere

$$u(x,y)\big|_L = \varphi(x,y) \text{ ve } \big(u(x,y) + h(x,y)\big)\big|_L = \varphi(x,y)$$

şartlarından $h \in \mathcal{M}$ ve $h(x,y)\big|_L = 0$ şartları sağlanır.

(1) fonksiyonelinin varyasyonunun (2) formülünde

$$f_{u_x} h_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_{u_x} h\right) - \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} h,$$

$$f_{u_y} h_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_{u_y} h\right) - \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} h$$

formüllerinden istifade edersek bu fonksiyonelin $\delta F(u,h)$ varyasyonu için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\delta F(u,h) = \iint_G \left[f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right] h(x,y)\, dxdy + \\ + \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{u_x} h\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_{u_y} h\right) \right] dxdy \,. \tag{4}$$

(4) formülündeki ikinci integrali hesaplayalım bunu yapmak için matematik analizden belli olan aşağıdaki şekilde yazılan Green formülünü uygulayalım;

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L P dx + Q dy \,.$$

Green formülünde $P = -f_{u_y} h$ ve $Q = f_{u_x} h$ alırsak buluruz:

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{u_x} h\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_{u_y} h\right) \right] dxdy = \\ = \int_L - f_{u_y} h dx + f_{u_x} h dy \,. \tag{5}$$

$h(x,y)\big|_L = 0$ olduğunu (5) eşitliğinin sağ yanında dikkate alırsak;

$$\int_L - f_{u_y} h dx + f_{u_x} h dy \equiv 0$$

olduğu elde edilir. Buna göre de $h(x,y)\big|_L = 0$ şartında;

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{u_x} h\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_{u_y} h\right) \right] dxdy = 0$$

olduğu bulunur.

Böylece (1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ lineer afin manifoldundaki varyasyonu için

$$\delta F(u,h) = \iint_G \left[f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right] h(x,y)\, dxdy$$

formülü bulunur.

(1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ lineer afin manifoldundaki ekstremalları için

$h(x,y)\big|_L = 0$ şartını sağlayan $h \in C^2(G)$ için

$$\delta F(u,h)=0$$

şartının sağlanması veya

$$\iint\limits_G \left[f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right] h(x,y)\, dxdy = 0$$

şartının sağlanması gerek şarttır. Bu eşitliğin sol yanında integral altında parantez içerisindeki

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y}$$

ifadesi G bölgesinde sürekli fonksiyon olduğundan üstteki eşitliğe varyasyon hesabının esas lemmasını uygularsak buluruz:

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0. \tag{6}$$

Böylece (1) fonksiyonelinin $\mathcal{M}$ afin manifoldundaki ekstremallarını bulmak için kısmi türevli ikinci mertebeli (6) diferansiyel denkleminin

$$u(x,y)\big|_L = \varphi(x,y) \tag{7}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulmak gerekir. İkinci dereceli kısmi türevli diferansiyel denklem olan (6) denklemine (1) fonksiyonelinin Euler-Ostrogradskii denklemi denir[3].

Örnek 1. $u = u(x,y),\ (x,y) \in G$ fonksiyonu ile verilen regüler yüzeyin, yani her bir $(x,y) \in G$ noktasında teğet düzlemi olan yüzeyin alanı tanımlandığı G bölgesinde

$$S(u) = \iint\limits_G \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy$$

formülü ile hesaplanır. Bu formülde G kapalı ve sınırlı bölgedir. L ile G bölgesinin sınırını gösterelim. Dikkat edilirse , $S(u)$ ifadesi $C^1(G)$ uzayında bir fonksiyonel tanımlar.

Şimdi sınırı kapalı L eğrisi olan en küçük alanlı yüzeyin bulunması problemini ele alalım. Böylece, bu problemde L eğrisi ile sınırlanmış, $S(u)$ fonksiyoneline minimum değer veren, $u = u(x,y)$ yüzeyinin bulunması istenir.

Böyle bir yüzeyi bulmak için $S(u)$ fonksiyonelinin Euler-Ostrogradskii denklemini yazalım. $S(u)$ fonksiyonelinin Euler-Ostrogradskii denklemi, fonksiyoneldeki f fonksiyonu *u* değişkenine bağlı olmadığından ve buna göre de $f_u \equiv 0$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0$$

veya

$$u_{xx}\left(1+u_y^2\right)-2u_x u_y u_{xy}+u_{yy}\left(1+u_x^2\right)=0 \tag{8}$$

şeklinde alınır.

(8) denklemi eğriliği sıfıra eşit olan yüzey denklemidir. Böyle yüzeylere minimal yüzeyler denir. Pratik olarak böyle yüzeyler *L* eğrisine çekilmiş sabun köpüğü ile reelleştirilir (gerçekleştirilir).

Örnek 2.

$$F(u)=\iint_G \left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy$$

fonksiyonelinin $u(x,y)\big|_L=\varphi(x,y)$ şartını sağlayan ekstremallarını bulunuz. Burada *L* eğrisi *G* bölgesinin sınırıdır.

Çözüm. Bu fonksiyonel için Euler-Ostrogradskii denklemi:

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem $u(x,y)$ fonksiyonu için Laplace denklemidir. Böylece, ele alınan ekstremum probleminin ekstremalini bulmak için Laplace denklemi için aşağıdaki Dirichlet problemini çözmek gerekir:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u=0,\\ &u\big|_L=\varphi(x,y).\end{aligned}\right\}$$

Dikkate alalım ki, Laplace denklemi için Dirichlet problemi matematiksel fizik teorisinde esas problemlerdendir.

Örnek 3.

$$F(u)=\iint_G \left(u_x^2+u_y^2+2\psi(x,y)u\right)dxdy$$

fonksiyonelinin G bölgesinin sınırında $u|_L = \varphi(x,y)$ şartını sağlayan ekstremallerini bulunuz. Burada integral altındaki $\psi(x,y)$ fonksiyonu ve $\varphi(x,y)$ fonksiyonları verilmiş belli fonksiyonlardır.

