T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK VE PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE FOURİER METODUNUN UYGULANMASI ÜZERİNE

Gökhan DOĞAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK VE PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE FOURİER METODUNUN UYGULANMASI ÜZERİNE

Gökhan DOĞAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312020 numaralı öğrencisi Gökhan DOĞAN'ın hazırladığı "**Hiperbolik ve parabolik denklemlerin çözümünde Fourier metodunun uygulanması üzerine**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 04/06/2015 Perşembe günü saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına OY ÇOKLUĞU / OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV
(Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/06/2015 tarih ve 16 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09/06/2015

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Müdür

İÇİNDEKİLER

HİPERBOLİK VE PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE FOURİER METODUNUN UYGULANMASI ÜZERİNE

Gökhan DOĞAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2015; Sayfa: 52

Tez Danışmanı:Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer - başlangıç değer problemlerinin çözüm yöntemlerinin öğrenilmesi esas problemlerdendir. Bu çözüm yöntemlerinden en geniş kullanılan yöntemlerden biri de Fourier metodu adlanan değişkenlerine ayırma yöntemidir. Fourier metodunda sınır değer - başlangıç değer probleminin trivial olmayan çözümü her bir değişkene bağlı iki fonksiyonun çarpımı şeklinde aranır. Bu çözüm denklemde yerine yazılmakla bu fonksiyonlar için adi türevli denklemler alınır. Ele alınan problemin sınır ve başlangıç şartlarının dikkate alınmasıyla her bir denklem için uygun şartlar bulunur. Bu tezde hiperbolik ve parabolik tip kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer başlangıç değer problemlerinin Fourier metodunun uygulanmasıyla çözümünün bulunması metodu örneklerde öğrenildi ve sınır değer - başlangıç değer probleminin Fourier metodunun ayrı ayrı örnekler üzerinde çözümünün bulunması gösterildi. Hiperbolik ve parabolik tip diferansiyel denklemlerin çözümünde değişkenlere ayırma (Fourier) yöntemini öğrenirken istifade edilmesi gereken kaynaklar kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik ve parabolik tip diferansiyel denklemler, Fourier metodu, Shturm – Liouville problemi, sınır değer – başlangıç değer problemleri.

ON THE IMPLEMENTATION OF THE FOURIER METHOD FOR THE SOLUTION OF HYPERBOLIC AND PARABOLIC EQUATIONS

Gökhan DOĞAN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2015; Page: 52

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

Learning the methods of solving limit value and initial value problems is one of the main problems for partial differential equations. One of the most used methods is Fourier method that is termed the separation of variables method. Non- trivial solve of limit value and initial value problems is searched for a solution according to functions product related to each variable in Fourier method. Ordinary differential equations are taken for these functions by writing this solution in equation. Suitable conditions for each equation are found by considering to the matter in problem's limit and initial condition. In this thesis, limit value and initial value problems' solutions were learned with examples of the application by the Fourier method for hyperbolic and parabolic type partial differential equations. Also, finding the solution was shown application of limit value and initial value problems' solutions by the Fourier method in various examples. When learning of the separation of variables method, resources that should be used was used to solution of hyperbolic and parabolic differential equations.

Keywords: Hyperbolic and parabolic differential equations, Fourier method, Shturm - Liouville problem, limit value - initial value problems

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamam da desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Öğr. Gör. Mehmet EKİCİ ve her zaman destekleyen sevgili eşim Rukiye DOĞAN'a sonsuz teşekkürü borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

KISALTMALAR ve SEMBOLLER LİSTESİ

$\frac{\partial x}{\partial t}$	:	$u(x,t)$ fonksiyonunun t değişkenine nazaran birinci mertebeden kısmi türevi
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	:	$u(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine nazaran ikinci mertebeden kısmi türevi
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	:	$u(x,t)$ fonksiyonunun t değişkenine nazaran ikinci mertebeden kısmi türevi
$u\big\|_{t=0}$	:	$u(x,t)$ fonksiyonunun $t=0$ noktasındaki değeri
$T'(t)$	:	$T(t)$ fonksiyonunun t ‘ye göre birinci mertebeden türevi
$T''(t)$	:	$T(t)$ fonksiyonunun t ‘ye göre ikinci mertebeden türevi
$\dot{u}_n(t)$	:	$u_n(t)$ fonksiyonunun t değişkenine nazaran birinci mertebeden türevi
$\ddot{u}_n(t)$	:	$u_n(t)$ fonksiyonunun t değişkenine nazaran ikinci mertebeden türevi
$J_0(x)$	:	0 indisli Bessel fonksiyonu

1.GİRİŞ

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer - başlangıç değer problemlerinin çözüm yöntemlerinin öğrenilmesi esas problemlerdendir. Bu çözüm yöntemlerinden en geniş kullanılan yöntemlerden biri de Fourier metodu olarak adlandırılan değişkenlerine ayırma yöntemidir. Fourier metodunda sınır değer - başlangıç değer probleminin trivial olmayan çözümü, her bir değişkene bağlı iki fonksiyonun çarpımı şeklinde aranır. Bu çözüm, denklemde yerine yazılmakla bu fonksiyonlar için adi türevli denklemler alınır. Ele alınan problemin sınır ve başlangıç şartlarının dikkate alınmasıyla her bir denklem için uygun şartlar bulunur.

Bu problemlerden biri kendisinde parametre bulunduran sınır değer problemi olur. Bu problemin parametrenin özel değerlerinde trivial olmayan çözümü olur. Parametrenin böyle özel değerlerine karakteristik değerler, bu karakteristik değerlere uygun çözümlere karakteristik fonksiyonlar denir. Bu karakteristik değerlere spektr**,** karakteristik değerlerin ve onlara uygun karakteristik fonksiyonların bulunması problemine spektral problem denir. Spektral probleme shturm – liouville problemi denir.

Bulunan karakteristik fonksiyonlar sisteminin, ortogonal sistem oluşturduğu ispatlanır. Bu yüzden ele alınmış kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü karakteristik fonksiyonlar sisteminin Fourier serisi şeklinde aranır. Bu serinin Fourier katsayıları olan fonksiyonlar ise uygun Cauchy probleminin çözümü olur. Bu yöntemle bulunmuş çözümün ele alınmış sınır değer - başlangıç değer probleminin klasik çözümü olduğunu ispatlamak için, serinin düzgün ve mutlak yakınsadığını, onu değişkenlere nazaran gereken mertebeden terim-terim diferansiyellemenin mümkün olduğunu ve sonsuz toplamın sınır ve başlangıç şartlarını sağladığını göstermek gerekir. Bunlar ele alınan problemin verilenleri belli şartlar sağladığında ispatlanır. Problemdeki kısmi türevli diferansiyel denklemin tipine bağlı olarak sınır değer ve başlangıç değer şartları birbirinden ayrılır.

Bu tezde hiperbolik ve parabolik tip kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer - başlangıç değer problemlerinin, Fourier metodunun uygulanmasıyla çözümünün bulunması metodu örneklerle gösterildi.

2.FOURİER METODUNUN UYGULANMASIYLA HİPERBOLİK TİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER – BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Fourier metodu veya değişkenlerine ayırma metodu olarak adlandırılan metot, kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer – başlangıç değer problemlerinin çözümünün bulunmasında uygulanan en önemli metotlardan biridir. Bu yöntemin şemasını, denklemi hiperbolik tip denklemler olan sonlu uzunluklu telin titreşimleri denklemi için sınır değer – başlangıç değer problemine uygulanmasını gösterelim.

2.1. Sonlu Uzunluklu Telin Titreşimleri Denkleminin Fourier Metodunun Uygulanmasıyla Çözümü

Sonlu uzunluklu telin titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell \tag{1.1}$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} \left(\propto \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right)_{x=0} &= 0\,, \\ \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)_{x=\ell} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= u(x,0) = \varphi(x)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o} &= u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini var sayalım [1]

Burada ele aldığımız (1.1) – (1.2) – (1.3) problemine sınır değer – başlangıç değer problemi denir. Bazen bu probleme karışık problem de denir. (1.1) denklemindeki $a^2 > 0$ sayısı sabit pozitif sayıdır. (1.2) sınır şartlarındaki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ katsayıları sabit reel sayılardır. (1.1) denkleminin sağ yanındaki f(x,t) fonksiyonu önceden verilmiş belli fonksiyondur. (1.1) denklemindeki f(x,t) fonksiyonu aynen sıfıra eşit olduğunda yani f(x,t) ≡ 0 olduğunda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell \tag{1.1'}$$

denklemine (1.1) denklemine uygun homojen denklem denir.

Fourier metodunun şemasına uygun olarak (1.1) denklemine uygun homojen (1.1′) denkleminin homojen (1.2) sınır şartlarını sağlayan aynen sıfıra eşit olmayan (trivyal olmayan)çözümü

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1.4}$$

şeklinde aranır. Bu (1.4) şeklindeki çözümü homojen (1.1′) denkleminde yerine yazıp değişkenlerine ayırarak

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \tag{1.5}$$

eşitliğini buluruz. Burada x ve t serbest değişkenler olduklarından sağ taraftaki orantı yalnız x değişkenine sol taraftaki orantı ise yalnız t değişkenine bağlı olduğundan (1.5) eşitliğinin her iki tarafı da aynı bir sabit sayıya eşit olması gerekir, yani

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda$$

Burada λ sabit sayıdır (parametredir).

Sonuncu eşitlikten X(x) ve T(t) fonksiyonları için uygun olarak aşağıdaki diferansiyel denklemlerin sağlamalarının gerektiğini buluruz:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \tag{1.6}$$

$$T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{1.7}$$

$u(x,t)$ fonksiyonunun (1.4) ifadesini (1.2) sınır şartlarında yerine yazarak

$$\big(\alpha X'(0) + \beta X(0)\big)T(t) = 0\,,$$

ve

$$(\gamma X'(\ell) + \delta X(\ell))T(t) = 0$$

eşitliklerini buluruz. Burada $T(t) \neq 0$ olduğundan (aksi halde trivyal $u(x,t) \equiv 0$ çözümü alınırdı), (1.6) denklemi için

$$\left.\begin{aligned} \big(\alpha X'(0) + \beta X(0)\big) = 0\ , \\ (\gamma X'(\ell) + \delta X(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

sınır şartlarının sağlanması gerektiğini buluruz.

