

**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN YENİ  
YAKLAŞIMLAR**

**Latife Gizem KAMBUR**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE**

**Yozgat 2015**



**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN YENİ  
YAKLAŞIMLAR**

**Latife Gizem KAMBUR**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE**

**Yozgat 2015**

T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111313001 numaralı öğrencisi Latife Gizem KAMBUR'un hazırladığı "Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri İçin Yeni Yaklaşımlar" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 01/06/2015 Pazartesi günü saat 14:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet BEKİR



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE (Danışman)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24/06/2015 tarih ve 17 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24/06/2015  
T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Doç. Dr. Fuat KOKSAL  
Bozok Üniversitesi  
Fen Bil. Enst. Müdürü



# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

<b>ÖZET .....</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>iv</b>
<b>TEŞEKKÜR .....</b>	<b>v</b>
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ.....</b>	<b>vi</b>
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Temel Tanımlar .....	3
1.2. Dengeleme Terimi .....	4
1.3. İntegrallenebilirlik .....	4
<b>2. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ .....</b>	<b>6</b>
2.1. Genişletilmiş Weierstrass Dönüşüm Yöntemi.....	6
2.2. Üstel Fonksiyonlu Deneme Denklem Yöntemi.....	10
<b>3. GENİŞLETİLMİŞ WEIERSTRASS DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN</b>	
<b>UYGULAMALARI .....</b>	<b>12</b>
3.1. Tzidzeica- Dodd- Bullough Denklemi ve Uygulaması .....	12
3.2. (N+1)-Boyutlu Çift sinh-Gordon Denklemi ve Uygulaması.....	15
3.3. Liouville Denklemi ve Uygulaması.....	25
<b>4. ÜSTEL FONKSİYONLU DENEME DENKLEM YÖNTEMİNİN</b>	
<b>UYGULAMALARI .....</b>	<b>31</b>
4.1. Tzidzeica- Dodd- Bullough Denklemine Yönelik Uygulama .....	31
4.2. (N+1)- Boyutlu Çift sinh- Gordon Denklemine Yönelik Uygulama.....	35
4.3. Liouville Denklemine Yönelik Uygulama .....	38

<b>SONUÇ .....</b>	<b>41</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>42</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>45</b>

# LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

**Latife Gizem KAMBUR**

**Bozok Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**2015; Sayfa: 45**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE**

## ÖZET

Bu çalışmada, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin belirlenmesi için geliştirilen genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ve üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntemler, bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmış ve literatürde bulunmayan yeni dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bulunan çözüm fonksiyonlarının iki ve üç boyutlu grafikleri ile davranışları belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Weierstrass dönüşüm yöntemi, Üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi, Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, Weierstrass eliptik fonksiyon çözümleri, yürüyen dalga çözümler

# **NEW APPROACHES FOR EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Latife Gizem KAMBUR**

**Bozok University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Master of Science Thesis**

**2015; Page: 45**

**Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yusuf GÜREFE**

## **ABSTRACT**

In this study, the extended Weierstrass transformation method and the trial equation method with exponential function, that are developed to determine the traveling wave solutions of the nonlinear partial differential equations, are considered. These methods are applied to some nonlinear partial differential equations and new wave solutions, that can not be found in literature, are obtained. Also, the behaviour of solutions is determined by two and three dimensional graphics.

**Keywords:** Weierstrass transformation method, Trial equation method with exponential function, Nonlinear partial differential equations, Weierstrass elliptic function solutions, Traveling wave solutions



## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma boyunca bilgisinden, hoŐgörösünden yararlandığım, her konuda destek ve ilgisini esirgemeyen, çalıŐmalarını ve başarısını örnek aldığım danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE' ye sonsuz teşekkür ederim. Her zaman varlıklarını hissettiğim, hayatım boyunca beni hiç yalnız bırakmayan, maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen, benim bugünlere gelmemde büyük emekleri olan hayatımdaki en değerli varlıklarım olan annem Mühübe KAMBUR ve babam Ercihan KAMBUR' a, o güler yüzlerini benden eksik etmeyen bir tanecik kardeŐlerim Gamze KAMBUR ve Gözde KAMBUR' a çok teşekkür ediyorum. Bu çalışmada sevgisiyle, bilgisiyle emeği olan herkese teşekkür ediyorum.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa

<b>Şekil 3.1:</b>	(3.10) denkleminde $a_{-1} = 0, a_0 = -1, a_1 = -2, b_2 = \frac{1}{4},$ $b_3 = b_4 = c_0 = t = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	15
<b>Şekil 3.2:</b>	(3.31) denkleminde $i = 1, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	19
<b>Şekil 3.3:</b>	(3.31) denkleminde $i = 2, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1,$ $\alpha = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	19
<b>Şekil 3.4:</b>	(3.31) denkleminde $i = 3, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	19
<b>Şekil 3.5:</b>	(3.31) denkleminde $i = 4, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1,$ $\alpha = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	20
<b>Şekil 3.6:</b>	(3.31) denkleminde $i = 5, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	20
<b>Şekil 3.7:</b>	(3.48) denkleminde $i = 1, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1, \alpha = 4, a_0 = -2,$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için reel üç ve iki boyutlu grafik gösterimi...	23
<b>Şekil 3.8:</b>	(3.48) denkleminde $i = 1, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1, \alpha = 4, a_0 = -2,$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için sanal üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..	23
<b>Şekil 3.9:</b>	(3.48) denkleminde $i = 2, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4,$ $a_0 = -2, a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	24
<b>Şekil 3.10:</b>	(3.48) denkleminde $i = 3, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1, \alpha = 4, a_0 = -2,$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için reel üç ve iki boyutlu grafik gösterimi...	24
<b>Şekil 3.11:</b>	(3.48) denkleminde $i = 3, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1, \alpha = 4, a_0 = -2,$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için sanal üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..	24