Çözüm. Bu fonksiyonelin Euler-Ostrogradskii denklemi:

$$u_{xx} + u_{yy} = \psi(x,y)$$

veya

$$\Delta u = \psi(x,y)$$

şeklinde alınır. Bu denkleme Poisson denklemi denir. Böylece, verilmiş bu ekstremum probleminin ekstremallerinin bulunması Poisson denklemi için aşağıdaki Dirichlet probleminin çözülmesine getirilir:

$$\Delta u = \psi(x,y),$$

$$u|_L = \varphi(x,y).$$

Poisson denklemi için Dirichlet problemine matematiksel fizik teorisinde sık-sık rastlanır.

2.4.3. n- Değişkenli Fonksiyona Bağlı Fonksiyoneller

Sonlu n değişkenine bağlı $u(x_1,\dots,x_n)$ fonksiyonuna bağlı

$$F(u) = \iint\limits_G \dots \int f\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

fonksiyonelini ele alalım. Bu fonksiyonel için benzer işlemler yaparak Euler-Ostrogradskii denklemini aşağıdaki şekilde buluruz:

$$f_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f_{u_{x_k}} = 0 .$$

Örneğin,

$$F(u) = \iiint\limits_G \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dxdydz$$

fonksiyonelinin ekstremalleri için Euler-Ostrogradskii denklemi

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

şeklinde alınır.

Dikkat edelim ki, $F(u)$ fonksiyoneli u fonksiyonunun yüksek dereceli kısmi türevlerine bağlı olduğunda bu tür fonksiyonel için benzer şekilde işlemler yapılarak uygun Euler-Ostrogradskii denklemi yazılır.

Mesela,

$$F(u)=\iint_G f\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}\right)dxdy$$

fonksiyonelinin Euler - Ostrogradskii denklemi;

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f_{u_{xy}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f_{u_{yy}}=0$$

şeklinde alınır. Bu denklem dördüncü dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Özel halde $F(u)$ fonksiyoneli:

a) Fonksiyonel,

$$F(u)=\iint_G \left(u_{xx}^2+u_{yy}^2+2u_{xy}^2\right)dxdy$$

şeklinde olduğunda Euler-Ostrogradskii denklemi:

$$\Delta\Delta u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

şeklinde alınır. Burada

$$\Delta\Delta=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

diferansiyel operatörüne biharmonik operatör denir.

b) Fonksiyonel,

$$F(u)=\iint_G \left(u_{xx}^2+u_{yy}^2+2u_{xy}^2-2\psi(x,y)u\right)dxdy$$

şeklinde olduğunda ise Euler-Ostrogradskii denklemi:

$$\Delta\Delta u=\psi(x,y),\quad (x,y)\in G$$

şeklinde alınır. Burada $\psi(x,y)$ fonksiyonu verilmiş belli fonksiyondur. Burada alınan Euler-Ostrogradskii denklemi homojen olmayan denklemdir.

4. ŞARTLI EKSTREMUM İÇİN VARYASYON HESABI

4.1. Diferansiyellenebilen Fonksiyonelli, Şartlı Ekstremum Problemleri

4.1.1. Şartlı Ekstremum Problemi

Normlu E uzayında tanımlanmış diferansiyellenebilir $F(y)$ ve $G(y)$ fonksiyonellerinin verildiğini varsayalım. c_0 verilmiş sabit bir sayı olsun. $F(y)$ fonksiyonelinin $G(y)=c_0$ şartında ekstremum problemini ele alalım. Bu problem kısaca aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$F(y) \to extr, \tag{1}$$

$$G(y)=c_0 \ . \tag{2}$$

(1) -(2) problemine, yani $F(y)$ fonksiyonelinin $G(y)=c_0$ şartındaki ekstremum problemine şartlı (veya izoperimetrik) ekstremum problemi denir[1].

(1) -(2) probleminin çözümü için aşağıdaki lemma doğru olur.

Lemma 1. $F(y)$ fonksiyoneli $G(y)=c_0$ şartının sağlanmasıyla $y_0 \in E$ noktasında ekstremum değer aldığında ve y_0 noktası $G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası değil ise (yani $\delta G(y,h)\big|_{y=y_0} \not\equiv 0$), o zaman $\delta G(y,h)\big|_{y=y_0}=0$ şartını sağlayan her bir $h \in E$ için,

$$\delta F(y,h)\big|_{y=y_0}=0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $h \in E$ elamanı için $\delta G(y,h)\big|_{y=y_0}=0$ olduğunu varsayalım. Ama lemmanın şartına esasen genel olarak $\delta G(y,h)\big|_{y=y_0} \not\equiv 0$. Buna göre de öyle bir $h_0 \in E$ bulunur ki, $\delta G(y,h_0)\big|_{y=y_0} \neq 0$ olur.

Aşağıdaki fonksiyonları ele alalım:

$$u(t,s)=F(y_0+th+sh_0),$$

$$v(t,s)=G(y_0+th+sh_0)-c_0 .$$

$F(y)$ fonksiyonelinin $G(y)=c_0$ şartında $y_0 \in E$ noktasında ekstremum değer alma şartından $u(t,s)$ iki değişkenli fonksiyonun $v(t,s)=0$ şartında $t=0, \ s=0$ noktasında ekstremum değer alması alınır.

t ve s değişkenlerinin yeterince küçük değerlerinde $v(t,s)=0$ denkleminin,

$$S(0)=0,\frac{ds}{dt}(0)=0 \tag{3}$$

şartlarını sağlayan bir $s(t)$ fonksiyonu tanımladığını gösterelim. Bunun için varyasyonun tanımına esasen yazalım:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,0)=\delta G(y_0+sh_0,h)\big|_{s=0}=\delta G(y_0,h)=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}(0,0)=\delta G(y_0+th,h_0)\big|_{t=0}=\delta G(y_0,h_0)\neq 0.$$