Böylece , (1.4) eşitliğindeki X(x) fonksiyonu (1.6) denkleminin (1.8) sınır şartlarını sağlayan çözümü olmalıdır.

Şimdi λ parametresinin değerleri kümesini belirleyelim.

İlk olarak λ parametresinin yalnız pozitif değerler aldığını varsayalım. Yani $\lambda > 0$ olsun. O zaman (1.6) denkleminin genel çözümü

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

şeklinde bulunur. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabit sayılardır. C_1 ve C_2 sabitlerini öyle seçmemiz gerekir ki (1.8) sınır şartları da sağlansın. (1.8) sınır şartlarının sağlanması şartından C_1 ve C_2 sabitleri için

$$C_1\big(\beta + \alpha\sqrt{\lambda}\big) + C_2\big(\beta - \alpha\sqrt{\lambda}\big) = 0,$$

$$C_1\big(\beta + \alpha\sqrt{\lambda}\big)e^{\sqrt{\lambda}\ell} + C_2\big(\beta - \alpha\sqrt{\lambda}\big) = 0$$

lineer homojen cebirsel denklemler sistemi alınır. Bu cebirsel sistemin determinantı

$$\Delta(\lambda) = \big(\beta + \alpha\sqrt{\lambda}\big)\big(\beta - \alpha\sqrt{\lambda}\big)\left(e^{-\sqrt{\lambda}\ell} - e^{\sqrt{\lambda}\ell}\right)$$

şeklinde olur. Burada $\Delta(\lambda) \neq 0$ olduğunda $C_1 = C_2 = 0$ olur. Bu yüzden de $\Delta(\lambda) \neq 0$ halinde $X(x) \equiv 0$ ve uygun olarak $u(x,t) \equiv 0$ olur. Bu ise $u(x,t) \not\equiv 0$ şartına çelişki oluşturduğundan $\Delta(\lambda) = 0$ olması gerekir.

$\Delta(\lambda) = 0$ olması için $\lambda = -(\frac{\kappa\pi}{\ell})^2$, $\kappa = 12, \ldots$ olması gerekir. Bu ise $\lambda > 0$ şartına çelişki oluşturur. Demek ki $\lambda > 0$ olamaz.

Şimdi $\lambda = 0$ halini el alalım. Bu hal için (1.6) denkleminin genel çözümü

$$\mathrm{X(x)} = \mathrm{C_1} + \mathrm{C_2x}$$

şeklinde yazılır. Sınır şartlarını dikkate aldığımızda bu halde $C_1 = C_2 = 0$ olması gerekir, yani bu halde $X(x) \equiv 0$ ve $u(x,t) \equiv 0$ olur. Demek ki, $\lambda = 0$ da olamaz.

Son olarak $\lambda < 0$ halini ele alalım. $\lambda < 0$ halinde (1.6) denkleminin genel çözümü

$$\mathrm{X(x)} = \mathrm{C_1}\sin\sqrt{-\lambda}\mathrm{x} + \mathrm{C_2}\cos\sqrt{-\lambda}\mathrm{x}$$

şeklinde yazılır.

(1.8) sınır şartlarının sağlanması için C_1 ve C_2 sayıları aşağıdaki lineer cebirsel homojen denklemler sistemini sağlamasını gerektirdiği bulunur:

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{-\lambda}\mathrm{C_1} + \beta\mathrm{C_2} = 0 \\ \left(\gamma\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\ell + \delta\sin\sqrt{-\lambda}\ell\right)\mathrm{C_1} + \left(\delta\cos\sqrt{-\lambda}\ell - \gamma\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\ell\right)\mathrm{C_2} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemin determinantı

$$\Delta(\lambda) = (-\delta\beta + \lambda\delta\gamma).\tan\sqrt{-\lambda}\ell - (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-\lambda} \qquad (1.9)$$

şeklinde bulunur. (1.9) eşitliğinden $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin $\lambda < 0$ şartını sağlayan sonsuz sayıda çözümünün olduğu görülür. λ sayısının (1.9) denklemini sağlayan bu sonsuz değerlerine uygun (1.6) denkleminin (1.8) şartlarını sağlayan sonsuz sayıda sıfırdan farklı çözümleri bulunabilir.

Tanım: λ parametresinin bulunmuş belli değerlerinde (1.6) denkleminin (1.8) sınır şartlarını sağlayan trivyal olmayan çözümü bulunduğunda λ parametresinin bu değerlerine problemin karakteristik değerleri, problemin bu değerlere uygun trivyal olmayan çözümlerine problemin karakteristik fonksiyonları denir. Bu şekildeki probleme Shturm-Liouville problemi de denir [8].

Böylece, biz burada gösterdik ki, buradaki λ parametresi $\lambda < 0$ değerlerini alabilir. Bu yüzden buradaki λ parametresi yerine $-\lambda^2$ parametresini alalım.

O zaman (1.6) denklemi

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (1.6')$$

şeklinde yazılır ve bu denklemin genel çözümü

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x$$

şeklinde yazılır.

(1.9) eşitliğine dayanarak ele aldığımız problemin karakteristik sayıları

$$\tan\lambda\ell = \frac{(-\beta\gamma + \alpha\delta)\lambda}{\lambda^2\alpha\gamma + \beta\delta}$$

transendental denkleminin pozitif kökleri olur. Bu denklemin köklerini λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ ile, bu λ_n pozitif köklerine uygun problemin karakteristik fonksiyonlarını uygun olarak $X_n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$ ile işaret edelim. O zaman karakteristik fonksiyonlar için

$$X_n(x) = \cos\lambda_n x - \frac{\beta}{\alpha\lambda_n}\sin\lambda_n x$$

ifadesini buluruz.

Kolaylıkla karakteristik fonksiyonların $\{X_n(x)\}$ sistemi $[0,\ell]$ aralığında ortogonal sistem oluşturduğu gösterilir [8],

yani

$$\int_0^\ell X_n(x)\,X_k(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq n \\ \|X_n\|^2 \neq 0 & , \quad k = n \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır.

Bununla Fourier Metodunun birinci merhalesi (etabı) bitmiş olur.

Şimdi Fourier Metodunun ikinci merhalesini açıklayalım. Fourier metodunun ikinci merhalesinde (1.1) denkleminin çözümü formal olarak $X_n(x)$ karakteristik fonksiyonlarının

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \tag{1.10}$$

Fourier serisi şeklinde aranır. (1.10) serisi şeklindeki çözümünü (1.1) denkleminde yerine yazdığımızda aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t)]X_n(x) = f(x,t) \tag{1.11}$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki $f(x,t)$ fonksiyonunun $\{X_n(x)\}$ fonksiyonları sistemine nazaran Fourier serisine açılabilen fonksiyon olduğunu var sayalım ve

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x) \tag{1.12}$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{\ell} f(x,t)\, X_n(x)dx \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \tag{1.13}$$

açılımını (1.11) eşitliğinin sağ yanında yerine yazarak aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t)]X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x) \tag{1.14}$$

Fourier sersinin katsayılarının tekliği hakkındaki teoremi uygulyarak

$T_n(t)$ fonksiyonlarının bulunması için aşağıdaki

$$T_n''(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad n = 1,2, \ldots \tag{1.15}$$

denklemini buluruz. (1.10) şeklinde aranan çözümün (1.3) başlangıç şartlarını da sağlamasını isteyelim.

O zaman

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \varphi(x) \ , \\ u_t'(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \psi(x) \end{aligned}\right\}$$

Bu eşitliklerden $T_n(t)$ fonksiyonu için

$$\left.\begin{aligned} T_n(0) &= \varphi_n \quad n = 1,2,3,\ldots \quad , \\ T_n'(0) &= \psi_n \quad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

başlangıç şartlarını buluruz. Burada φ_n , $n = 1,2,3,\ldots$ ve ψ_n , $n = 1,2,3,\ldots$ sayıları uygun olarak $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının $X_n(x)$ sistemi üzere Fourier katsayıları olup

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^{\ell} \varphi(x)\, X_n(x)dx \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \\ \psi_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^{\ell} \psi(x)\, X_n(x)dx \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

eşitlikleri ile bulunurlar.

Böylece, (1.10) serisinin katsayıları $T_n(t)$ $n = 1,2,\ldots$ (1.15) denkleminin (1.16) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olması gerekir. (1.15) - (1.16) Cauchy probleminin çözümü

$$T_n(t) = \varphi_n \cos a\lambda_n t + \frac{1}{a\lambda_n}\psi_n \sin a\lambda_n t + \frac{1}{a\lambda_n}\int_0^1 f_n(\tau)\sin a\lambda_n(t-\tau)d\tau \tag{1.18}$$

formülü ile bulunur.

$T_n(t)$ katsayıları için bulduğumuz (1.18) ifadesini (1.10) açılımında yerine yazarak biz (1.1) - (1.2) - (1.3) probleminin formal olarak çözümünü

$$\begin{aligned} u(x,t) = \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos a\lambda_n t + \frac{1}{a\lambda_n}\sin a\lambda_n t\right] X_n(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t \sin a\lambda_n(t-\tau).\, f_n(\tau)d\tau\right] X_n(x) \end{aligned} \tag{1.19}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

(1.19) formülündeki birinci toplam $(1.1')$ homojen denkleminin (1.2) sınır şartlarını ve homojen olmayan (1.3) başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür. (1.19) formülündeki ikinci toplam homojen olmayan (1.1) denkleminin (1.2) sınır şatlarını ve (1.3) başlangıç şartlarına uygun homojen

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u'_t(x,0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.3')$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür.

Bununla Fourier metodunun ikinci merhalesi bitmiş olur.

Son olarak üçüncü merhalede (1.1)-(1.2)-(1.3) probleminin (1.19) formülü ile bulunmuş çözümünün klasik çözüm olduğu gösterilir. Bu merhalede Fourier metodunun hiperbolik tip denklemlerinin çözümünün bulunmasındaki işlemler esaslandırılır. Bu esaslandırmayı yapmak için (1.19) serisinin x ve t değişkenlerine nazaran iki kez terim-terim diferansiyellenmesinden alınan serilerin düzgün yakınsadığı (1.19) serisinin toplamının sınır ve başlangıç şartlarını sağladığı gösterilmelidir [2].