<b>Şekil 3.12:</b>	(3.48) denklemde $i = 4, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4,$ $a_0 = -2, a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	25
<b>Şekil 3.13:</b>	(3.48) denklemde $i = 5, a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1, \alpha = 4,$ $a_0 = -2, a_1 = -\frac{3}{4}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	25
<b>Şekil 3.14:</b>	(3.69) denklemde $i = 1, a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1, g_2 = \frac{4}{3}, g_3 = \frac{80}{27}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	29
<b>Şekil 3.15:</b>	(3.69) denklemde $i = 2, a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1, g_2 = \frac{4}{3}, g_3 = \frac{80}{27}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	29
<b>Şekil 3.16:</b>	(3.69) denklemde $i = 3, a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1, g_2 = -\frac{8}{3},$ $g_3 = \frac{1}{216}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	29
<b>Şekil 3.17:</b>	(3.69) denklemde $i = 4, a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1, g_2 = \frac{1}{4}, g_3 = \frac{4}{27}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	30
<b>Şekil 3.18:</b>	(3.69) denklemde $i = 5, a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1, g_2 = \frac{1}{4}, g_3 = \frac{4}{27}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	30
<b>Şekil 4.1:</b>	(4.9) denklemde $A_1 = B_1 = \eta_0 = t = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	33
<b>Şekil 4.2:</b>	(4.13) denklemde $A_1 = B_1 = \eta_0 = t = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi grafik gösterimi.....	34
<b>Şekil 4.3:</b>	(4.23) denklemde $B_0 = B_1 = \beta = \tau = \eta_0 = t = 1, \alpha = 3, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi grafik gösterimi	36
<b>Şekil 4.4:</b>	(4.28) denklemde $B_0 = B_1 = \beta = \tau = \eta_0 = t = 1, \alpha = 3, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi grafik gösterimi	38
<b>Şekil 4.5:</b>	(4.38) denklemde $B_0 = B_1 = A_1 = \eta_0 = t = 1, c = \frac{1}{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi grafik gösterimi.....	40

# 1. GİRİŞ

Radyo, televizyon ve cep telefonları gibi elektronik cihazların içerdiği elektromanyetik dalgalar, deprem sonrasında okyanuslar da ortaya çıkan su dalgaları, canlıların iletişim kurabilmeleri için gerekli olan ses dalgaları gibi günlük yaşamı etkileyen pek çok fiziksel olay dalga kavramı ile açıklanabilir. Bu tarz fiziksel olayların matematiksel modellenmesi diferansiyel denklemler ile yapıldığından denklemlerin çözümleri ve modeli oluşturulan olayların fiziksel analizi dalga teorisi açısından oldukça önemlidir. Dalga kavramı boşlukta ve bir madde içerisinde yayılabilen sistematik bir olay olarak tanımlanabilir. Örneğin bir denizdeki su aşağı ve yukarı doğru hareketli iken dalgalar ileriye doğru ilerlemektedir. Bir tepe ve bir vadiye sahip olan dalganın tepe kısmına karın, vadi kısmına ise çukur denir. Ayrıca bir karından diğer karına olan toplam mesafe dalga boyu olarak adlandırılır. Dalgayı ortaya çıkartan enerjinin miktarına, dalganın meydana geldiği ortama ve bu ortamın derinliğine bağlı olan genlik kavramı dalganın normal konumundan yükselme veya alçalma mesafesi olarak ifade edilir.

İlerleme ve çarpışma sırasında fiziksel özelliklerini hiçbir zaman değiştirmeyen dalgalara solitary dalgalar denir. Bu dalgalar 1834 yılında J. S. Russell tarafından gözlemlenmiştir. Daha sonra 1895 yılında KdV denklemi olarak bilinen bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem modellenmiş ve bu modelin fiziksel analizi ile dalga teorisine önemli bir bakış açısı kazandırılmıştır.  $uu_x$  lineer olmayan terim ve  $u_{xxx}$  lineer terim olmak üzere en temel KdV denklemi

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

şeklindedir. (1.1) denkleminin solitary dalga çözümü

$$u(x, t) = d \operatorname{Sech}^2(\delta(x - vt)), \quad v = 2d = 4\delta^2 \quad (1.2)$$

biçiminde olup,  $\delta$  dalga sayısını,  $v$  dalganın hızını,  $d$  dalganın genliğini göstermektedir.

1965 yılında Zabusky ve Kruskal solitary dalgaların etkileşimi, KdV denkleminin integrallenebilirliği konularında çeşitli çalışmalar yaparak davranışlarını koruyan ve küçük parçalarına iletebilen soliton kavramını tanımlamışlardır [1]. Solitonlar ve integrallenebilirlik matematiksel fizik alanında oldukça büyük bir öneme sahiptir [2,3]. Ayrıca soliton sürekli bir dalga olma, sınırlandırılma ve karakterini koruyarak diğer solitonlar ile etkileşim içinde bulunma gibi özellikleri barındıran lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümü olarak ifade edilebilir. Son yıllarda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini elde etmek için bazı yöntemler kullanılmıştır. Hirota bilinear forma indirgeme ve ansatz (tahmin yürüterek hesaplama) yaklaşımları ile çeşitli formlardaki soliton çözümlere ulaşılmıştır [4-7]. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin soliton, kompakt vb. gibi dalga çözümleri problemlerin fiziksel yorumunu oluşturmada kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan gerçek yaşam problemlerinin matematiksel modellerini oluşturan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin araştırılması oldukça önemlidir. Literatürde lineer olmayan fiziksel problemlerin yürüyen dalga çözümlerini hesaplamak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları sırasıyla Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi [8], Hirota bilinear yöntemi [9], tanh fonksiyon yöntemi [10], Darboux dönüşüm yöntemi [11], homojen denge yöntemi [12], sine-cosine yöntemi [13], ilk integral yöntemi [14], standart ve genişletilmiş deneme denklem yöntemleri [15-22] şeklindedir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde genişletilmiş Weierstrass dönüşüm ve üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemleri verilmiştir [23-31]. Bu yöntemler lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerde en yüksek mertebeden türev içeren lineer veya lineer olmayan terimler ile türev içermeyen lineer olmayan terimlerin dengelemesi yapılarak uygulanmaktadır.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi sırasıyla Tzidzeica-Dodd-Bullough [32],  $(N+1)$ -boyutlu çift sinh-Gordon [33] ve Liouville denklemlerine [32] uygulanmıştır. Böylece bu problemler için Weierstrass eliptik fonksiyon ve hiperbolik fonksiyon çözümlerine ulaşılmıştır. Ayrıca bu çözüm

fonksiyonlarının davranışlarını belirlemek için Mathematica paket programı ile iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde ise lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerini bulmak için verilen üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi Tzidzeica-Dodd-Bullough [32], (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon [33] ve Liouville denklemlerine [32] uygulanarak elde edilen dalga çözümleri ile genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen dalga çözümleri karşılaştırılmış ve böylece farklı formlarda yürüyen dalga çözümlerine ulaşıldığı belirlenmiştir. Ayrıca Mathematica paket programı yardımı ile elde edilen çözümlere ait iki ve üç boyutlu grafiklere yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada ele alınan Tzidzeica-Dodd-Bullough, (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon ve Liouville denklemleri katı hal fiziği, lineer olmayan optik, plazma fiziği, akışkanlar dinamiği, matematiksel biyoloji, kimyasal kinetik ve kuantum alan teorisi gibi bir çok bilimsel uygulamalarda etkin bir biçimde kullanılmaktadır [32,33].