Burada

$$\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right]_{t=0,s=0}\neq 0$$

şartı sağlandığından, matematik analizden açık olmayan (aşikâr olamayan) fonksiyonların varlığı hakkındaki teoreme esasen $v(t,s)=0$ denkleminin bir açık olmayan $s=s(t)$ fonksiyonunu tanımlar. Burada

$$v(0,0)=G(y_0)-c_0=0$$

olduğundan

$$s(0)=0$$

şartı sağlanır. Öte yandan

$$\frac{dt}{ds}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial s}}$$

formülünden,

$$\frac{dt}{ds}(0,0)=-\frac{\frac{\partial v}{\partial t}(0,0)}{\frac{\partial v}{\partial s}(0,0)}=0$$

buluruz. $w(t)=u(t,s(t))$ fonksiyonunun $t=0$ noktasında ekstremum değer aldığı açıktır. Bu yüzden

$$\frac{dw}{dt}(0)=0$$

olur. Diğer yandan (3) şartına esasen buluruz:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}(0)&=\frac{d}{dt}u(t,s(t))\big|_{t=0}=\\&=\frac{d}{dt}F(y_0+th+s(t)h_0)\big|_{t=0}=\\&=\frac{\partial}{\partial t}F(y_0+th+s(t)h_0)\big|_{t=0}+\frac{\partial}{\partial s}F(y_0+th+s(t)h_0)\big|_{t=0}\frac{ds}{dt}(0)=\\&=\delta F(y_0+s(t)h_0,h)\big|_{t=0}=\\&=\delta F(y_0,h).\end{aligned}$$

Böylece,

$$\delta F(y_0,h)=\frac{dw}{dt}(0)=0 .$$

Bununla da lemma ispatlanmış olur.

Bu lemmadan şartlı ekstremum probleminin çözümü için genel bir yöntem elde etmek için, lineer fonksiyonların genel teorisinden belli olan aşağıdaki lemmayı kullanalım.

Lemma 2. Lineer $L_1(h)$ fonksiyoneli lineer $L(h)$ fonksiyonelinin sıfıra dönüştüğü her bir h elemanında sıfıra dönüşürse, o zaman $L_1(h)$ fonksiyoneli $L(h)$ fonksiyoneli ile orantılıdır (mütenasiptir veya lineer bağımlıdır), yani öyle sabit λ sayısı var ki, her bir $h\in E$ için

$$L_1(h)=\lambda L(h) \tag{4}$$

ifadesi doğrudur[2].

İspat. $L(h)\equiv 0$ halini ele alalım. Bu halde $L_1(h)\equiv 0$ olur ve (4) ifadesi keyfi λ sayısı için sağlanır. $L(h)\not\equiv 0$ halini ele alalım. Bu halde öyle $h_0\in E$ elemanı bulunur ki, $L(h_0)\neq 0$. Aksi halde $L(h)\equiv 0$ olurdu. Keyfi $h\in E$ için

$$h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0$$

elemanını ele alalım. Bu elemanda $L(h)$ fonksiyoneli sıfıra dönüşür:

$$L\left(h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0 \right) = L(h) - \frac{L(h)}{L(h_0)} L(h_0) = 0 .$$

O zaman lemmanın şartına esasen bu elemanda $L_1(h)$ fonksiyoneli de sıfıra dönüşür:

$$L_1\left(h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0 \right) = 0 .$$

$L_1(h)$ fonksiyoneli lineer fonksiyonel olduğundan sonuncu eşitlikten

$$L_1(h) = \frac{L_1(h_0)}{L(h_0)} L(h)$$

buluruz. Böylece,

$$\lambda = \frac{L_1(h_0)}{L(h_0)}$$

olmak üzere her $h \in E$ için $L_1(h) = \lambda L(h)$ eşitliği sağlanır.

Şartlı ekstremum problemi için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 1. $y_0 \in E$ noktasının $F(y)$ fonksiyonelinin $G(y) = c_0$ şartında şartlı ekstremum probleminin ekstremal noktası olduğunu ve y_0 noktasının $G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası olmadığını, yani $\delta G(y_0, h) \not\equiv 0$ şartını sağladığını varsayalım. O zaman $y_0 \in E$ noktası $F(y) - \lambda G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası olur. Burada λ sabit sayıdır[1].

İspat. Lemma 1'e esasen $\delta G(y_0, h) = 0$ şartını sağlayan her bir $h \in E$ için $\delta F(y_0, h) = 0$ eşitliği sağlanır. O zaman lemma 2'ye esasen her $h \in E$ için,

$$\delta F(y_0, h) = \lambda \delta G(y_0, h)$$

olur. Burada λ bir skaler sayıdır. Buradan

$$\delta(F - \lambda G)(y_0, h) = 0$$

yazılır. Sonuncu eşitlikten y_0 noktasının bir λ sayısında $F-\lambda G$ fonksiyonelinin stasionar noktası olduğu görülür.

İspatlanan bu teorem esasında

$$F(y) \to extr, \tag{1}$$

$$G(y) = c_0 \tag{2}$$

şartlı ekstremum probleminin ekstremum noktalarının ya

$$H = F - \lambda G$$

fonksiyonelinin stasionar noktaları arasında, ya da $G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktaları arasında olduğu belirlenir.

Dikkat edilirse $F(y)$ ve $G(y)$ fonksiyonelleri normlu E uzayının bir $\mathcal{M} \subset E$ lineer afin manifoldunda tanımlandığı halde de, yani

$$F(y) \to \underset{y\in\mu}{extr}, \tag{3}$$

$$G(y) = c_0 \tag{4}$$

ekstremum problemi için de bu teorem geçerli olur. Aşağıdaki daha genel şartlı ekstremum problemi ele alınsın.