Teorem : $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,\ell]$ aralığında iki kez sürekli diferansiyellenen olduğunda, bu fonksiyon $[0,\ell]$ aralığında parça parça üçüncü mertebeden sürekli diferaniyellenen fonksiyon olduğunda ve

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0 \ , \ \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0 \qquad (1.20)$$

sınır şartlarını sağladığında , $\psi(x)$ fonksiyonu ise sürekli diferansiyellenen olduğunda, $[0,\ell]$ aralığında $\psi(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeden parça parça sürekli diferansiyellenen olduğunda ve

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0 \qquad (1.21)$$

sınır şartlarını sağladığında, f(x,t) fonksiyonu ise $[0,\ell] \times [0,T]$ dikdörtgeninde sürekli fonksiyon olduğunda her bir $t \in [0,T]$ için x değişkenine nazaran ikinci mertebeye dek sürekli diferansiyellenen olduğunda ve her bir $t \in [0,T]$ için

$$f(0,t) = f(\ell,t) = 0 \qquad (1.22)$$

sınır şartlarını sağladığında (1.19) serisi ile tanımlanan u(x,t) fonksiyonun ikinci mertebeye dek sürekli türevleri vardır, (1.1) denklemini sağlıyor, (1.2) sınır şartını ve (1.3) başlangıç şartlarını sağlar. (1.19) serisi x ve t değişkenlerine nazara iki kez parça parça diferansiyellenen olur. Bu diferansiyellemeden alınan seriler mutlak ve düzgün olarak $0 \leq x \leq \ell$, ve $t \geq 0$ için, yakınsak seriler olur.

Böylece, (1.19) serisi ile tanımlanan u(x,t) fonksiyonu (1.1)-(1.2)-(1.3) probleminin klasik çözümü olur [9].

Bu teoremin ispatı [9] kitabında verilmiştir.

Özel bir hal için bu teoremi yazıp ispatlayalım.

2.2. Sonlu Uzunluklu Telin Serbest Titreşimleri Denkleminin Fourier Metodu İle Bulunmuş Çözümünün Mutlak Ve Düzgün Yakınsaklığı Hakkında Teorem

Önceki kısımda Fourier metodunun uygulanmasıyla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < \ell\,, \qquad t > 0 \tag{2.1}$$

denkleminin

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(\ell,t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x)\,, \qquad 0 < x < \ell\,, \\ u_t(x,0) &= \psi(x)\,, \qquad 0 < x < \ell \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\frac{an\pi}{\ell} t + \frac{\ell}{an\pi} \psi_n \sin\frac{an\pi}{\ell} t \right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \tag{2.4}$$

serisi şeklinde bulundu.

Bu serideki φ_n ve ψ_n katsayıları uygun olarak φ_n ve ψ_n fonksiyonlarının $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}$ sistemi üzere $[0,\ell]$ aralığında Fourier katsayıları olup

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx\,, \qquad \psi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx \tag{2.5}$$

Formülleri ile hesaplanır.

(2.4) serisi toplamının $(2.1) - (2.2) - (2.3)$ probleminin çözümü olmasını kanıtlayan aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem: $(2.1) - (2.2) - (2.3)$ probleminde $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0, \ell]$ aralığında tanımlı iki kez sürekli diferansiyellenen ama üçüncü mertebeden parça-parça sürekli diferansiyellenen ve

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0\,, \qquad \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0 \tag{2.6}$$

sınır şartlarını sağladığında, $\psi(x)$ fonksiyonu da uygun olarak $[0, \ell]$ aralığında tanımlanmış sürekli diferansiyellenen ama ikinci mertebeden türevi parça parça sürekli olmakla

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0 \tag{2.7}$$

Sınır şartlarını sağladığında, (2.4) ve (2.5) formülleri ile bulunan $u(x, t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeye dek sürekli türevleri vardır ve (2.1) denklemini sağlar, (2.2) sınır şartlarını ve (2.3) başlangıç şartlarını da sağlar. (2.4) serisi ve x ve t değişkenlerine nazaran iki kez terim-terim diferansiyellenendir ve bu diferansiyellemelerden alınan seriler $0 \le x \le \ell$ aralığında her bir $t \ge 0$ için mutlak ve düzgün yakınsak serilerdir [8] , [9] .

İspat: Bu teoremi kısaca özetleyelim. (2.4) serisi ile bulunmuş çözümün (2.1) denklemini sağlaması için, önce bu seri x ve t değişkenlerine nazaran iki kez terim-terim diferansiyellenebilmelidir. Bunun için ise $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının aşağıdaki şartları sağlamaları gerekir:

1) $\varphi(x)$ fonksiyonunun $[0, \ell]$ aralığında birinci ve ikinci mertebeden türevleri var ve bu türevler $[0, \ell]$ aralığında süreklidirler, bu $\varphi(x)$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden $[0, \ell]$ aralığında türevi var ve üçüncü mertebeden türevi $[0, \ell]$ aralığında parça parça süreklidir ve ek olarak $\varphi(x)$ fonksiyonu

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0\,, \qquad \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0$$

sınır şartlarını da sağlamalıdır;

2) $\psi(x)$ fonksiyonu $[0,\ell]$ aralığında birinci mertebeden türevi var ve $[0,\ell]$ aralığında $\psi(x)$ fonksiyonunun türevi süreklidir $\psi(x)$ fonksiyonunun $[0,\ell]$ aralığında ikinci mertebeden de türevi var ve bu türev $[0,\ell]$ aralığında parça-parça süreklidir ve ek olarak fonksiyonu

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0$$

sınır şartlarını sağlar.

Böylece, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları uygun olarak 1) ve 2) şartlarını sağladığında (2.4) serisi x ve t değişkenlerine nazaran iki kez terim-terim diferansiyellenen olur ve diferansiyellenmeden sonra alınan seriler $[0,\ell]$ aralığında x değişkenine nazaran, $0 \le t \le T$ aralığında ise t değişkenine nazaran mutlak ve düzgün yakınsak olduklarını göstermemiz gerekir.

(2.4) serisinin toplamı olarak bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu 1) ve 2) şartlarını sağladığında (2.1) denkleminin (2.2) sınır şartlarını sağlayan ve (2.3) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olur.

Şimdi teoremi ispatlayalım.

Bunun için $\varphi(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayısı olan φ_n katsayısını alalım ve kısmi integrasyon formülünü uygulayarak φ_n katsayılarının değerlendirilmesini yapalım [9].

Burada

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$= -\frac{\ell}{n\pi}.\ \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)d\cos\frac{n\pi}{\ell}x = -\frac{\ell}{n\pi}.\ \frac{2}{\ell}\varphi(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\Big|_0^{\ell}$$

$$+\frac{\ell}{n\pi}.\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi'(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx = \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2.\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi'(x)d\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$= \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2.\frac{2}{\ell}\varphi'(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}\Big|_0^{\ell} - \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi''\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$= \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi''(x)d\ \cos\frac{n\pi}{\ell}x = \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{\ell}\varphi''(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\Big|_0^{\ell}$$

$$-\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx = -\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

Böylece,

$$\varphi_n = -\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\frac{\alpha_n}{n^3} \quad ,$$

burada

$$\alpha_n = \varphi_n''' = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx \tag{2.8}$$

Şimdi (2.4) serisindeki $\frac{\ell}{an\pi}\psi_n$ katsayısını ele alalım. Yani

$$\frac{\ell}{an\pi}\psi_n = \frac{\ell}{an\pi}\ .\ \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki integrale kısmi integrasyon formülünü uygulayarak buluruz:

$$\frac{\ell}{an\pi}\psi_n = \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)\frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$= -\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi(x)d\cos\frac{n\pi}{\ell}x = -\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\frac{2}{a\ell}\psi(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\Big|_0^\ell$$

$$+\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi'(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx = \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3.\frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi'(x)d\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$= \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3.\frac{2}{a\ell}\psi'(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}\,\Big|_0^\ell - \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi''\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$= -\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3\frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi''(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

Böylece,

$$\frac{\ell}{an\pi}\psi_n = -\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\frac{\beta_n}{n^3}$$

burada

$$\beta_n = \frac{2}{a\ell}\int_0^\ell \psi''\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx \tag{2.9}$$

Böylece, biz φ_n ve $\frac{\ell}{an\pi}\psi_n$ katsayıları için aşağıdaki ifadeleri bulduk:

$$\varphi_n = -\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\frac{\alpha_n}{n^3}, \qquad \frac{\ell}{an\pi}\psi_n = -\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\frac{\beta_n}{n^3} \tag{2.10}$$

Burada

$$0 \le \left(\frac{1}{n} - |\alpha_n|\right)^2$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\alpha_n|^2\right) \tag{2.11}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 \leq \int_0^{\ell}\left(\varphi'''(x)\right)^2 dx < +\infty \ ,$$

$$a^2\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2 \leq \int_0^{\ell}\left(\psi''(x)\right)^2 dx < +\infty$$

Bu eşitsizliklerden

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2$$

Serilerinin yakınsak seriler oldukları görülür.

(2.11) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri buluruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\right] \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2\right]$$

Bu sonuncu eşitsizliklerden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta_n|}{n}$$

Serilerinin yakınsak seriler oldukları görülür.

φ_n ve $\frac{\ell}{an\pi}\psi_n$ katsayılarının (2.10) formülleri ile bulunmuş ifadelerini (2.4) serisinde yerlerine yazarak (2.4) serisinin toplamı olan $u(x,t)$ fonksiyonu için aşağıdaki açılım bulunur:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3.\frac{1}{n^3}\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t+\beta_n\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (2.12)$$

(2.12) serisinin

$$u_n(x,t)=-\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3.\frac{1}{n^3}\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t+\beta_n\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

terimleri için aşağıdaki değerlendirme bulunur:

$$|u_n(x,t)|\le\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\left[\frac{1}{n^3}(|\alpha_n|+|\beta_n|)\right]$$

Bu eşitsizlikler her bir $x\in[0,\ell]$ ve her bir $t\in(-\infty,+\infty)$ için sağlanır.

Diğer yandan pozitif terimli sayısal

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

yakınsak seri olduğundan Weierstrass teoremine esasen (2.12) serisinin

$[0,\ell]\times(-\infty,+\infty)$ Bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu bulunur.