Bu tez çalışmasının sonuç bölümünde genişletilmiş Weierstrass dönüşüm ve üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemleri ile bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin elde edildiği, bu çözümlere bakılarak da uygulanan yöntemlerin lineer olmayan diferansiyel denklemlerin dalga çözümleri için etkin olduğu ifade edilmiştir.

## **1. 1. Temel Tanımlar**

Birçok uygulamalı bilim alanında karşılaşılan problemler matematiksel modelleri kurularak ele alınmalıdır. Bu tür modeller genellikle bilinmeyen fonksiyonu veya fonksiyonları, bu fonksiyonların bağımsız değişkenlerini ve türevlerini içeren denklemlere dönüştürülür. Elde edilen bu denklemler diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler cebirsel özellikler, geometrik özellikler ve uygulamalı bilim alanlarında matematiksel modelleme ile elde edilebilir. Fiziksel olayların modellenmesi ile diferansiyel denklem tanımlama işlemi oldukça zor ve önemlidir. Modelleme sürecinde olayların fiziksel özellikleri ve bazı korunum kanunları dikkate alınmalıdır.

Hadamard kuralı ile bir kısmi diferansiyel denklemin iyi durumlu (well-posed) olduğunu belirlemek için çözüm var ise tektir, başlangıç ve sınır şartlarına uygun bir çözüm vardır, kararlıdır şeklindeki koşullar sağlanmalıdır. Bu koşullar sağlanmadığında model kötü durumlu (ill-posed) olur. Ayrıca başlangıç veya aşınır koşullarındaki çok küçük değişimler çözümdeki çok büyük değişimlere sebep olmuyorsa sistemin kararlı olduğu söylenir [34].

Bir diferansiyel denklem bağımlı değişkenin ve türevlerinin çarpımını veya bağımlı değişkenin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetini içeriyorsa bu denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir.

## 1. 2. Dengeleme Terimi

Genişletilmiş Weierstrass yöntemine ait dengeleme bağıntısı lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden lineer veya lineer olmayan terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında oluşturulmaktadır. En yüksek mertebeden lineer olmayan terim  $v^m \frac{d^n v}{d\eta^n}$  ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim  $v^r$  olsun. Burada

$$v^m \frac{d^n v}{d\eta^n} = \overline{a_n} w^{N+m+n} + \dots$$

ve

$$v^r = \overline{b_n} w^{rN} + \dots$$

ifadeleri  $v^m v^{(n)} \approx v^r$  denkleminde yerine yazıldığında  $m+n=(r-1)N$  dengeleme bağıntısı elde edilir.

## 1. 3. İntegrallenebilirlik

Fuchs tarafından önerilen integrallenebilirlik kavramı bir denklem sisteminin davranışları hakkında bilgi vermektedir. Lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin indirgendiği lineer denklem sistemi integre edilebilir özelliğe sahiptir. Bu

nedenle lineer denklemlerin genel çözümlerine ait bir integral formu vardır. Burada gerekli sayıda integral elde edilirse tam integrallenebilirlik tanımlanır. İntegrallenebilirlik kavramı dinamik sistemlerde, fiziksel olayların modellenmesinde ve integral denklemlerinde kullanılır.



## 2. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ve üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi verilmiştir.

### 2.1. Genişletilmiş Weierstrass Dönüşüm Yöntemi

Bu bölümde, genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi hakkında kısa bir açıklama yapılmıştır [23-26]. Bu yöntemi ana hatları ile açıklamak için öncelikle değişkenleri  $x_i, i = 1,2,3$  ve  $t$  olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel halini

$$\phi(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_i}, u_{tt}, u_{x_i t}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde ele alalım.

Burada  $c$  bir sabit,  $\phi$  de  $u(x_i, t)$  nin bir polinomu ve  $\xi = \sum_i k_i x_i + ct$  olmak üzere  $u(x_i, t) = U(\xi)$  eşitliği tanımlanmıştır. (2.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklem  $\xi = \sum_i k_i x_i + ct$  dönüşümü altında

$$\varphi(U, cU', k_i U', c^2 U'', ck_i U'', k_i^2 U'', \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindeki adi diferansiyel denkleme indirgenir.  $U(\xi)$  çözüm fonksiyonunun aşağıdaki gibi tanımlandığını varsayalım:

$$U(\xi) = \sum_{j=-N}^N a_j w^j(\xi) \quad (2.3)$$

Burada  $a_j$  değerleri daha sonra belirlenecek sabitlerdir.  $N$  ise en yüksek dereceli doğrusal olmayan terim ile en yüksek mertebeden türev içeren doğrusal veya doğrusal olmayan terimin dengelenmesi için uygun bir biçimde tespit edilir. (2.3) denklemindeki  $w(\xi)$  fonksiyonunun sağladığı genel eliptik denklem

$$w'(\xi) = \frac{d}{d\xi} w(\xi) = \sqrt{b_0 + b_1 w(\xi) + b_2 w^2(\xi) + b_3 w^3(\xi) + b_4 w^4(\xi)} \quad (2.4)$$

şeklinde verilmiştir. (2.3) ve (2.4) denklemleri (2.2) denkleminde yerine yazılarak ve  $w^j(\xi)$ ' nin tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Mathematica paket programı ile bu cebirsel denklem sistemi çözülerek  $a_j$ ,  $k_j$  ve  $c$  değerleri bulunur. Buradaki bazı  $w(\xi)$  çözüm fonksiyonları  $\psi(\xi; g_2, g_3)$  şeklindeki Weierstrass eliptik fonksiyon kullanılarak açıklanabilir.  $g_2$  ve  $g_3$  invariantlar olarak adlandırılan reel parametreler olmak üzere  $\psi(\xi; g_2, g_3)$  Weierstrass eliptik fonksiyonu

$$(\psi'(\xi))^2 = 4(\psi(\xi))^3 - g_2\psi(\xi) - g_3$$

ve onun diğer bir formu olan

$$\psi''(\xi) = 6(\psi(\xi))^2 - \frac{1}{2}g_2$$

şeklindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyondur [35]. (2.1) denkleminin çözümleri  $b_i$  değerlerinin özel durumları için aşağıda verilmiştir:

**Durum A:**  $b_1 = b_3 = 0$  için:

Weierstrass fonksiyonu  $\psi(\xi; g_2, g_3)$ 'nin invariantları

$$g_2 = \frac{4}{3}(b_2^2 - 3b_0b_4) \quad (2.5)$$

ve

$$g_3 = \frac{4b_2^2}{27}(9b_4 - 2b_2) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlı iken (2.4) denkleminin çözümleri

$$w_1(\xi) = \sqrt{\frac{3\psi(\xi; g_2, g_3) - b_2}{3b_4}} \quad (2.7)$$

ve

$$w_2(\xi) = \sqrt{\frac{3b_0}{\psi(\xi; g_2, g_3) - b_2}} \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir.