Normlu E uzayının bir $\mathcal{M} \subset E$ lineer afin manifoldunda diferansiyellenebilir $F(y)$ ve $G_1(y), G_2(y), \ldots, G_n(y)$ fonksiyonellerinin ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabit sayılarını verildiği varsayılsın.

$F(y)$ fonksiyonelinin $\mathcal{M} \subset E$ afin manifoldunda $G_1(y) = c_1, \ldots, G_n(y) = c_n$ şartlarında ekstremum problemini ele alalım. Bu şartlı ekstremum problemini aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$F(y) \to \underset{y\in\mu}{extr}, \tag{5}$$

$$G_k(y) = c_k, \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

bu genel hal için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2. $F(y)$ fonksiyonelinin $y_0 \in \mathcal{M}$ noktasında

$G_1(y) = c_1, \ldots, G_n(y) = c_n$ şartlarının sağlanmasıyla ekstremum değer aldığını ve y_0 noktasının $G_1(y), G_2(y), \ldots, G_n(y)$ fonksiyonellerinin hiç birinin stasionar noktasının olmadığını varsayalım. Lineer

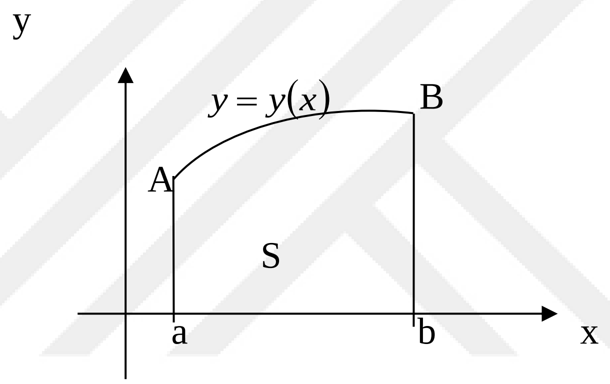
$$\delta G_1(y_0,h),\delta G_2(y_0,h),\ldots,\delta G_n(y_0,h)$$

fonksiyonelleri lineer bağımsız olsun. O zaman y_0 noktası

$$H = F - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \ldots - \lambda_n G_n$$

fonksiyonelinin stasionar noktası olur. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sabit sayılardır[3].

Örnek 1. Uzunluğu ℓ olan öyle $y = y(x)$ eğrisi bulun ki, bu eğri ile ve $y = 0$, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanmış eğrisel trapezin alanı en büyük olsun (bkz. Şekil-1).



Şekil-1: Eğri ile Ox ekseni arasında kalan alan

Burada eğrinin ℓ uzunluğunun $A(a,y_a)$, $B(b,y_b)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğundan büyük olduğu farz olunur, yani

$$\ell > \sqrt{(b-a)^2 + (y_b - y_a)^2}\ ,\ y(a) = y_a, y(b) = y_b .$$

Çözüm. Bu problem trapezin alanını ifade eden,

$$F(y) = \int_a^b y(x)\,dx$$

fonksiyonelinin $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ sınır şartlarında ve $y(x) = y$, $a \le x \le b$ eğrisinin uzunluğunu ifade eden

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \ell$$

şartındaki şartlı ekstremum probleminin çözümüne getirilir.

Bizi ilgilendiren ekstremalları

$$H = F(y) - \lambda G = \int_a^b \left(y - \lambda\sqrt{1+y'^2} \right) dx \tag{7}$$

fonksiyonelinin ekstremalları arasında arayalım. Bunun için (7) fonksiyonelinin Euler denklemini yazalım:

$$1 - \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 .$$

Bu eşitliğin her yanını x değişkenine göre integrallesek buluruz:

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c_1 .$$

Burada c_1 keyfi sabit sayıdır. Sonuncu denklemi çözmek için ise $y' = tgt$ eşitliği ile t parametresi dâhil edelim. O zaman $dy = y'dx$ olduğundan ve

$$dx = \left(\lambda \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} \right)' dt$$

olduğundan

$$dy = y'dx = tgt \left(\lambda \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} \right)' dt = \lambda \sin t \, dt$$

buluruz. Buradan ise

$$y - c_2 = -\lambda \cos t$$

ve

$$x - c_1 = \lambda \sin t.$$

Elde ettiğimiz bu eşitliklerden t parametresini yok edersek buluruz:

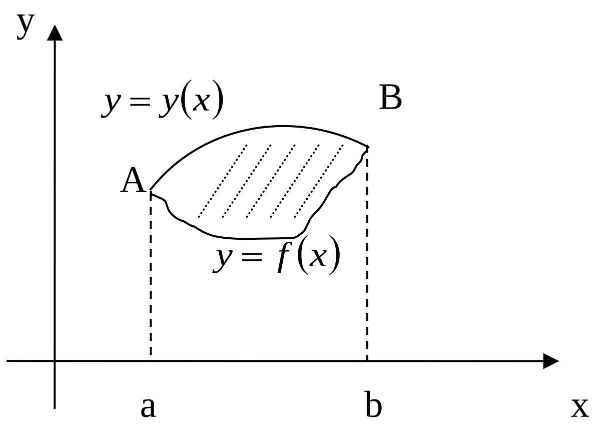
$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2.$$

Bu çemberler ailesinin denklemidir. Buradaki, c_1, c_2, λ parametreler

$$y(a)=y_a, y(b)=y_b \text{ ve } \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\ell$$

şartlarından bulunur.

Örnek 2. uzunluğu ℓ olan öyle *AB* eğrisi bulun ki , bu eğri ile verilmiş $y=f(x)$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı en büyük olsun (bkz şekil-2) .



Şekil-2: Eğrilerin kısıtladığı alan

Çözüm. $y=f(x)$ ve $y=y(x)$ eğriler arasında kalan bölgenin alanı aşağıdaki integralle tanımlanır:

$$S(y)=\int_a^b (y-f(x))\,dx$$

$$y(a)=y_a \;;\; y(b)=y_b$$

Burada biz AB eğrisini $y=y(x),\ a\le x\le b$ ile gösterdik. Bu eğrinin uzunluğu

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\ell$$

şartının sağlatılması gerektir.