Diğer yandan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_n}{\partial t^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}$$

serisinin terimleri için

$$\left|\frac{\partial^2u_n}{\partial t^2}\right|\le C.\left(\frac{|\alpha_n|}{n}+\frac{|\beta_n|}{n}\right)\ ,$$

$$\left|\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}\right|\le D.\left(\frac{|\alpha_n|}{n}+\frac{|\beta_n|}{n}\right)$$

şeklinde değerlendirmeler bulunur.

Bu değerlendirmelerdeki C ve D katsayıları *n* sayısına bağlı olmayan belli sabit sayılardır.

Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{n}$$

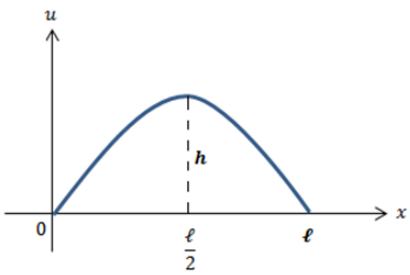
serileri yakınsak sayısal seriler olduklarından (2.4) serisinin x ve t değişkenlerine nazaran terim-terim iki kez diferansiyellenebildiği ve diferansiyellemeden alınan serilerin $[0, \ell] \times (-\infty, +\infty)$ bölgesinde düzgün ve mutlak yakınsak seriler oldukları Wierstrass teoremlerinin uygulanmasıyla ispatlanmış olur. Böylece teorem tam olarak ispatlandı [8].

2.3. Uçlarından Sabitleştirilmiş Sonlu Uzunluklu Telin Serbest Titreşimlerinin Denkleminin Fourier Metodu İle Çözümüne Ait Örnekler

Örnek 1: $x = 0$ ve $x = \ell$ uçlarından sabitleştirilmiş ℓ uzunluklu telin $t = 0$ anında profili (forması)

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{4h}{\ell^2} x(\ell - x)$$

Parabolü şeklinde olduğunu varsayalım (bak şekil 3.1).



$şekil$ 3.1

Şekil 3.1. $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{4h}{\ell^2} x(\ell - x)}$ fonksiyonunun grafiği

$t = 0$ anında telin noktalarının başlangıç hızının

0 olduğunu yani

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv 0$$

olduğunu varsayalım.

$t > 0$ için telin serbest titreşimlerini bulalım. Bunun için uçlardan sabitleştirilmiş ℓ uzunluklu telin serbest titreşimleri denkleminin

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

formülü ile bulunan çözümünde ψ_n katsayılarının $\psi_n \equiv 0$ almamız gerekir. φ_n katsayılarını bulmak için ise aşağıdaki integralleri hesaplamamız gerekir:

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{8h}{\ell^3}\int_0^{\ell}(\ell x - x^2)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

Burada bu integrale kısmi integrasyon formülünü iki kez uygulayarak buluruz:

$$\varphi_n = \frac{8h}{\ell^3}\int_0^{\ell}(\ell x - x^2)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= -\frac{8h}{\ell^3}(\ell x - x^2)\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\Big|_0^{\ell}$$

$$+ \frac{8h}{n\pi\ell^2}\int_0^{\ell}(\ell - 2x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= \frac{8h}{n\pi\ell^2}\int_0^{\ell}(\ell - 2x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{8h}{n^2\pi^2\ell}(\ell - 2x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\Big|_0^{\ell}$$

$$+ \frac{16h}{n^2\pi^2\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= -\frac{16h}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) = \frac{16h}{n^3\pi^3}(1 - (-1)^n)$$

Böylece

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16h}{n^3\pi^3}(1 - (-1)^n)\cos\frac{n\pi a}{\ell}t.\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

veya

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\,.\cos\frac{(2n+1)\pi a}{\ell}t\,.\sin\frac{(2n+1)\pi}{\ell}x$$

olur [2].

Örnek 2: $x=0$ ve $x=\ell$ noktalarında uçlardan sabitleştirilmiş ℓ uzunluklu telin başlangıç andaki durumu

$$u(x,0)=\varphi(x)\equiv 0$$

olduğunu varsayalım. Telin başlangıç anda noktalarının hızı

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\begin{cases} v_0 \ , & \left|x-\frac{\ell}{2}\right|<\frac{h}{2} \ , \\ 0 \ , & \left|x-\frac{\ell}{2}\right|>\frac{h}{2} \end{cases}$$

Formülü ile verildiğini varsayalım. Bu şartlarda telin titreşimlerini bulalım. Burada $\varphi(x)\equiv 0$ olduğundan telin $u(x,t)$ titreşimlerinin formülünde $\varphi_n=0$, $n=1,2,...$ almamız gerekir. $\frac{\ell}{an\pi}\psi_n$ katsayıları ise aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$\frac{\ell}{an\pi}\psi_n=\frac{2}{n\pi a}\int_{\frac{\ell-h}{2}}^{\frac{\ell+h}{2}}v_0\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=-\frac{2v_0}{n\pi a}.\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}\Bigg|_{\frac{\ell-h}{2}}^{\frac{\ell+h}{2}}$$

$$=\frac{2v_0\ell}{n^2\pi^2 a}\left[\cos\frac{n\pi(\ell-h)}{2\ell}-\cos\frac{n\pi(\ell+h)}{2\ell}\right]=\frac{4v_0\ell}{n^2\pi^2 a}\sin\frac{n\pi}{2}\,.\sin\frac{n\pi h}{2\ell}$$

Burada $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ formülü kullanıldı

Böylece,

$$u(x,t)=\frac{4v_0\ell}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\sin\frac{n\pi h}{2\ell}.\sin\frac{n\pi a}{\ell}.\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

olur [3].

2.4. Uçlardan Sabitleştirilmiş Sonlu Uzunluklu Telin Mecburi Titreşimleri Denkleminin Fourier Metodunun Uygulanmasıyla Çözümü

Sonlu ℓ uzunluklu telin uçlarının $x = 0$ ve $x = \ell$ noktalarında sabitleştirilmiş olduğunu varsayalım. Bu telin birim uzunluğuna etkisi $F(x,t)$ olan dış kuvvetin etkisi altında mecburi titreşimleri problemini ele alalım. Bu problem matematiksel olarak telin homojen olmayan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell \ , \ t > 0 \quad \left(f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}\right) \tag{4.1}$$

denkleminin

$$u(0,t) = 0 \ , \ u(\ell,t) = 0 \tag{4.2}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \ , \ 0 < x < \ell \ , \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \ , \ 0 < x < \ell \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine getirilir.

Burada biz $(4.1) - (4.2) - (4.3)$ probleminin Fourier metodunun uygulanması ile çözümünün bulunması yöntemini gösterelim.

Bu amaçla (4.1) denkleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \tag{4.4}$$

serisi şeklinde arayalım.

Dikkate alalım ki, (4.1) denkleminin çözümünü (4.4) serisi şeklinde aradığımızda (4.2) sınır şartları sağlanır. (4.4) serisinde $u_n(t)$ katsayıları t değişkenine bağlı aranan katsayılardır. (4.4) açılımındaki aranan $u_n(t)$ katsayılarını bulmak için $u(x,t)$ fonksiyonunun (4.4) formülü şeklinde aradığımız ifadesini (4.1) denkleminde yerine yazalım. O zaman buluruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t)\right\} \sin\frac{n\pi}{\ell} x = f(x,t) \tag{4.5}$$

Burada (4.5) eşitliğinin sağ yanındaki fonksiyonunda x değişkenine nazaran $0 < x < \ell$ aralığında $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}$ sistemi üzere Fourier serisine açılabildiğini varsayalım. Yani

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad , \tag{4.6}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x dx \quad , \tag{4.7}$$

şeklinde açıldığı varsayalım. $f(x,t)$ fonksiyonunun (4.6) açılımının (4.5) denkleminin sağ yanında $f(x,t)$ fonksiyonunun yerine yazarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t)\right\}\sin\frac{n\pi}{\ell}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

Bu sonuncu eşitliğe Fourier serilerinin katsayılarının tekliği teoremini uygulayarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = f_n(t) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.8}$$

(4.4) serisi şeklinde aradığımız çözümün (4.3) başlangıç şartlarını sağlaması için

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{n\pi}{\ell}x = \varphi(x) \quad , \quad 0 < x < \ell \quad , \tag{4.9}$$

$$u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0)\sin\frac{n\pi}{\ell}x = \psi(x) \quad , \quad 0 < x < \ell \quad , \tag{4.10}$$

Eşitliklerinin sağlanması gerekir.

Burada biz (4.3) başlangıç şartlarında verilen $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının $0 < x < \ell$ aralığında $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}$ sistemi üzere Fourier serisine açılabildiklerini varsaydığımızda, o zaman (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden $u_n(t)$ fonksiyonu ve onun $\dot{u}_n(t)$ türevi için aşağıdaki başlangıç şartlarının sağlanmasının gerektiğini buluruz:

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n \ , \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Burada φ_n ve ψ_n sayıları uygun olarak φ_n ve ψ_n fonksiyonlarının $0 < x < \ell$ aralığında $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}$ sistemi üzere Fourier katsayıları olup

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x dx \ , \tag{4.12}$$

$$\psi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x dx \tag{4.13}$$

formülleri ile tanımlanır.

Böylece, (4.4) serisinin $u_n(t)$ katsayılarını bulmak için homojen olmayan

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = f_n(t) \tag{4.14}$$

denkleminin homojen olmayan

$$u_n(0) = \varphi_n \ , \tag{4.15}$$

$$\dot{u}_n(0) = \psi_n \tag{4.16}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir.

$(4.14) - (4.15) - (4.16)$ başlangıç değer problemini çözmek için (4.14) denkleminin çözümünü

$$u_n(t) = v_n(t) + w_n(t) \tag{4.17}$$

toplamı şeklinde arayalım. Burada $v_n(t)$ fonksiyonu homojen

$$\ddot{v}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 v_n(t) = 0 \tag{4.18}$$

denkleminin homojen olmayan

$$v_n(0) = \varphi_n \ , \tag{4.19}$$

$$\dot{v}_n(0) = \psi_n \tag{4.20}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür. $w_n(t)$ fonksiyonu ise homojen olmayan

$$\ddot{w}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 w_n(t) = f_n(t) \tag{4.21}$$

denkleminin homojen

$$w(0) = 0 \ , \tag{4.22}$$

$$\dot{w}_n(0) = 0 \tag{4.23}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür.