Weierstrass fonksiyonunun

$$g_2 = -\frac{b_2}{12}(5D_{\pm} + 4b_2 + 33b_0b_4) \quad (2.9)$$

ve

$$g_3 = \frac{1}{216} \left[ b_2^2(21D_{\pm} + 20b_2) - 3b_0b_4(21D_{\pm} + 9b_2) \right] \quad (2.10)$$

şeklindeki invaryantları

$$D_{\pm} = \frac{-5b_2 \pm \sqrt{9b_2^2 - 36b_0b_4}}{2} \quad (2.11)$$

ile tanımlanan  $D$  değeri için bir diğer çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$w_3(\xi) = \sqrt{\frac{2b_0[6\psi(\xi; g_2, g_3) + 2b_2 + D_{\pm}]}{12\psi(\xi; g_2, g_3) + D_{\pm}}} \quad (2.12)$$

Ayrıca Weierstrass fonksiyonunun

$$\psi'(\xi; g_2, g_3) = \frac{d\psi(\xi; g_2, g_3)}{d\xi} \quad (2.13)$$

$$g_2 = \frac{b_2^2 - b_0b_4}{12}, \quad (2.14)$$

$$g_3 = \frac{36b_0b_4 - b_2^2}{216} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanan türevi ve invaryantları ile

$$w_4(\xi) = \frac{\sqrt{b_0}}{3} \frac{6\psi(\xi; g_2, g_3) + b_2}{\psi'(\xi; g_2, g_3)}, \quad (2.16)$$

$$w_5(\xi) = \frac{3}{\sqrt{b_4}} \frac{\psi'(\xi; g_2, g_3)}{6\psi(\xi; g_2, g_3) + b_2} \quad (2.17)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

**Durum B:**  $b_1 = b_3 = 0$  ve  $b_0 = \frac{5b_2^2}{36b_4}$  için:

Burada

$$g_2 = \frac{2b_2^2}{9} \quad (2.18)$$

ve

$$g_3 = \frac{b_2^3}{54} \quad (2.19)$$

invariantları kullanılarak (2.4) denkleminin aşağıdaki Weierstrass çözüm fonksiyonu tanımlanmıştır:

$$w_6(\xi) = \sqrt{\frac{15b_2}{2b_4}} \frac{\psi(\xi; g_2, g_3)}{3\psi'(\xi; g_2, g_3) + b_2} \quad (2.20)$$

**Durum C:**  $b_0 = b_1 = 0$  için:

Bu durum da,  $c_0$  sabit ve  $B = c_0^2(4b_2b_4 - b_3^2)$  için hiperbolik çözüm fonksiyonu

$$w_7(\xi) = \frac{-8b_2b_3c_0 \operatorname{sech}^2(\sqrt{b_2}\xi)}{4b_3^2 \operatorname{sech}^2(2\sqrt{b_2}\xi) + (4b_3^2 + B) \tanh(\sqrt{b_2}\xi) + 4b_3^2 - B} \quad (2.21)$$

şeklindedir.

## 2.2. Üstel Fonksiyonlu Deneme Denklem Yöntemi

Bu bölümde, üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi hakkında kısa bir açıklama yapılmıştır. Bu yöntem ilk olarak Khan ve Akbar tarafından önerilmiş ve modifiye Benjamin-Bona-Mahony denkleminde uygulanmıştır [27]. Ayrıca üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi sırasıyla Zhiber-Shabat, (1+1)- boyutlu klasik Boussinesq, çift Higgs, Maccari sistemi ve strain (gerilme) dalga denklemlerine uygulanmıştır [28-31]. Bu yöntemi ana hatları ile açıklamak için öncelikle değişkenleri  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve  $t$  olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel halini

$$F(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_i}, u_{tt}, u_{x_i t}, \dots) = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde ele alalım.

Burada  $c$  bir sabit,  $x, y$  ve  $t$  reel değişkenler olmak üzere  $u(x, y, t)$  nin bir polinomu ve  $\eta = x + y \pm ct$  olmak üzere  $u(x, y, t) = U(\eta)$  eşitliği tanımlanmıştır. (2.22) ile verilen kısmi diferansiyel denklem  $\eta = x + y \pm ct$  dönüşümü altında

$$U(\eta) = \sum_{i=-N}^N A_i e^{i\phi(\eta)} \quad (2.23)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada  $A_i$  değerleri daha sonra belirlenecek sabitlerdir.  $N$  ise en yüksek dereceli doğrusal olmayan terim ile en yüksek mertebeden türev içeren doğrusal olmayan terimin dengelenmesi için uygun bir biçimde tespit edilir. (2.23) denklemindeki  $\phi(\eta)$  fonksiyonunun denklemini

$$\phi'(\eta) = \sum_{j=0}^M B_j e^{j\phi(\eta)} \quad (2.24)$$

şeklinde verilmiştir. (2.24) denklemleri (2.23) denkleminde yerine yazılarak ve  $\phi(\eta)$ ' nin tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Mathematica gibi bir paket program ile bu cebirsel denklem sistemi

çözülerek  $A_i$ ,  $B_j$  ve  $c$  değerleri bulunur. (2.22) denkleminin çözümlerini elde etmek için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir:

**Durum A:**  $M = N = 1$  için:

$$u(\eta) = A_{-1}e^{-\phi(\eta)} + A_0 + A_1e^{\phi(\eta)} \quad (2.25)$$

ve

$$\phi'(\eta) = B_0 + B_1e^{\phi(\eta)} \quad (2.26)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

**Durum B:**  $M = N = 2$  için:

$$u(\eta) = A_{-2}e^{-2\phi(\eta)} + A_{-1}e^{-\phi(\eta)} + A_0 + A_1e^{\phi(\eta)} + A_2e^{2\phi(\eta)}$$

ve

$$\phi'(\eta) = B_0 + B_1e^{\phi(\eta)} + B_2e^{2\phi(\eta)} \quad (2.27)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

### 3. GENİŞLETİLMİŞ WEIERSTRASS DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yönteminin Tzidzeica-Dodd-Bullough, (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon ve Liouville denklemlerine uygulamaları verilmiştir.