Bu problemi çözmek için aşağıdaki yardımcı fonksiyoneli inşa ederiz:

$$H=\int_a^b\left(y-f(x)+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx.$$

Bu fonksiyonel için yazılmış Euler denklemi örnek1-deki fonksiyonel için yazılmış Euler denkleminden farklı değildir. Böylece, bu probleminde ekstremalları çemberler olur.

Örnek 3. *A* ve *B* noktalarından asılmış ℓ uzunluklu tam elastiki uzanmayan , homojen kablonun şeklini bulun.

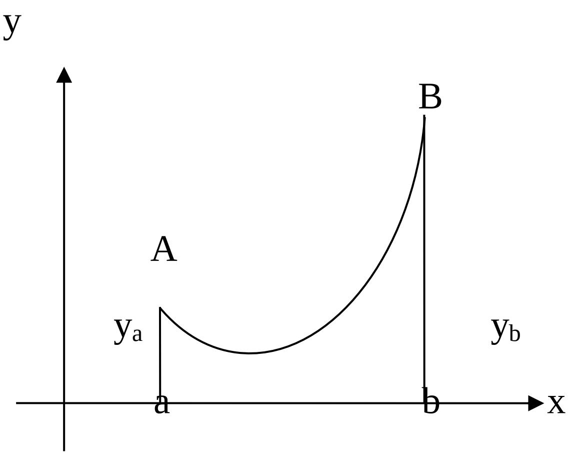
Çözüm. Denge durumunda kablonun ağırlık merkezi en aşağı noktada olmalıdır. Buna göre de kablonun *Ox* eksenine nazaran statik *p* momenti yatay yönelmekle en küçük değer almalıdır. Kablonun *Ox* eksenine nazaran statik momenti

$$p=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

formülü ile hesaplanır. Bununla birlikte $y(a)=y_a\ ;\ y(b)=y_b$ ve

$$\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\ell$$

şartlarının sağlatılması gerekir (bkz şekil 3) .



Şekil-3: ℓ uzunluklu eğrinin şekli

Bu halde yardımcı fonksiyonel aşağıdaki şekilde yazılır:

$$H=\int_a^b(y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Bu fonksiyonelin Euler denkleminin birinci integrali aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f - y' f_{y'} = c$$

veya bu halde

$$(y-\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y-\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

buradan buluruz

$$y-\lambda = c_1\sqrt{1+y'^2}\ .$$

Bu sonuncu denklemi çözmek için $y' = sht$ eşitliği ile t parametresi dâhil edersek

$$\sqrt{1+y'^2} = cht \text{ ve } y-\lambda = c_1 cht\ ;$$

$$\frac{dy}{dx} = sht\ ;\ dx = \frac{dy}{sht} = c_1 dt\ ;$$

$$x = c_1 t + c_2\ .$$

Böylece $y-\lambda = c_1 cht$ ve $x = c_1 t + c_2$ denklemlerinden t parametresini çıkarsak buluruz

$$y-\lambda = c_1 ch\frac{x-c_2}{c_1}\ .$$

Bu denklem zincir eğriler ailesinin denklemidir. Buradaki c_1, c_2, λ parametreleri $y(a) = y_a\ ;\ y(b) = y_b$ ve $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell$ şartlarından bulunur.

4.2. $\varphi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ Şeklindeki Rabıtalar

Birçok mekanik problemler aşağıdaki şekilde şartlı ekstremum problemine getirilir:

$$F(y) = F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx \qquad (1)$$

fonksiyonelinin

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\ ,\ (i = 1, 2, \ldots, m; m < n) \qquad (2)$$

denklemini ve

$$y_j(a) = A_j \quad , \quad y_j(b) = B_j \quad , (j = 1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

sınır şartlarını sağlayan ekstremallerinin bulunması istenir.

Burada A_j ve B_j , $j = 1,2,\ldots,n$ önceden verilmiş sabitler $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1,2,\ldots,m$ fonksiyonları $y_1', \ldots, y_n'$ değişkenlerine bağlı olmayan ve $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ değişkenlerine nazaran diferansiyellenebilir verilmiş fonksiyonlardır. (2) ifadesindeki gibi şartlara sonlu rabıtalar denir[1].

(2) denklemleri ile verilen şartların bağımsız oldukları farz olunur. Bunun için (2) şartlarındaki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ fonksiyonlarının $y_1, y_2, \ldots, y_n$ değişkenlerinin herhangi *m* tanesine göre *m* mertebeli Jakobyanının sıfırdan farklı olması yeterlidir, mesela

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0 \tag{4}$$

şartının sağlandığı yeterlidir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3. (1) fonksiyoneline (2) ve (3) şartlarının sağlanmasıyla ekstremum değer veren $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonları $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots \lambda_m(x)$ çarpanlarının uygun seçilmesi ile

$$G(y) = G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_a^b \left(f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \right) dx \tag{5}$$

yardımcı fonksiyonelinin Euler denklemler sistemini sağlıyor.

Böylece ,

$$\tilde{f} = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \tag{6}$$

gibi gösterirsek aranan $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots \lambda_m(x)$ fonksiyonları ve (1) fonksiyonelinin (2) ve (3) şartlarını sağlayan $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ekstremalları (5) fonksiyonelinin Euler diferansiyel denklemler sisteminden

$$\tilde{f}_{y_k} - \frac{d}{dx} \tilde{f}_{y_k} = 0 \ , \quad k = 1,2,,\ldots,n \tag{7}$$

$$y_k(a) = A_k \ , \ y_k(b) = B_k \ , \ k = 1,2,,\ldots,n$$

şartlarının sağlanmasıyla ve

$$\varphi_i(x,y_1,\ldots,y_n)=0\ ,\ i=1,2,\ldots,m$$

rabıta denklemlerinin çözülmesiyle bulunur.