Bu problemleri çözmek için homojen (4.18) denkleminin karakteristik denklemini yazalım:

$$k^2 + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 = 0 \ \ ,$$

bu denklemin kökleri

$$k_{1,2} = \pm \ \left(\frac{an\pi}{\ell}\right) i \ \ , \ \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

olduğundan (4.18) denkleminin $k_1 = \frac{an\pi}{\ell} i$ ve $k_2 = -\frac{an\pi}{\ell} i$ karakteristik değerlerine uygun lineer bağımsız çözümleri uygun olarak

$$\cos\frac{an\pi}{\ell}t \ \ , \ \ \sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

fonksiyonları olur. Böylece, (4.18) denkleminin genel çözümü

$$V_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t \tag{4.24}$$

Şeklinde yazılır. Burada A_n ve B_n keyfi sabit sayılardır.

(4.18) denkleminin (4.24) genel çözümündeki A_n ve B_n katsayılarını öyle seçelim ki (4.19) ve (4.20) başlangıç şartları sağlansın. Yani

$$V_n(0) = A_n = B_n \ \ ,$$

$$\dot{V}_n(0) = \frac{an\pi}{\ell} B_n = \psi_n$$

şartlarının sağlanması gerekir.

Böylece, (4.8) denkleminin (4.19) - (4.20) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$V_n(t) = \varphi_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t \tag{4.25}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi homojen olmayan (4.21) denkleminin homojen (4.22) ve (4.23) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü Lagrange'in sabitlerin varyasyonu metodunu uygulayarak bulalım.

Lagrange'in sabitlerin varyasyonu metoduna uygun olarak homojen (4.18) denkleminin genel (4.24) çözümündeki A_n ve B_n sabitlerinin değişkenine bağlı fonksiyonlar olduklarını varsayarak homojen olmayan (4.21) denkleminin homojen (4.22) ve (4.23) şartlarını sağlayan çözümünü

$$W_n(t) = A_n(t)\cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n(t)\sin\frac{an\pi}{\ell}t \tag{4.26}$$

şeklinde arayalım.

Sabitlerin varyasyonu metodunda (4.26) çözümündeki $A_n(t)$ ve $B_n(t)$ katsayıları öyle seçilir ki, $W_n(t)$ çözümünün birinci mertebeden türevini aldığımızda $A_n(t)$ ve $B_n(t)$ katsayılarının sabit katsayılar gibi olması ve $\dot{W}_n(t)$ türevinin

$$\begin{aligned}\dot{W}_n(t) &= A_n(t).\left(\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)' + B_n(t).\left(\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)' + A_n'(t).\cos\frac{an\pi}{\ell}t \\ &\quad + B_n'(t).\sin\frac{an\pi}{\ell}t \\ &= A_n(t).\left(\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)' + B_n(t).\left(\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)'\end{aligned} \tag{4.27}$$

şekilli olması istenir.

İkinci mertebeli $\ddot{w}_n(t)$ türevi

$$\ddot{W}_n(t) = A_n(t).\left(\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)'' + B_n(t).\left(\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)'' + A_n'(t).\left(\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)' + B_n'(t).\sin\left(\frac{an\pi}{\ell}t\right)' \tag{4.28}$$

Burada $\ddot{W}_n(t)$ türevinin (4.28) ifadesini ve $W_n(t)$ fonksiyonunun (4.26) ifadesini (4.21) denkleminde yerlerine yazdığımızda $\cos\frac{an\pi}{\ell}t$ ve $\sin\frac{an\pi}{\ell}t$ fonksiyonlarının (4.18) homojen denkleminin çözümleri olduklarını dikkate aldığımızda aşağıdaki

$$A_n'(t).\left(\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)' + B_n'(t).\sin\left(\frac{an\pi}{\ell}t\right)' = f_n(t) \qquad (4.29)$$

eşitliğinin de sağlanmasının gerektiğini buluruz.

Böylece, $A_n'(t)$ ve $B_n'(t)$ türevlerinin bulunması için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini bulmuş oluruz:

$$\begin{cases} A_n'(t).\cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n'(t)\sin\frac{an\pi}{\ell}t = 0 \\ \\ A_n'(t).\left(-\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)B_n'(t)\cos\frac{an\pi}{\ell}t = f_n\,(t) \end{cases} \qquad (4.30)$$

Bu sistemi $A_n'(t)$ ve $B_n'(t)$ bilinmeyenlerine nazaran Kramer yöntemi ile çözüp $A_n'(t)$ ve $B_n'(t)$ türevlerini bulalım. Bunun için önce sistemin determinantını hesaplayalım:

$$W = \begin{vmatrix} \cos\frac{an\pi}{\ell}t & \sin\frac{an\pi}{\ell}t \\ \\ -\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t & \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t \end{vmatrix} = \frac{an\pi}{\ell}$$

Sonra uygun olarak Kramer yönteminin uygulanması ile buluruz:

$$A'_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{an\pi}{\ell}t \\ f_n(t) & \frac{an\pi}{\ell}\cos\frac{an\pi}{\ell}t \end{vmatrix}}{W} = -\frac{\ell}{an\pi} f_n(t)\sin\frac{an\pi}{\ell}t\ ,$$

$$B'_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\frac{an\pi}{\ell}t & 0 \\ -\frac{an\pi}{\ell}\sin\frac{an\pi}{\ell}t & f_n(t) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\ell}{an\pi} f_n(t)\cos\frac{an\pi}{\ell}t$$

Dikkate alalım ki, (4.21) denkleminin (4.26) şeklinde aranan çözümünün (4.22) ve (4.23) şartlarını sağlaması için $A_n(0) = 0$ ve $B_n(0) = 0$ şartlarının sağlaması (4.26) ve (4.27) eşitliğinden görülür. Bu yüzden

$$A'_n(t) = -\frac{\ell}{an\pi} f_n(t)\sin\frac{an\pi}{\ell}t\ ,$$

$$B'_n(t) = \frac{\ell}{an\pi} f_n(t)\cos\frac{an\pi}{\ell}t$$

denklemlerini uygun olarak $A_n(0) = 0$ ve $B_n(0) = 0$ şartlarında çözerek buluruz:

$$A_n(t) = -\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ ,$$

$$B_n(t) = \frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ .$$

$A_n(t)$ ve $B_n(t)$ katsayıları için bulduğumuz bu ifadeleri (4.26) açılımında yerlerine yazarak buluruz:

$$W_n(t) = \frac{\ell}{an\pi}\int_0^t \left[\sin\frac{an\pi}{\ell}t\,.\cos\frac{an\pi}{\ell}\tau - \sin\frac{an\pi}{\ell}\tau\,.\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right] f_n(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{\ell}{an\pi}\int_0^t \sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau$$

Böylece, homojen olmayan (4.21) denkleminin homojen (4.22) ve (4.23) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$W_n(t) = \frac{\ell}{an\pi}\int_0^t \sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau \qquad (4.31)$$

formülü ile bulunur.

Böylece, (4.14) denkleminin (4.15) - (4.16) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü aşağıdaki şekilde bulmuş oluruz:

$$U_n(t) = \varphi_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t$$
$$+ \frac{\ell}{an\pi}\int_0^t \sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau \qquad (4.31)$$

Böylece, $u_n(t)$ katsayıları için bulduğumuz (4.31) ifadesini (4.4) açılımında $u_n(t)$ katsayılarının yerlerine yazdığımızda (4.1) denkleminin (4.2) sınır şartlarını sağlayan ve (4.3) başlangıç şartlarınısağlayan çözümünü aşağıdaki şekilde bulmuş oluruz:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t \sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (4.32)$$

Burada dikkate alalım ki, (4.1) denkleminin sağ yanındaki $f(x,t)$ fonksiyonu $[0,\ell] \times [0,T]$ bölgesinde ikinci mertebeye dek (ikinci mertebede dahil olmakla) sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğunda ve her bir $t \geq 0$ için

$$f(0,t) = 0 \quad , \quad f(\ell,t) = 0$$

sınır şartlarını da sağladığında (4.32) formülündeki ikinci

$$U_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ell}{an\pi} \int_0^t \sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \tag{4.33}$$

serisi ve bu serinin x ve t değişkenlerine nazaran iki kez diferansiyellenmesinden alınan seriler mutlak ve düzgün yakınsak olurlar ve (4.33) serisinin toplamı olan $U_2(x,t)$ fonksiyonu (4.1) denkleminin (4.2) sınır şartlarını ve homojen

$$U(x,0) = 0 \quad , \quad U_t(x,0) = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan klasik çözümü olur.

Ama (4.32) formülündeki birinci toplam homojen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin (4.2) sınır şartlarını ve homojen olmayan (4.3) başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür.

2.5. Sonlu uzunluklu Telin Mecburi Titreşimleri Denkleminin Homojen Olmayan Lineer Sınır değer - başlangıç değer Probleminin Fourier Metodunun Uygulanmasıyla Çözümü

Şimdi biz burada sonlu ℓ uzunluklu telin mecburi titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0 \tag{5.1}$$

denkleminin, örneğin homojen olmayan

$$u(0,t) = \varkappa_1(t), \quad u(\ell,t) = \varkappa_2(t) \tag{5.2}$$

sınır şartlarını sağlayan ve

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.3}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Dikkate alalım k, (5.2) şartları ele aldığımız telin $x = 0$ ucunun $u(0,t) = \varkappa_1(t)$ kuralı ile hareket ettiğini, $x = \ell$ ucunun ise $u(\ell,t) = \varkappa_2(t)$ kuralı ile hareket ettiğini gösterir.