#### 3.1. Tzidzeica-Dodd-Bullough Denklemi ve Uygulaması

Bu kısımda

$$u_{,xt} - e^{-u} - e^{-2u} = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde verilen Tzidzeica-Dodd-Bullough denkleminin [32] genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. (3.1) şeklinde verilen Tzidzeica-Dodd-Bullough denkleminin,  $v(x,t) = e^{-u}$ ,  $u(x,t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{v^{-1} - v}{2} \right]$ ,  $\eta = x - ct$  dönüşümleri ile

$$-c(vv'' - (v')^2) - v^3 - v^4 = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.2) ile verilen denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan  $v^4$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $vv''$  teriminin dengelenmesi ile denge terimleri bulunur.

Lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesinde

$$v = a_N W^N + \dots$$

olarak alınır.

$$v' = N a_N w^{N-1} w' + \dots$$

$$= N a_N w^{N-1} w^2 + \dots$$

$$= Na_N w^{N+1} + \dots$$

$$v'' = N(N+1)a_N w^N w' + \dots$$

$$= N(N+1)a_N w^N w^2 + \dots$$

$$= N(N+1)a_N w^{N+2} + \dots$$

ve

$$v^4 = a_N w^{4N} + \dots$$

ifadeleri  $vv'' \approx v^4$  denkleminde yerine yazıldığında,  $N=1$  olduğu kolayca hesaplanabilir. Hesaplanan bu dengeleme terimi (2.3) denkleminde yerine yazıldığında denklemin yeni çözümü,

$$v(\eta) = a_{-1}w^{-1}(\eta) + a_0 + a_1w(\eta) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlıdır.

Elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$a_{-1} = 0, \quad a_1 = \frac{2(1+2a_0)b_4}{b_3}, \quad b_0 = \frac{-a_0^3(1+a_0)b_3^4 + 4(1+2a_0)^3 a_0 b_1 b_3 b_4^2}{16(1+2a_0)^4 b_4^3},$$

$$b_2 = \frac{(3+4a_0)a_0 b_3^2}{4(1+2a_0)^2 b_4} + \frac{(1+2a_0)b_1 b_4}{a_0 b_3}, \quad c = \frac{4(1+2a_0)^2 b_4}{b_3^2} \quad (3.4)$$

$b_0 = b_1 = 0$  olması gerektiğinden  $a_0 = -1$  olur.

Böylece

$$a_{-1} = 0, \quad a_0 = -1, \quad a_1 = -\frac{2b_4}{b_3}, \quad b_0 = 0,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{b_3^2}{4b_4}, \quad b_3 = b_3, \quad b_4 = b_4, \quad c = \frac{4b_4}{b_3^2} \quad (3.5)$$



eşitlikleri elde edilir. Bu durumda

$$w_7(\xi) = \frac{-8b_2b_3c_0 \operatorname{sech}^2(\sqrt{b_2}\xi)}{4b_3^2 \operatorname{sech}^2(2\sqrt{b_2}\xi) + (4b_3^2 + B) \tanh(\sqrt{b_2}\xi) + 4b_3^2 - B} \quad (3.6)$$

hiperbolik çözüm de ilgili değerler yerine yazıldığında,

$$w_7(\xi) = -\frac{b_3c_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{b_3^2}{4b_4}}\xi\right)}{2b_4 \left[ \operatorname{sech}^2\left(2\sqrt{\frac{b_3^2}{4b_4}}\xi\right) + \tanh\left(\sqrt{\frac{b_3^2}{4b_4}}\xi\right) + 1 \right]} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ile elde edilen aşağıdaki denklemde gerekli değerler yerine yazıldığında,

$$v(\eta) = a_{-1}w_7^{-1}(\eta) + a_0 + a_1w_7(\eta) \quad (3.8)$$

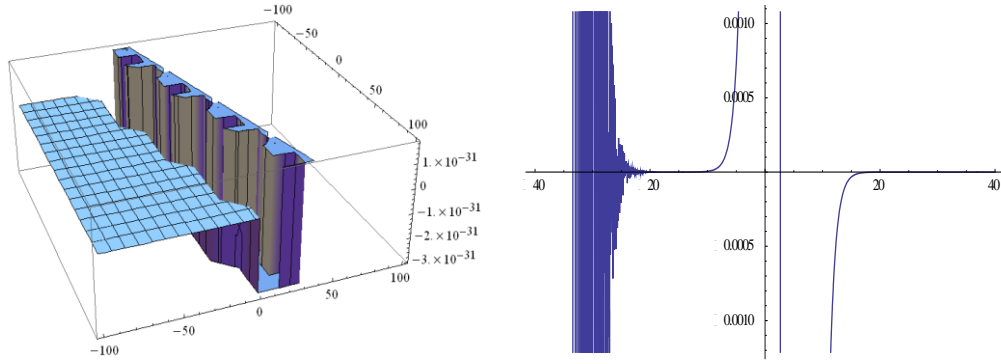
$$v(\eta) = -1 - \frac{2b_4}{b_3}w_7(\eta) \quad (3.9)$$

$$u(x, t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{2b_4w_7(\eta)(b_3 + b_4w_7(\eta))}{b_3^2 + 2b_3b_4w_7(\eta)} \right] \quad (3.10)$$

haline dönüştürülür.

Şekil 3.1, Tzidzeica-Dodd-Bullough denklemine ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. Keyfi sabitlerin ve dalga hızının aldığı değerlere göre (3.10) çözümünün hiperbolik dalga yapısında olduğu görülmüştür.

(3.10) çözümü literatürdeki  $(G'/G)$  yöntemi kullanılarak elde edilen çözümler ile karşılaştırılmış ve böylece yeni sonuçlar elde edildiği görülmüştür [32].