Eğer biz burada G fonksiyonelini sembolik olarak $y_1,y_2,\ldots,y_n$ fonksiyonlarına bağlı olmakla birlikte $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_m(x)$ fonksiyonlarına bağlı olduğunu yazarsak yani $G=G(y_1,y_2,\ldots,y_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ şeklinde yazarsak, o zaman $\varphi_i=0$, $i=1,2,\ldots,m$ rabıta denklemleri G fonksiyonelinin Euler denklemler sistemine dâhil olmuş olur[1].

İspat. (1) fonksiyoneli için gerek şartı, yani $\delta F(y,h)=0$ şartını yazarsak

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n}\left(f_{y_j}h_j + f_{y_j'}h_j' \right)dx=0 \tag{8}$$

$y_j(x)$ ve $y_j(x)+h_j(x)$ fonksiyonlarını (3) şartlarını sağlaması şartından $h_j(x)$ artış fonksiyonları için $h_j(a)=h_j(b)=0$, $j=1,2,\ldots,n$ şartlarını sağlamasını elde ederiz. Bu şartları göz önünde tutarak (8) eşitliğinin sol yanındaki ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n}\left(f_{y_j} - \frac{d}{dx}f_{y_j'} \right)h_j(x)\,dx=0 \tag{9}$$

buluruz.

(1)-(3) probleminde $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ve $y_1+h_1,y_2+h_2,\ldots,y_n+h_n$ fonksiyonları (2) rabıta denklemlerini de sağlamalıdırlar. Bu yüzden de $h_1(x),\ldots,h_n(x)$ fonksiyonlarının burada keyfi alınmamış oldukları görülür. Buna göre de (9) eşitliğine varyasyon hesabının esas lemması uygulanamaz. (2) denklemlerinin varyasyonunu alarak $h_1(x),\ldots,h_n(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki denklemler sistemi bulunur:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}h_j=0\ ,\qquad i=1,2,\ldots,m \tag{10}$$

(4) şartının sağlandığını varsayarak (10) denklemlerinden $h_1(x),\ldots,h_m(x)$ fonksiyonlarını diğer $h_{m+1}(x),\ldots,h_n(x)$ fonksiyonları ile ifade edilir. Bu yüzden de $h_{m+1}(x),\ldots,h_n(x)$ fonksiyonları bağımsız keyfi artış fonksiyonlarıdır.

(10) denklemlerini uygun olarak $\lambda_i(x)$ fonksiyonlarına çarpıp elde edilen denklemleri *x* değişkenine göre *a*-dan - *b*-ye integrallersek buluruz

$$\int_a^b \lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}h_j(x)\,dx=0 \quad , \qquad i=1,2,\dots,m$$

Elde edilen bu denklemlerle (9) denklemlerini taraf- tarafa toplarsak buluruz:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n}\left[f_{y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}f_{y'_j}\right]h_j(x)\,dx=0$$

veya

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{f}_{y_j}-\frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'_j}\right)h_j(x)\,dx=0. \tag{11}$$

Burada $h_1(x),\dots,h_n(x)$ fonksiyonlarının keyfi olmaması yüzünden (11) eşitliğine varyasyon hesabının esas lemması uygulanamıyor.

Bu durumu ortadan kaldırmak için *m* tane $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$ çarpanlarını öyle seçelim ki, bu fonksiyonlar *m* sayıda

$$\tilde{f}_{y_j}-\frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'_j}=0 \quad , \quad j=1,2,\dots,m$$

denklemlerini, yani

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_j}=0 \quad , \quad j=1,2,\dots,m$$

(12)

denklemlerini sağlasın.

(12) denklemi $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$ fonksiyonlarına göre *m* denklemli lineer denklemler sistemidir. Bu denklemler sisteminin determinantı (4) şartına göre sıfırdan farklıdır. Buna göre de (12) denklemlerinden talep olunan özellikli $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$ fonksiyonları seçilir.

(12) denklemlerini sağlayan $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$ fonksiyonları seçildikten sonra (11) eşitliği ile yazılan gerekli şart aşağıdaki şekli alır.

$$\int_a^b \sum_{j=m+1}^{n}\left(\tilde{f}_{y_j}-\frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'_j}\right)h_j(x)\,dx=0$$

Bu sonuncu eşitlikte $h_{m+1}(x),\ldots,h_n(x)$ artış fonksiyonları bağımsız keyfi fonksiyonlardır. $h_{m+1}(x),\ldots,h_n(x)$ fonksiyonlarından sıra ile birini keyfi alıp diğerlerini sıfıra eşit alarak ve varyasyon hesabının esas lemması elde edilen eşitliğe uygulayarak

$$\tilde{f}_{y_j} - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y_j'} = 0 \ , \quad j = m+1,\ldots,n$$

buluruz. Aldığımız bu denklemlere (12) denklemlerini birleştirirsek buluruz ki:

$$\tilde{f}_{y_j} - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y_j'} = 0 \ , \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{13}$$

n tane bu denklemler *m* tane rabıta

$$\varphi_i(x,y_1,\ldots,y_n) = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m$$

denklemleri ile birlikte *n+m* sayıda

$$y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x) \ , \ \lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_m(x)$$

bilinmeyenlerinin (3) şartında bulunmasını sağlar.

Örnek 1. $\varphi(x,y,z) = 0$ yüzeyinde $A(x_0,y_0,z_0)$ ve $B(x_1,y_1,z_1)$ noktaları arasında en kısa uzaklığı bulun.