(5.2) sınır şartları homojen olmasından dolayı Fourier metodunu direk bu problemin çözümünün bulunmasına uygulayamıyoruz. Bu yüzden $(4.1) - (5.2) - (5.3)$ probleminin çözümünü

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{5.4}$$

şeklinde arayalım. Burada

$$w(x,t) = \varkappa_1(t) + [\varkappa_2(t) - \varkappa_1(t)\,]\frac{x}{\ell} \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyondur. Bu fonksiyon (5.2) sınır şartlarını sağlar.

$$w(x,t) = \varkappa_1(t)\ , \qquad w(\ell,t) = \varkappa_2(t) \tag{5.6}$$

(2.4) eşitliğindeki $v(x,t)$ yeni aranan fonksiyon olup

$$v(0,t) = 0\ , \quad v(\ell,t) = 0 \tag{5.7}$$

sınır şartlarını sağlaması ve

$$\begin{cases} v\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - w\big|_{t=0} = \varphi(x) - \varkappa_1(0) - [\varkappa_2(0) - \varkappa_1(0)]\frac{x}{\ell} = \overline{\varphi}(x), \\ \\ v'\big|_{t=0} = u'\big|_{t=0} - w'\big|_{t=0} = \psi(x) - \varkappa_1'(0) - [\varkappa_2'(0) - \varkappa_1'(0)]\frac{x}{\ell} = \overline{\psi}(x) \end{cases} \tag{5.8}$$

başlangıç şartını sağlaması gerekir. (5.4) ifadesini (5.1) denkleminde yerine yazdığımızda aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

burada $w(x,t)$ nin (5.5) ifadesini kullanarak buluruz.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t), \tag{5.9}$$

burada

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \varkappa_1''(t) - [\varkappa_2''(t) - \varkappa_1''(t)]\frac{x}{\ell} \qquad (5.10)$$

Böylece, $v(x,t)$ fonksiyonunun bulunması için aşağıdaki homojen sınır şartlı problemi çözmemiz gerekir.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x,t)$$

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{x=\ell} = 0,$$

$$v\big|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), \quad v'\big|_{t=0} = \bar{\psi}(x)$$

Bu problemi Fourier metodunun uygulanması ile çözebiliriz.

Dikkate alalım ki, (5.4) açılımındaki $w(x,t)$ fonksiyonu farklı farklı yöntemlerle seçilebilir. Bunu örneklerle gösterelim.

Örnek 1: Burada biz $(5.1) - (5.2) - (5.3)$ probleminde özel halde

$f(x,t) = f(x)$, $\varkappa_1(t) = \alpha = \text{const}$, $\varkappa_2(t) = \beta = \text{const}$ olduğunda (5.4) açılımındaki $w(x,t)$ fonksiyonunun başka bir yöntemle seçilebildiğini gösterelim. Bu halde ele alınmış problemin çözümünü

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad (5.11)$$

şeklinde arayalım ve buradaki $w(x)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki, bu fonksiyon

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} f(x) \qquad (5.12)$$

denkleminin

$$w(0) = \alpha, \quad w(\ell) = \beta \qquad (5.13)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümü olsun.

(5.12) probleminin (5.13) şartlarını sağlayan çözümü

$$w(x) = \frac{\beta - \alpha}{\ell} x + \frac{x}{a^2 \ell} \int_0^\ell dy \int_0^y f(\xi) d\xi - \frac{1}{a^2} \int_0^x dy \int_0^y f(\xi) d\xi + \alpha \qquad (5.14)$$

şeklinde bulunur.

Bu halde $v(x,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < \ell \, , \qquad t > 0 \tag{5.15}$$

denkleminin

$$v(0,t) = 0 \;\; , \;\; v(\ell,t) = 0 \tag{5.16}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) \; &= \varphi(x) - w(x) = \overline{\varphi}(x) \\ v_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümüdür. $(5.15) - (5.16) - (5.17)$ şeklinde problemin Fourier metodu ile çözümü yöntemini önceki paragrafta örnek gösterdik.

Örnek 2: Bu örnekte aşağıdaki homojen olmayan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t \;\; , \;\; 0 < x < \ell \;\; , \;\; t > 0 \tag{5.18}$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u'_x(0,t) &= 0 \;\; , \\ u'_x(\ell,t) &= \frac{2}{a} \sin \frac{2\ell}{a} \sin 2t \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \;\; , \\ u'_t(x,o) &= -2\cos \frac{2x}{a} \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümün Fourier metodunun uygulanması ile çözülebilecek şekle getirilmesini gösterelim.

Önce $(5.18) - (5.19) - (5.20)$ probleminin çözümünü

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{5.21}$$

şeklinde arayalım. (5.18) denkleminin sağ yanında $f(x,t)$ fonksiyonunun

$$f(x,t) = \sin 2t$$

ve sınır şartının sağ yanındaki $\varkappa_2(t)$ fonksiyonunun

$$\varkappa_2(t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2\ell}{a}\sin 2t$$

şeklinde olması (5.21) açılımındaki $w(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şeklinde aranmasına imkan sağlar.

$$w(x,t) = f(x,t).\sin 2t \tag{5.22}$$

(5.21) ifadesini (5.18) denkleminde yerine yazıp, sonra (5.21) ifadesini (5.19) sınır şartlarında da yerine yazıp, daha sonra alınmış eşitliklerde (5.22) açılımını kullanarak (5.22) açılımındaki aranan f(x) fonksiyonu için aşağıdaki sınır değer problemini buluruz:

$$a^2 f''(x) + 4f(x) + 1 = 0 \ , \tag{5.23}$$

$$f'(0) = 0 \ , \ f'(\ell) = \frac{2}{a}\sin\frac{2\ell}{a} \tag{5.24}$$

$(5.23) - (5.24)$ probleminin çözümü

$$f(x) = -\left(\frac{1}{4} + \cos\frac{2x}{a}\right) \tag{5.25}$$

şeklinde bulunur.

Bu halde (5.21) eşitliğine dahil olan ve aranan $v(x,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ , \quad 0 < x < \ell \ , \quad t > 0 \tag{5.26}$$

denkleminin

$$v_x(0,t) = 0 \ , \quad v_x(\ell,t) = 0 \tag{5.27}$$

sınır şartlarını ve

$$v(x,0) = 0 \ , \quad v_t'(x,0) = \frac{1}{2} \tag{5.28}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olur.

$(5.26)-(5.27)-(5.28)$ probleminin $v(x,t)$ çözümünü bulup ve $w(x,t)$ in bulunmuş çözümünü (5.21) eşitliğinde yerine yazarak ele aldığımız $(5.18)-(5.19)-(5.20)$ problemin çözümünü

$$u(x,t)=\frac{t}{2}-\left(\frac{1}{4}\cos\frac{2x}{a}\right)\sin 2t \qquad (5.29)$$

şeklinde buluruz.

Değişkenlerine ayırma yöntemi

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D(x)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x)\frac{\partial u}{\partial t}+G(x)u=f(x,t)$$

Şekilli hiperbolik tip diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunmasında da uygulanır. Burada biz bunun fiziksel özelliklerine göre homojen olmayan telin serbest titreşimleri denkleminin sınır değer - başlangıç değer probleminin özel bir hali için uygulanmasıyla çözümünün bulunmasında gösterelim.

2.6. Homojen Olmayan Telin Serbest Titreşimleri Denkleminin Fourier Metodunun Uygulanmasıyla çözümü

Homojen olmayan telin serbest titreşimlerinin

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u \quad , \quad 0<x<\ell \quad , \quad t>0 \qquad (6.1)$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=0\,, \\ u(\ell,t)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x)\,, \\ u_t'(x,0)&=\psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

(3.1) denklemindeki $k(x), q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $0\le x\le 1$ aralığında tanımlanmış sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar olmakla

$$k(x) > 0\,, \qquad q(x) > 0\,, \qquad \rho(x) > 0$$

şartlarını sağlayan pozitif fonksiyonlardır.

(6.1) – (6.2) – (6.3) probleminin Fourier metodunun uygulanmasıyla özel silindir ile ve küresel fonksiyonlar vasıtasıyla çözümü bulunur [2].

Bunu bir örnekle gösterelim

Örnek: Aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u \qquad , \quad 0 < x < \ell \quad , \quad t > 0 \tag{6.4}$$

denkleminin

$$u(0,t) < \infty \quad , \quad u(\ell,t) = 0 \tag{6.5}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad ,$$

$$u'_t(x,0) = \psi(x) \tag{6.6}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Fourier metodu şemasına dayanarak (6.4) denkleminin (6.5) sınır şartlarını sağlayan homojen olmayan çözümünü

$$u(x,t) = X(x).T(t) \tag{6.7}$$

şeklinde arayalım. (6.7) şeklindeki çözümü (6.4) denkleminde ve (6.5) sınır şartlarında yerlerine yazarak değişkenlerine ayırıp, ele alınan problemin uygun spektral denklemini

$$\left(xX'(x)\right)' + \mu^2 X(x) = 0 \tag{6.8}$$

$$X(0) < \infty \ , \quad X(\ell) = 0 \tag{6.9}$$

şeklinde buluruz. Burada

$$\mu^2 = \lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \tag{6.10}$$

şeklinde parametredir.

Bu (6.8) – (6.9) problemin çözümü 0-mertebeli Bessel fonksiyonu vasıtasıyla bulunur [3].

Böylece, $X(x) < \infty$ şartını dikkate alarak

(6.8) – (6.9) probleminin genel çözümünü

$$X(x) = CJ_0(\mu\sqrt{x}) \tag{6.11}$$

şeklinde buluruz. Burada $C \neq 0$ olmalıdır aksi halde trivial çözüm alınırdı. (Burada $J_0(\mu\sqrt{x})$ fonksiyonu 0 indisli Bessel fonksiyonudur.)

(6.11) çözümünü (6.9) sınır şartının ikincisinde yerine yazıp $C \neq 0$ olduğunu kullanarak ele aldığımız problemin karakteristik değerlerinin

$$J_0\left(\mu\sqrt{\ell}\right) = 0 \tag{6.12}$$

denkleminin kökleri olduklarını buluruz. Burada

$$J_0(\mu) = 0$$

denkleminin pozitif köklerini

$$\mu_1, \mu_2, \dots \ , \mu_n, \dots$$

gibi gösterelim. O zaman (6.12) denkleminin kökleri

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{\ell}}, \frac{\mu_2}{\sqrt{\ell}}, \dots \ \frac{\mu_n}{\sqrt{\ell}}, \dots$$

olur.

Böylece ele aldığımız problemin karakteristik sayıları

$$\frac{\mu_n}{\sqrt{\ell}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6.13}$$

Bu karakteristik sayılara uygun karakteristik fonksiyonları

$$X_n(x) = J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6.14}$$

fonksiyonları olur.

Burada $\left\{J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right)\right\}$ Bessel fonksiyonları sisteminin $[0,\ell]$ aralığında tam ortogonal sistem olduğunu dikkate alarak ele aldığımız (6.4) – (6.5) – (6.6) sınır değer - başlangıç değer probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \tag{6.15}$$

Fourier serisi şeklinde arayıp $J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right)$

Karakteristik fonksiyonlarına uygun $T_n(t)$ fonksiyonları için

$$T_n''(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t) = 0\,, \tag{6.16}$$

$$\left.\begin{aligned} T_n(t) &= \varphi_n \;, \\ T_n'(t) &= \psi_n \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Cauchy problemini alırız.