**Şekil 3.1.** (3.10) denkleminde  $a_{-1} = 0$ ,  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -2$ ,  $b_2 = \frac{1}{4}$ ,  $b_3 = b_4 = c_0 = t = 1$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

### 3.2. (N+1)-Boyutlu Çift sinh-Gordon Denklemi ve Uygulaması

Bu kısımda

$$\tau^2 (n - c^2) u'' - \alpha \sinh(u) - \beta \sinh(2u) = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde verilen (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon denkleminde [33] genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. (3.11) şeklinde verilen (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon denkleminde  $u(x_1, \dots, x_n, t) = u(\eta)$ ,  $\eta = \tau \left( \sum_{j=1}^n x_j - ct \right)$ ,  $u = \ln v$  dönüşümleri yapıldığında

$$2\tau^2 (n - c^2) (v v'' - (v')^2) - \alpha (v^3 - v) - \beta (v^4 - 1) = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.12) ile verilen denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan  $v^4$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $v v''$  teriminin dengelenmesi ile denge sayısı  $N = 1$  bulunur. Hesaplanan bu dengeleme terimi (2.3) denkleminde yerine yazıldığında denklemin yeni çözümü,

$$v(\eta) = a_{-1} w^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w(\eta) \quad (3.13)$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= a_{-1}, & a_0 &= a_0, & a_1 &= \frac{-1+a_0^2}{4a_{-1}}, & b_0 &= \frac{16a_{-1}^4 b_4}{(a_0^2-1)^2}, & b_1 &= \frac{32(\alpha+2\beta a_0)a_{-1}^3 b_4}{\beta(-1+a_0^2)^2}, \\
b_2 &= \frac{8(\beta+4\alpha a_0+7\beta a_0^2)a_{-1}^2 b_4}{\beta(a_0^2-1)^2}, & b_3 &= \frac{8(\alpha+2\beta a_0)a_{-1} b_4}{\beta(a_0^2-1)^2}, & b_4 &= b_4, \\
c &= -\frac{\sqrt{-\beta(a_0^2-1)^2+32n\tau^2 a_{-1}^2 b_4}}{4\tau a_{-1}\sqrt{2b_4}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

**Durum 1:**  $b_1 = b_3 = 0$  için  $\alpha + 2\beta a_0 = 0$  seçilir. Buradan da  $a_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}$  elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= a_{-1}, & a_0 &= -\frac{\alpha}{2\beta}, & a_1 &= \frac{\alpha^2-4\beta^2}{16\beta^2 a_{-1}}, & b_0 &= \frac{256\beta^4 a_{-1}^4 b_4}{(\alpha^2-4\beta^2)^2}, & b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{-32\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{(\alpha^2-4\beta^2)}, \\
b_3 &= 0, & b_4 &= b_4, & c &= -\frac{\sqrt{-(\alpha^2-4\beta^2)^2+512n\beta^3\tau^2 a_{-1}^2 b_4}}{16\tau\sqrt{2\beta^3 b_4} a_{-1}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Weierstrass fonksiyonu  $\psi(\xi; g_2, g_3)$ 'nin invariantları

$$g_2 = \frac{1024}{3} \frac{\beta^4 a_{-1}^4 b_4^2}{(\alpha^2-4\beta^2)^2} \tag{3.16}$$

ve

$$g_3 = \frac{4096\beta^4 a_{-1}^4 b_4^3}{27(\alpha^2-4\beta^2)^3} (9\alpha^2 - 36\beta^2 + 64\beta^2 a_{-1}^2) \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlı iken (2.4) denkleminin çözümleri

$$w_1(\xi) = \sqrt{\frac{3(\alpha^2-4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) + 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{3(\alpha^2-4\beta^2)b_4}} \tag{3.18}$$

ve

$$w_2(\xi) = 16\beta^2 a_{-1}^2 \sqrt{\frac{3b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2) \left[ (\alpha^2 - 4\beta^2) \psi(\xi; g_2, g_3) + 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4 \right]}} \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir.

Weierstrass fonksiyonunun

$$g_2 = \frac{128}{3} \frac{\beta^4 a_{-1}^4 b_4^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \left( 17 + \frac{512\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)} \right) \quad (3.20)$$

ve

$$g_3 = -\frac{512}{27} \frac{\beta^6 a_{-1}^6 b_4^3}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^3} \quad (3.21)$$

şeklindeki invariantları

$$D_{\pm} = \frac{80\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)} \quad (3.22)$$

ile tanımlanan  $D$  değeri için bir diğer çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$w_3(\xi) = \frac{16\beta^2 a_{-1}^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)} \sqrt{\frac{b_4 \left[ 36(\alpha^2 - 4\beta^2) \psi(\xi; g_2, g_3) - 8\beta^2 a_{-1}^2 b_4 \right]}{3(\alpha^2 - 4\beta^2) \psi(\xi; g_2, g_3) + 20\beta^2 a_{-1}^2 b_4}} \quad (3.23)$$

Ayrıca Weierstrass fonksiyonunun

$$\psi'(\xi; g_2, g_3) = \frac{d\psi(\xi; g_2, g_3)}{d\xi} \quad (3.24)$$

$$g_2 = \frac{64\beta^4 a_{-1}^4 b_4^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \quad (3.25)$$

ve

$$g_3 = \frac{1024}{27} \frac{\beta^4 a_{-1}^4 b_4^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanan türevi ve invaryantları ile

$$w_4(\xi) = \frac{16\beta^2 a_{-1}^2 \sqrt{b_4} \left[ 6(\alpha^2 - 4\beta^2) \psi(\xi; g_2, g_3) - 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4 \right]}{3(\alpha^2 - 4\beta^2)^2 \psi'(\xi; g_2, g_3)} \quad (3.27)$$

ve

$$w_5(\xi) = \frac{3}{\sqrt{b_4}} \frac{(\alpha^2 - 4\beta^2) \psi'(\xi; g_2, g_3)}{6(\alpha^2 - 4\beta^2) \psi(\xi; g_2, g_3) - 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4} \quad (3.28)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

Genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ile

$$v(\eta) = a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.29)$$

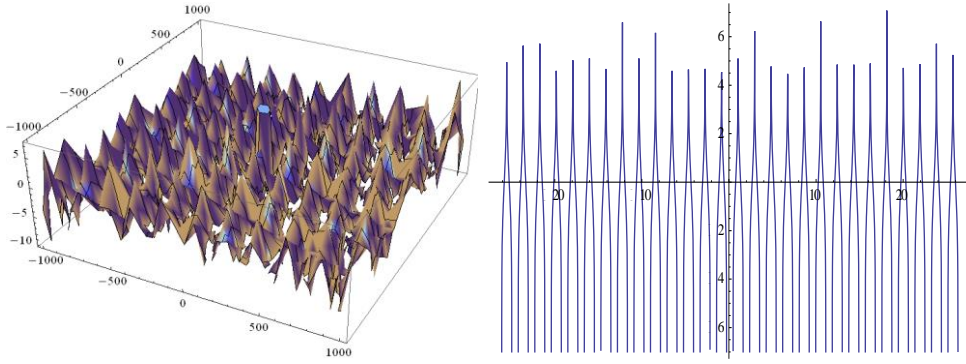
elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

$$u(\eta) = \ln \left( a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.30)$$