Çözüm. Yüzey üzerinde verilmiş iki $A(x_0,y_0,z_0)$ ve $B(x_1,y_1,z_1)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$$

formülü ile bulunur. Burada ele aldığımız problemi çözmek için $\ell(y,z)$ fonksiyonelinin $\varphi(x,y,z) = 0$ şartındaki minimumunu bulmamız gerekir. Üstte verilmiş yönteme uygun olarak, yardımcı

$$G = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x,y,z) \right) dx$$

fonksiyonelini inşa ederiz. Bu fonksiyonel için Euler denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\lambda(x)\varphi_y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \ ,$$

$$\lambda(x)\varphi_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \ ,$$

$$\varphi(x,y,z) = 0 \, .$$

Bu üç denklemden $\ell(y,z)$ fonksiyoneline minimum değer verebilecek $y(x), z(x)$ fonksiyonları ve yardımcı $\lambda(x)$ fonksiyonu bulunur. Birinci iki diferansiyel denklemler sistemini çözmek için ise

$$y(x_0) = y_0 \, ; \, y(x_1) = y_1 \, ; \, z(x_0) = z_0 \, ; \, z(x_1) = z_1$$

şartlarından istifade edilir.

Örnek 2. Rabıta denklemleri

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2 \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, m$$

denklemleri ile verilen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ kütleli, koordinatları $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ olan maddesel noktalar sisteminin kuvvet fonksiyonu -*U* olan sistemin hareketinin denklemini Hamilton prensibi esasında bulun.

Çözüm. Hamilton integrali

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

bu sistemi için

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i^2, \dot{y}_i^2, \dot{z}_i^2 \right) - U \right] dt$$

yazılır ve yardımcı G fonksiyoneli

$$G = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i^2, \dot{y}_i^2, \dot{z}_i^2 \right) - U + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \quad {}_j \right) dt$$

bulunur. Noktanın hareket denklemi G fonksiyonelinin Euler denklemledir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \ , \ i = 1,2,\dots,n \, ;$$

$$m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \ , \ i = 1,2,\dots,n \, ;$$

$$m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial u}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i} \ , \ i = 1,2,\dots,n \, .$$

4.3. $\varphi(x, y_1, y_2 \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$ Şeklindeki Rabıtlar

Mekanik problemlerin bir kısmı

$$F(y) = F(y_1, y_2 \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2 \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx \qquad (1)$$

şeklindeki fonksiyonelin

$$\varphi_i(y_1, y_2 \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \ , \ i = 1,2,\dots,m, (m < n) \qquad (2)$$

denklemlerini ve

$$y_j(a) = A_j \quad , \quad y_j(b) = B_j \quad , \ (j = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

şartlarını sağlayan ekstremum probleminin incelenmesindeki hale gelir.

Bu halde (2) denklemleri diferansiyel denklemlerdir. (2) şartı ile verilen rabıtalara diferansiyel rabıtalar denir[2].

Bu problemde (2) denklemler sisteminin denklemlerinin bağımsız olduklarını varsayalım. (2) denklemler sisteminin denklemlerinin bağımsız olması için $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ fonksiyonlarının $y_1', y_2', \dots, y_n'$ değişkenlerinin m tanesine göre, mesela herhangi bir $y_1', y_2', \dots, y_m'$ değişkenlerine göre m mertebeli Jakobianının sıfırdan farklı olması, yani

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0,$$

olması yeterlidir.

Bu problemi çözmek için, yani $F(y_1, y_2 \dots, y_n)$ fonksiyonelinin (2)-(3) şartlarını sağlayan ekstremallarını bulmak için yardımcı

$$G = \int_a^b \left(f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx \qquad (4)$$

fonksiyoneli inşa edilir. Bu fonksiyonelde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ fonksiyonlar öyle seçilir ki, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonları bağımsız alınabilsin.

Neticede $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ fonksiyonları ve $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonları (4) fonksiyoneli için yazılmış Euler denklemlerinden ve (2)-(3) şartlarından bulunur. Dikkate alalım ki, *G* fonksiyonelini sembolik olarak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ fonksiyonlarına bağlı bir fonksiyonel gibi yazdığımızda (2) rabıta denklemleri *G* fonksiyonelinin Euler denklemler sistemine dâhil olur.

4.4. İzoperimetrik Rabıtalar

Aşağıdaki

$$F(y) = F(y_1, y_2 \ldots, y_n) = \int_a^b f_0(x, y_1, y_2 \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx \qquad (1)$$

fonksiyoneli için izoperimetrik varyasyon problemi $F(y)$ fonksiyonelinin aşağıdaki integrallerle verilmiş

$$G = \int_a^b f_i(x, y_1, y_2 \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx = c_i \;, i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

şartlı ekstremum problemidir. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_m$ önceden verilmiş sabit sayılardır. İzoperimetrik rabıtalar sonlu diferansiyel rabıtalarla kıyaslandığında daha hafif rabıtalardır. Gerçektende (2) integral şekilli şartlarda genelde $y_1, y_2 \ldots, y_n$ değişkenlerinin bir kısmını diğerleri ile ifade etmek zordur. Mesela, $y = y(x)$ eğrinin yalnız

$$\ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

uzunluğunu bilerek, bu eğrinin $y(x)$ denklemi, genelde elde edilemiyor. Buna göre de izoperimetrik şartların *m* sayısı *n* sayısından büyük de olabilir[1].

Teorem 4. (1) fonksiyoneline (2) şartların da ekstremum değer sağlayan $y_1, y_2 \ldots, y_n$ fonksiyonları

$$G=\int_a^b\left(f_0+\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i\right)dx \tag{3}$$

fonksiyonelinin ekstremallarıdır, yani

$$\tilde{f}=f_0+\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i \tag{4}$$

gösterilmesiyle $y_1,y_2\ldots,y_n$ ekstremalları (3) fonksiyonelinin aşağıdaki Euler diferansiyel denklemler sisteminin çözümleridir:

$$\tilde{f}_{y_j}-\frac{d}{dx}\tilde{f}_{y_j'}=0\ ,\quad j=1,2,\ldots,n \tag{5}$$

burada $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sabit sayılardır. Bu teorem 2-nin özel bir halidir.