Burada

$$\lambda_n^2 = \mu_n^2 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$$

(6.16) – (6.17) probleminin genel çözümü

$$T_n(t) = A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t \tag{6.18}$$

şeklinde yazılır.

Böylece, (6.4) – (6.5) probleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t\}\, J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \tag{6.19}$$

şeklinde bulunur.

(6.19) şeklindeki çözümün (6.6) başlangıç şartlarını da sağlaması için

$$A_n = \frac{1}{\ell J_1^2(\mu_n)}\int_0^{\ell} \varphi(x) J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) dx \;\;,$$

$$B_n = \frac{1}{a\ell\lambda_n J_1^2(\mu_n)} \int_0^{\ell} \psi(x) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) dx$$

şeklinde seçilir.

Burada $J_1(x)$ 1-mertebeli Bessel fonksiyonudur ve

$$J_1^2(\mu_n) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} J_0^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) dx = \left\| J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{\ell}}\right)\right\|^2$$

Bakınız [3].

Fourier metodu katsayıları (x, y) ve u değişkenlerine bağlı çok boyutlu hiperbolik tip fonksiyonel denklemlerin çözümünün bulunmasında da kullanılır. Biz bunu dikdörtgen şekilli zarın titreşimleri denkleminin çözümünün bulunmasında gösterelim.

2.7.Dikdörtgen Şekilli Zarın Serbest Titreşimleri Denkleminin Fourier Metodu İle Çözümü

Dikdörtgen şekilli zarın serbest titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad 0 < x < s, \qquad 0 < y < p, \qquad t > 0 \tag{7.1}$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u'_x(s, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u'_y(x, p, t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, 0) = Ax.y \quad , \\ u'_t(x, y, 0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü Fourier metodunun uygulanmasıyla bulunmasını gösterelim. Burada A sabit sayıdır.

Fourier metodu şemasına dayanarak (7.1) denkleminin (7.2) sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümünü

$$U(x, y, t) = Z(x, y).T(t) \tag{7.4}$$

şeklinde arayalım. O zaman $Z(x, y)$ ve $T(t)$ fonksiyonları için

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda^2 z=0 \tag{7.5}$$

ve

$$T''(t)+(a\lambda)^2 T(t)=0 \tag{7.6}$$

denklemlerini buluruz.

Uygun olarak (7.5) denkleminin trivial olmayan çözümünü

$$Z(x, y)=X(x)Y(y) \tag{7.7}$$

şeklinde arayarak X(x) ve Y(y) fonksiyonları için aşağıdaki sınır değer problemlerinin buluruz:

$$X''(x)+\mu^2 X(x) \tag{7.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} X(0)=0\ , \\ X'(s)=0 \end{array}\right\} \tag{7.9}$$

$$Y''(y)+\gamma^2 Y(y) \tag{7.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y(0)=0\ , \\ Y'(p)=0 \end{array}\right\} \tag{7.11}$$

Burada $\gamma^2=\lambda^2-\mu^2$

(7.8) – (7.9) probleminin çözümünü

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2s}x\ , \quad n=0,1,2, \ldots \tag{7.12}$$

şeklinde buluruz.

Uygun olarak (7.10) – (7.11) probleminin de çözümünü

$$Y_k(y) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}y\ , \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{7.13}$$

şeklinde buluruz.

Böylece, ele aldığımız problemin karakteristik sayıları

$$\lambda_{kn} = \sqrt{\gamma_k^2 + \mu_n^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2p}(2k+1)\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2s}(2n+1)\right)^2} \tag{7.14}$$

şeklinde ve karakteristik sayılara uygun karakteristik fonksiyonlar

$$Z_{kn}(x,y) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2s}x.\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}y \tag{7.15}$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden ele alınan problemin çözümü

$$U(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(t)Z_{kn}(x,y) \tag{7.16}$$

Şeklinde aranır. Uygun olarak $T_{kn}(t)$ fonksiyonlarının alınması için

$$T_{kn}'' + (a\lambda_{kn})^2.T_{kn}(t) = 0 \tag{7.17}$$

$$T_{kn}(0) = \varphi_{kn}T_{kn}'(0) = \psi_{kn} \tag{7.18}$$

Cauchy problemini çözmemiz gerekir.

Burada φ_{kn} ve ψ_{kn} sayıları uygun olarak $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$ ve $u_t'(x,y,0) = \psi(x,y)$ başlangıç fonksiyonlarının $\{Z_{kn}(x,y)\}$ sistemi üzere Fourier katsayılarıdır. Ele aldığımız problemde $\psi(x,y) \equiv 0$ olduğundan $\psi_{kn} \equiv 0$ olur, $\varphi(x,y) = A.xy$ olduğundan

$$\varphi_{kn} = \frac{1}{\|Z_{kn}\|^2}\int_0^p dy\int_0^s \varphi(x,y)Z_{kn}(x,y)dx \tag{7.19}$$

formülüne dayanarak direk hesaplayarak

$$\|Z_{kn}\|^2 = \frac{p.s}{4}\ , \tag{7.20}$$

$$\varphi_{kn} = \frac{(-1)^{k+n}64p.s}{\pi^4(2k+1)^2(2n+1)^2}\ , \qquad k,n = 0,1,2,\ldots \tag{7.21}$$

ifadelerini buluruz.

(7.17) – (7.18) probleminin bu hal için çözümü

$$T_{kn}(t) = \varphi_{kn} \cos a\lambda_{kn} t \tag{7.22}$$

şeklinde bulunur.

Son olarak $Z_{kn}(x, y)$ ve $T_{kn}(t)$ için bulunmuş ifadeleri (7.16) açılımında yerlerine yazarak ele aldığımız $(7.1) - (7.2) - (7.3)$ probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz.

$$u(x, y, t) = \frac{64}{\pi^4} \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+1)^2(2k+1)^2} \cos a\lambda_{kn} t.\sin\mu_n x.\sin\gamma_k y \ , \tag{7.23}$$

burada

$$\mu_n = \frac{\pi}{2s}(2n+1) \ , \tag{7.24}$$

$$\gamma_k = \frac{\pi}{2p}(2k+1)$$

3. DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA YÖNTEMİNİN PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER - BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI

En sade parabolik denkleme örnek ısı iletişimi denklemidir. Burada biz parabolik denklemler için sınır değer – başlangıç değer problemlerinin çözümüne Fourier metodunun uygulanmasını, ısı iletişimi denkleminin sınır değer – başlangıç değer probleminin çözümünün bulunmasına uygulayarak göstereceğiz.

3.1.Sonlu Uzunluklu Telde Homojen Olmayan Isı İletişimi Denkleminin Fourier Metodunun Uygulanması İle Çözümü

Isı iletişiminin homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < \ell\ , t > 0 \tag{1.1}$$

denkleminin

$$u(0,t) = 0\ \ ,\ \ u(\ell,t) = 0 \tag{1.2}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,0) = \varphi(x)\ \ ,\ \ 0 < x < \ell \tag{1.3}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini varsayalım

$(1.1) - (1.2) - (1.3)$ problemini Fourier metodunun uygulanması ile çözmek için, Fourier metodu şemasına dayanarak (1.1) denklemine uygun homojen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < \ell \quad , \quad t > 0 \tag{1.1'}$$

denkleminin homojen

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \tag{1.2}$$

sınır şartlarını sağlayan ve trivial olmayan çözümünü

$$U(x,t) = X(x).T(t)$$

şeklinde arayarak X(x) fonksiyonunun bulunması için

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \ ,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(\ell) = 0$$

spektral problemini alırız. Bu sonuncu problemi çözerek $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, \dots$ karakteristik değerlerine uygun $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}x$, $n = 1, 2, \dots$ karakteristik fonksiyonlarını buluruz. Sonra da Fourier metodunun şemasına dayanarak $(1.1) - (1.2) - (1.3)$ probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x \tag{1.4}$$

şeklinde ararız. (1.4) şeklindeki (1.2) sınır şartlarını sağlıyor. (1.4) serisindeki aranan $T_n(t)$ katsayıları fonksiyonunu bulmak için (1.4) açılımını ve

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x \ ,$$

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

açılımını dikkate alarak ve (1.1) denkleminin ve (1.3) başlangıç şartını kullanarak aşağıdaki Cauchy problemini buluruz.

$$T_n'(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t) = f_n(t) \ , \tag{1.5}$$

$$T_n(0) = \varphi_n \ , \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

(1.5) – (1.6) Cauchy probleminin çözümü

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \tag{1.7}$$

formülü ile bulunur.

$T_n(t)$ fonksiyonunun (1.7) formülü ile bulunduğu ifadesini (1.4) açılımında $T_n(t)$ katsayılarının yerlerine yazarak (1.1) – (1.2) – (1.3) probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{\ell}x \right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) ds \,.\, \sin\frac{n\pi}{\ell}x \right\} \tag{1.8}$$

(1.8) açılımından görülür ki, (1.3) başlangıç şartında verilen $\varphi(x)$ fonksiyonunu $[0,\ell]$ aralığında sürekli fonksiyon olduğunda, $[0,\ell]$ aralığında parça-parça diferansiyellenen fonksiyon olduğunda,

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$$

sınır şartını sağlandığında, (1.1) diferansiyel denkleminin sağa yanında verilen $f(x,t)$ fonksiyonu $[0,\ell]$ aralığında x' e göre sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğunda ve bu fonksiyonun ikinci mertebeden x'e göre türevi $[0,\ell]$ aralığında sınırlı olduğunda,

$$f(0,t) = f(\ell,t)\,, \quad t > 0$$

sınır şartlarını sağladığında ve t>0 için t'ye göre f(x,t) sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğunda (1.8) formülü ile bulunan $u(x,t)$ çözümü klasik çözüm olur [3].