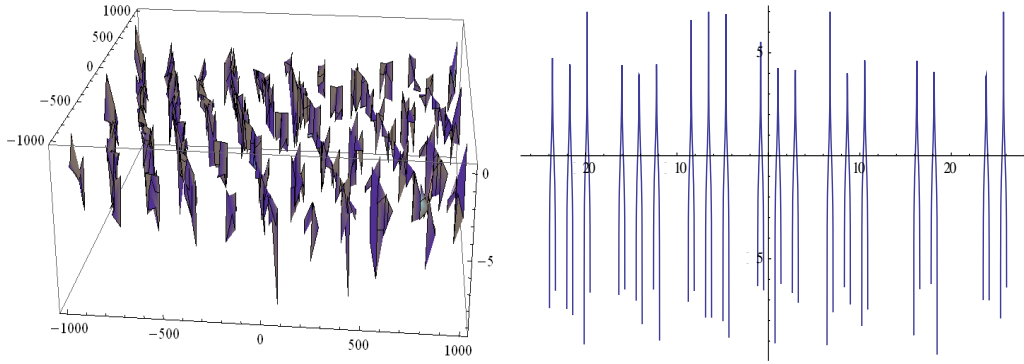
$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \ln \left( \sum_{k=1}^1 a_k w_i^k \left[ \tau \left( \sum_{j=1}^n x_j - ct \right) \right] \right), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.31)$$

elde edilir.

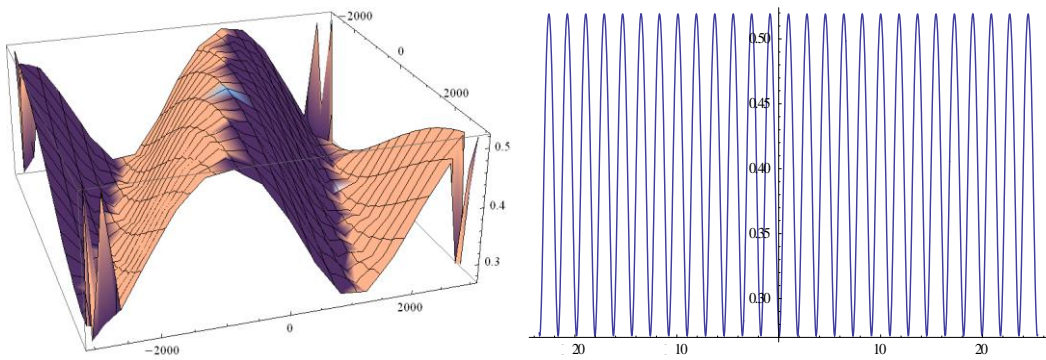
Şekil 3.2-3.6, (N+1) boyutlu çift sinh-Gordon denkleminde ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. (3.31)'deki çözümlerin Weierstrass eliptik fonksiyon yapısında olup literatürdeki çözümler ile karşılaştırıldığında yeni sonuçlar olduğu görülmüştür [33].



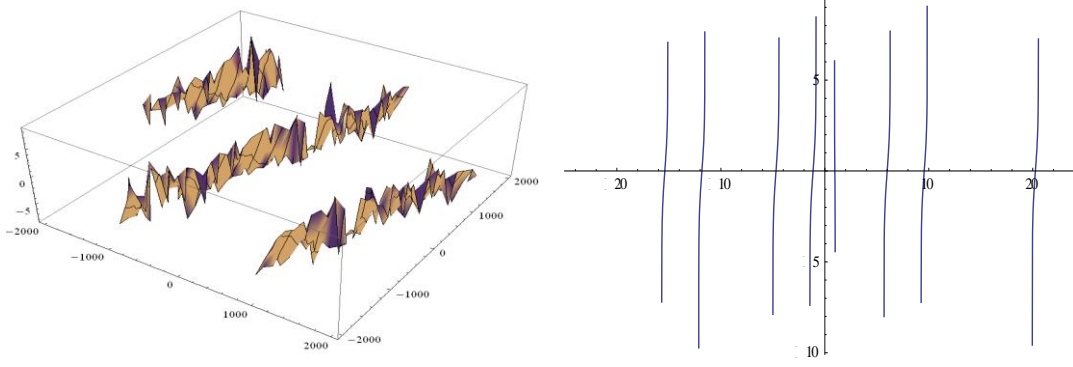
**Şekil 3.2.** (3.31) denkleminde  $i = 1$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



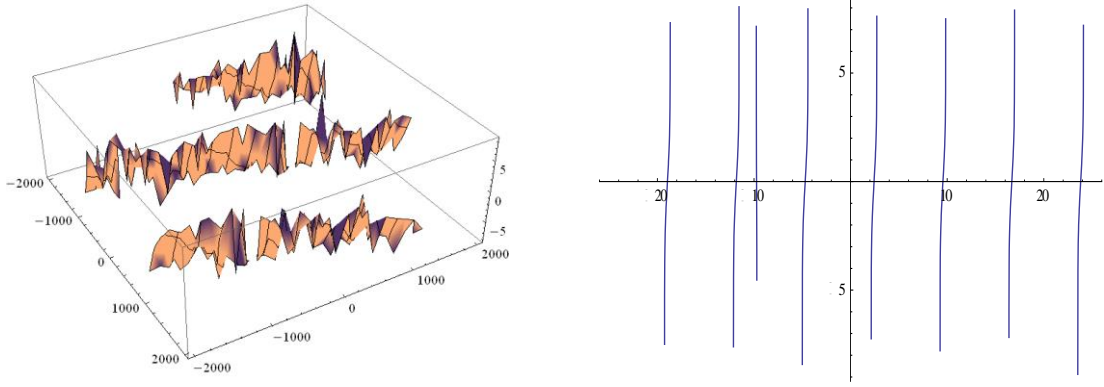
**Şekil 3.3.** (3.31) denkleminde  $i = 2$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.4.** (3.31) denkleminde  $i = 3$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.5.** (3.31) denkleminde  $i = 4$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.6.** (3.31) denkleminde  $i = 5$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

**Durum 2:**  $b_1 = b_3 = 0$  için  $\alpha + 2\beta a_0 = 0$  seçilir. Buradan da  $a_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}$  elde edilir.