İspat. İzoperimetrik rabıtal (1)-(2) ekstremum problemi

$$x_i(x)=\int_a^x f_i dx\ ,\ i=1,2,\ldots,m \tag{6}$$

değişkeni dâhil etmekle diferansiyel rabıtalı ekstremum problemine getirilir. Gerçekten de (6) eşitliklerini x değişkenine göre diferansiyellersek

$$z_i'=f_i\left(x,y_1,y_2\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n'\right) \tag{7}$$

(6) eşitliklerinden $z_i(x)$ fonksiyonlar için

$$z_i(a)=0,z_i(b)=c_i\ ,\ i=1,2,\ldots,m \tag{8}$$

şartları elde edilir. Bununla da (2) izoperimetrik rabıtalar (7) diferansiyel rabıtalarla değiştirilmiş olur.

Burada teorem *3*- ün uygulanmasıyla (1) fonksiyonelinin (7) rabıtalarındaki ekstremumunun yalnız

$$G=\int_a^b\left[f_0+\sum_{i=1}^m\lambda_i(x)\left(f_i-z_i'\right)\right]dx \tag{9}$$

fonksiyonelinin ekstremallarında alınabileceğini söyleyebiliriz.

G fonksiyonelinin Euler denklemler sistemi

$$\tilde{f}_{y_j} - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y_j'} = 0 \ , \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\tilde{f}_{z_i} - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{z_i'} = 0 \ , \quad i = 1,2,\dots,m$$

veya

$$f_{0\,y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{i\,y_j} - \frac{d}{dx}\left(f_{0\,y_j'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{i\,y_j'} \right) = 0, \ j = \overline{1,n} \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x) = 0, \ i = 1,2,\dots,m \qquad (11)$$

Dikkate alalım ki, sonuncu (11) denkleminden tüm $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ çarpanlarının sabit sayılar olduğu görülür. Birinci *n* sayıda (10) denklemleri ise *G* fonksiyonelinin Euler diferansiyel denklemler sistemi olduğu çıkarılır.

Böylece, $y_1, y_2,\dots,y_n$ fonksiyonlarını ve $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ sabit sayılarının bulunması için *n* sayıda (10) diferansiyel denklemleri ve *m* sayıda izoperimetrik (2) şartları vardır.

Örnek. $F(y) = \int_0^1 y'^2 dx \to extr$,

$$G_1(y) = \int_0^1 y(x)dx = 0,$$

$$y(0) = 1, y(1) = 0.$$

Çözüm. Bu problemi çözmek için $\tilde{f} = y'^2 + \lambda y$ alalım ve Euler denklemini yazalım

$$2y'' = \lambda$$

bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = \frac{\lambda}{y}x^2 + c_1 x + c_2$$

olur. Sınır şartlarından ve izoperimetrik şartlardan λ, c_1, c_2 sabitlerini bularak $y(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ekstremalini buluruz.

SONUÇ

Bu tezde normlu uzaylarda tanımlanmış reel değerli fonksiyonellerin şartsız ve şartlı ekstremum problemlerinin (maksimum ve minimum değerlerinin bulunması problemlerinin) çözüm metotları ele alınıp incelendi. Özellikle Euler ve Lagrange metotları ele alındı. Uygulamalarda sık sık rastlanan aşağıdaki fonksiyonellerle bağlı ekstremum problemlerinin çözüm metotları incelendi:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad F(y) = \int_a^b f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)dx$$

$$F(y_1, y_2 \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx$$

$$F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

Bu fonksiyonellerdeki f(...) fonksiyonlar verilmiş fonksiyonlardır. Ama $y(x), y_1(x), \dots y_n(x)$ ve u(x,y) fonksiyonları uygun fonksiyonellerin argümentleridir.

Tezde ele aldığımız tipteki fonksiyoneller için şartlı ve şartsız ekstremum problemleri ele alındı. Ve her bir problem için Euler denklemlerinin bulunması gösterildi. Bu problemleri için örnekler gösterildi ve incelendi.

KAYNAKLAR

1. Elsgols, L. E., Diferansialnie Uravneniya İ Variasionnoe İscilenie, Nauka, 1966.
2. Gelfand, İzrail Moiseyeviç, Fomin, Sergei; Calculus of Variations, Fizmdtgiz, Moscow 1961.
3. Guliyev H.F., Yagubov M.H., Hakiyev S.S., Hüseyinov T.H.; Variasiyd Hesabı ve Optimallaşdırma Üsullarına Aid Meseleler, Bakı Dövlet Universiteti, Bakı 1993.
4. Krasnov Mikhail Leont'evich,Makarenko G.M., Kiselov A.I.; Variasionnoe İscislenie, Nauka 1973.
5. Shilov, Georgi Evgen'evich; Matematiceskiy Analiz, Fizmdtgiz, Moscow 1968.
6. Zeidler, Eberhard; Applied Functional Analysis. Application to Mathematical Physics Vol. 108, New York Inc., New York 1991.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Balıkesir'de doğan Ahmet Serdar BAYKAL, ilk orta ve lise öğrenimini sırasıyla Manyas İstiklal İlkokulu, Gönen Anadolu Lisesi ve Savaştepe Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamlamıştır. 2004 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2009 yılında başarıyla bitirmiştir.

Şubat 2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Prof. Dr. Mammad MUSTAFYEV danışmanlığında hazırladığı " Varyasyon Hesabı Problemlerinin Çözüm Metotları Üzerine" başlıklı tezi ile Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

2009 yılından beri M.E.B bağlı sırasıyla Kahta Lisesi ,Çiğdemli Ç.P Lisesi, Yozgat Lisesinde çalıştı. Halen Yozgat Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. 2013 yılında Emine Baykal'la evlenmiştir.

<u>İletişim Bilgileri</u>

Adres: Bilal Şahin Mah. Fatih Sultan Mehmet Cad. Çınar Sitesi. C Blok Kat:9 No:17 Merkez/YOZGAT

Telefon: (544) 415 66 110

E-posta: ahmetserdarr@yandex.com