Örnek: Burada homojen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u\ , \quad 0 < x < \ell\ , \quad t > 0 \tag{1.9}$$

ısı iletişimi denkleminin

$$u'_x(0,t) - hu(0,t) = 0\ , \quad (h > 0\,,\ h = \text{constant})$$

$$u_x(\ell,t) = 0 \tag{1.10}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,0) = C = \text{constant} \tag{1.11}$$

başlangıç şartının sağlayan çözümünün bulunması problemini Fourier metodunun uygulanmasıyla çözümünü bulalım. Bu amaçla homojen (1.9) denkleminin homojen (1.10) sınır şartlarının sağlayan trivial olmayan çözümünü

$$u(x,t) = X(x).T(t) \tag{1.12}$$

şeklinde arayalım. O zaman uygun olarak X(x) aranan fonksiyonu için

$$X'' + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{1.13}$$

$$\left.\begin{aligned} X'(0) - hX(0) = 0 \ , \\ X'(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

şpektral problemi bulunur ki, bu problemin çözümünü

$$X_n(x) = \lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x \tag{1.15}$$

şeklinde buluruz. Burada λ_n

$$\tan \lambda_n \ell = \frac{h}{\lambda_n} \tag{1.16}$$

transendental denkleminin pozitif kökleridir.

$X_n(x)$ karakteristik fonksiyonlarına uygun $T_n(t)$ fonksiyonları

$$T_n'(t) + ((a\lambda_n)^2 + \beta)T_n(t) = 0 \tag{1.17}$$

denkleminin

$$T_n(0) = \varphi_n \ , \quad (n = 0,1,2,3,\dots) \tag{1.18}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür. $(1.17) - (1.18)$ Cauchy probleminin çözümü

$$T_n(t) = \varphi_n \, . \, e^{-[(a\lambda_n)^2 + \beta]t} \tag{1.19}$$

şeklinde bulunur.

$X_n(x)$ ve $T_n(t)$ fonksiyonları için bulduğumuz değerleri kullanarak $(1.9) - (1.10) - (1.11)$ probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-[(a\lambda_n)^2+\beta]t} . \{\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x\} \tag{1.20}$$

şeklinde buluruz.

Şimdi $\varphi(x) = C = \text{constant}$ olduğunu dikkate alarak ve

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(x) X_n(x) dx \ , \quad n = 0,1,2,\dots \tag{1.21}$$

formülünü kullanarak

$$\varphi_n = \frac{2h.c}{\lambda_n[(\lambda_n^2 + h^2)\ell + h]} \ , \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{1.22}$$

ifadesini buluruz.

φ_n için bulunmuş (1.22) ifadesini (1.20) açılımında dikkate alarak ele aldığımız $(1.9) - (1.10) - (1.11)$ problemin çözümünü

$$u(x,t) = 2hc\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-[(a\lambda_n)^2+\beta]t}}{\lambda_n[(\lambda_n^2 + h^2)\ell + h]} \cdot (\ \lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x) \tag{1.23}$$

şeklinde buluruz.

3.2. Dikdörtgen Şekilli Zarda Isı İletişiminin Serbest Homojen Denklem İçin Sınır Değer - Daşlangıç Değer Probleminin Fourier Metodunu Uygulanmasıyla Çözümü

Burada biz dikdörtgen şekilli zarda ısı iletişiminin homojen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 < x < p \ , \qquad 0 < y < s \ , \qquad t > 0 \tag{2.1}$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u'_x(0,y,t) = 0 \ , \qquad u(p,y,t) = 0 \ , \\ u(x,0,t) = 0 \ , \qquad u(x,s,t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y) \, , \qquad 0 < x < p \ , \qquad 0 < y < s \ , \tag{2.3}$$

Başlangıç şartını sağlayan çözümünü Fourier metodunun uygulanmasıyla bulalım. Bu amaçla Fourier metodunun şemasına dayanarak $(2.1) - (2.2)$ probleminin trivial olmayan çözümünü önce

$$u(x,y,t) = T(t).V(x,y) \tag{2.4}$$

şeklinde aradığımızda aranan $V(x,y)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^2 v(x,y) = 0 \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v'_x(0,y) = 0\ , & v(p,y) = 0\ , \\ v(x,0) = 0\ , & v(x,s) = 0 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

spektral problemini ve $T(t)$ aranan fonksiyonu için

$$T'(t) + (\lambda a)^2 T(t) = 0 \tag{2.7}$$

denklemini buluruz.

Sonra da (2.5) homojen denkleminin homojen (2.6) sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümünü

$$V(x,y) = X(x)Y(y) \tag{2.8}$$

şeklinde arayarak aranan $X(x)$ ve $Y(y)$ fonksiyonları için aşağıdaki spektral

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0\ , \tag{2.9}$$

$$X'(0) = 0\ , \qquad X(p) = 0\ , \tag{2.10}$$

ve

$$Y'(y) + \gamma^2 Y(y) = 0\ , \tag{2.11}$$

$$Y(0) = 0\ , \qquad Y(s) = 0\ , \tag{2.12}$$

problemlerini buluruz. Burada

$$\lambda^2 - \mu^2 = \gamma^2 \tag{2.13}$$

direk hesaplayarak $(2.9) - (2.10)$ spektral probleminin karakteristik değerlerini

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2p}\ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.14}$$

şeklinde ve uygun olarak $(2.11) - (2.12)$ spektral probleminin karakteristik değerlerini

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{s}\ , \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.15}$$

şeklinde buluruz. Bu karakteristik sayılara uygun karakteristik fonksiyonlar ise

$$X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2p}x\ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.16}$$

ve

$$Y_k(y) = \sin\ \frac{k\pi}{s} y\ , \qquad k = 1,2,3,\dots \tag{2.17}$$

şeklinde bulunur. Burada (2.13) de μ_n ve γ_k karakteristik sayılarının değerlerini yerlerine uygun olarak yazdığımızda

$$\lambda_{kn}^2 = \mu_n^2 + \gamma_k^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2p}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{s}\right)^2 \tag{2.18}$$

değerlerini buluruz.

Her bir λ_{kn} in uygun $V_{kn}(x,y)$ fonksiyonu

$$V_{kn}(x,y) = X_n(x)Y_k(y) = \cos\ \frac{(2n+1)\pi}{2p} x\ \sin\ \frac{k\pi}{s} y \tag{2.19}$$

olur. $V_{kn}(x,y)$ fonksiyonuna uygun $T(t)$ fonksiyonunu $T_{kn}(t)$ ile göstererek $T_{kn}(t)$ fonksiyonu

$$T'_{kn}(t) + (a\lambda_{kn})^2 T_{kn}(t) = 0 \tag{2.20}$$

denkleminin

$$T_k(0) = \varphi_{kn} \tag{2.21}$$

şartını sağlayan çözümü olduğunu buluruz. Burada

$$\varphi_{kn}\ , \qquad k = 1,2,3,\dots\ ; \quad n = 0,1,2,\dots$$

sayıları $\varphi(x,y)$ fonksiyonunun $V_{kn}(x,y)$ sistemi üzere Fourier katsayıları olup

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{p.s}\int_0^p\int_0^s \varphi(x,y)V_{kn}(x,y)dxdy \tag{2.22}$$

formülü ile hesaplanır.

$(2.20) - (2.21)$ Cauchy probleminin çözümü

$$T_{kn}(t) = \varphi_{kn}\,.\,e^{-(a\lambda_{kn})^2 t} \tag{2.23}$$

şeklinde bulunur.

Sonuçta biz ele aldığımız problemin çözümünü

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{kn}(t)V_{kn}(x,y) \tag{2.24}$$

veya

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{kn} e^{-(a\lambda_{kn})^2 t} \sin\frac{k\pi}{s} y \,.\, \cos\frac{(2n+1)}{p} x \tag{2.25}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

Böylece, biz burada Fourier metodunun parabolik denklemler için başlangıç değer - sınır değer probleminin çözümünün bulunmasında kullanılabildiğini göstermiş olduk.

SONUÇ

Bu tezde hiperbolik ve parabolik tip kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer değer başlangıç değer problemlerinin Fourier metodunun uygulanmasıyla çözümünün bulunması örneklerle gösterildi. Sınır değer - başlangıç değer probleminin Fourier metodunun ayrı ayrı örnekler üzerinde çözümünün bulunması gösterildi. Hiperbolik ve parabolik tip diferansiyel denklemlerin çözümünde değişkenlere ayırma (Fourier) yöntemini öğrenmek için aşağıdaki kaynaklardan istifade edildi.

KAYNAKLAR

1. Tixonov A.N. , Samarskiy A.A. , Uravneniya Matematiçeskoy Fiziki. M. : Nauka , 1977.
2. Tixonov A.N. , Samarskiy A.A. , Riyazi Fizika Tenlikleri , Azer. Tedrisneşr. 1962.
3. Smirnov , V.İ. , Kurs Visşey Matematiki T.T. 2 , 4. M. : 1981.
4. Mixaylov V. П. , Diferansialniye Uravneniya v çastnıx proizvodnıx. Ue. Pos. M. : Nauka 1968.
5. Sadri Hassani , Foundeations of Mathematical Physics , Preut. –hall İnt. , İnc. (Illinois State University) 1991.
6. Zalman Rubinstein. A Course in Ordinary and Partial Differantial Equations , Academic Press New York and London 1969.
7. Prof. Dr. Mehmet Çağlıyan ve Prof Dr. Okay Çelebi Kısmi Dif. Denklemler Dora , Bursa 2010.
8. Sobolev S. L. Uravneniya Matematiçeskoy fiziki. M. ; Nauka ,1981.
9. Koşlyakov N.S. Yravneniye v çastnıx proizvodnıx Metematiçeskoy fiziki. M.: Vısşaya Şkola 1970.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Yozgat/Yerköy'de doğan Gökhan DOĞAN, ilk ve ortaokulu Yerköy'de, lise öğrenimini ise Yozgat Erdoğan Akdağ Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamlamıştır. 2001 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi İ. Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2005 yılında başarıyla bitirmiştir.

2005-2011 yılları arasında Trabzon'un Beşikdüzü ilçesinde, 2011-2013 yıllarında Nevşehir'in Derinkuyu ilçesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmıştır. 2013 yılından itibaren Yozgat/Merkez'de Celal Atik Ortaokulu'nda Matematik Öğretmenliği görevini sürdürmektedir.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında başlamıştır.

İletişim Bilgileri

Yozgat Merkez Celal Atik Ortaokulu Merkez/YOZGAT

Telefon: 0 (536) 352 76 44

E-posta: gkhndogan@gmail.com