$$a_{-1} = a_{-1}, \quad a_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{4\beta^2 - \alpha^2}{16\beta^2 a_{-1}}, \quad b_0 = \frac{256\beta^4 a_{-1}^4 b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{-32\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)},$$

$$b_3 = 0, \quad b_4 = b_4, \quad c = -\frac{\sqrt{-\alpha^2(\alpha^4 - 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 - 512n\beta^3\tau^2 a_{-1}^2 b_4)}}{16\sqrt{2\beta^3(\alpha^2\tau^2 a_{-1}^2 b_4)}} \quad (3.32)$$

Weierstrass fonksiyonu  $\psi(\xi; g_2, g_3)$ 'nin invariantları

$$g_2 = \frac{1024}{3} \frac{\beta^4 a_{-1} b_4^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \quad (3.33)$$

ve

$$g_3 = \frac{4096 \beta^4 a_{-1}^4 b_4^3 (9\alpha^2 - 36\beta^2 + 64\beta^2 a_{-1}^2)}{27 (\alpha^2 - 4\beta^2)^3} \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlı iken (2.4) denkleminin çözümleri

$$w_1(\xi) = \sqrt{\frac{3(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) + 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{3(\alpha^2 - 4\beta^2)b_4}} \quad (3.35)$$

ve

$$w_2(\xi) = \sqrt{-\frac{768\beta^4 a_{-1}^4 b_4}{(4\beta^2 - \alpha^2)[(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) + 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4]}} \quad (3.36)$$

olarak yazılabilir.

Weierstrass fonksiyonunun

$$g_2 = \frac{128 \beta^4 a_{-1}^4 b_4^2}{3 (\alpha^2 - 4\beta^2)^3} (17(\alpha^2 - 4\beta^2)^2 + 528\beta^2 a_{-1}^2 b_4) \quad (3.37)$$

ve

$$g_3 = -\frac{2048 \beta^6 a_{-1}^6 b_4^3}{63 (\alpha^2 - 4\beta^2)^3} \quad (3.38)$$

şeklindeki invaryantları

$$D_{\pm} = \frac{80\beta^2 a_{-1}^2 b_4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)} \quad (3.39)$$

ile tanımlanan  $D$  değeri için bir diğer çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:



$$w_3(\xi) = \frac{32\beta^2 a_{-1}^2}{(\alpha^2 - 4\beta^2)} \sqrt{\frac{b_4 [3(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) - 8\beta^2 a_{-1}^2 b_4]}{12(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) + 80\beta^2 a_{-1}^2 b_4}} \quad (3.40)$$

Ayrıca Weierstrass fonksiyonunun

$$\psi'(\xi; g_2, g_3) = \frac{d\psi(\xi; g_2, g_3)}{d\xi} \quad (3.41)$$

$$g_2 = \frac{64\beta^4 a_{-1}^4 b_4^4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \quad (3.42)$$

ve

$$g_3 = \frac{1024}{27} \frac{\beta^4 a_{-1}^4 b_4^4}{(\alpha^2 - 4\beta^2)^2} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanan türevi ve invaryantları ile

$$w_4(\xi) = \frac{16\beta^2 a_{-1}^2 \sqrt{b_4}}{3(\alpha^2 - 4\beta^2)^3} \frac{[6(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) - 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4]}{\psi'(\xi; g_2, g_3)} \quad (3.44)$$

ve

$$w_5(\xi) = \frac{3}{\sqrt{b_4}} \frac{(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi'(\xi; g_2, g_3)}{6(\alpha^2 - 4\beta^2)\psi(\xi; g_2, g_3) - 32\beta^2 a_{-1}^2 b_4} \quad (3.45)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

Genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ile

$$v(\eta) = a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.46)$$

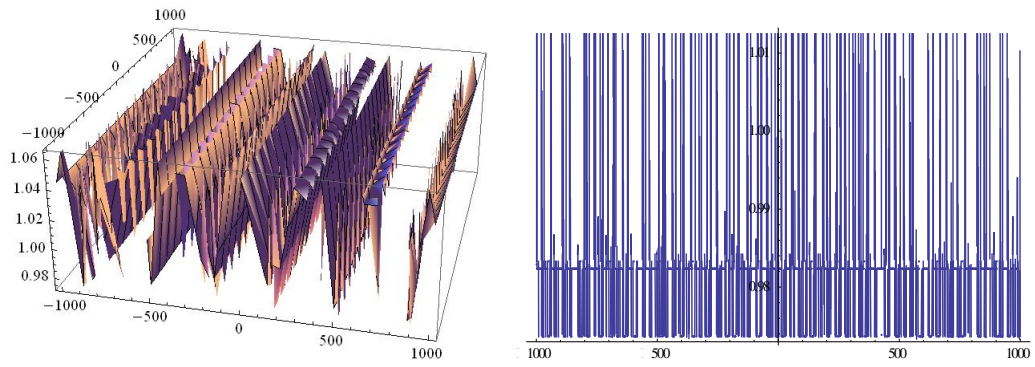
elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

$$u(\eta) = \ln(a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta)), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.47)$$

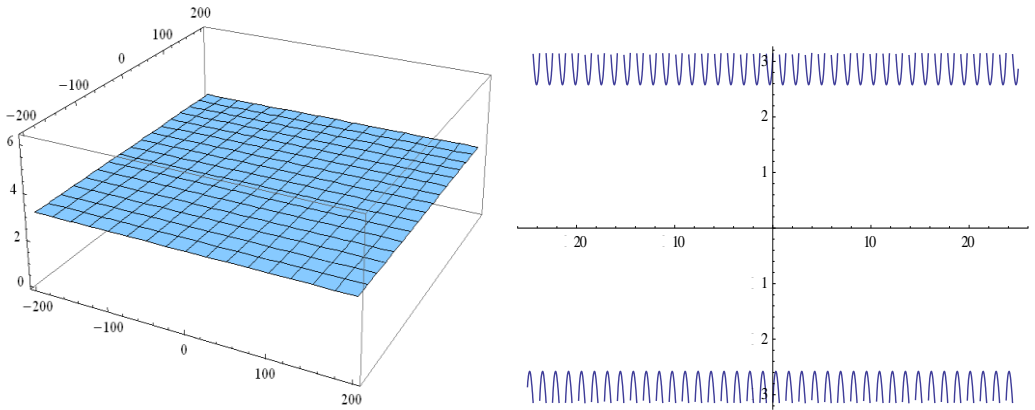
$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \ln \left( \sum_{k=-1}^1 a_k w_i^k \left[ \tau \left( \sum_{j=1}^n x_j - ct \right) \right] \right), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.48)$$

elde edilir.

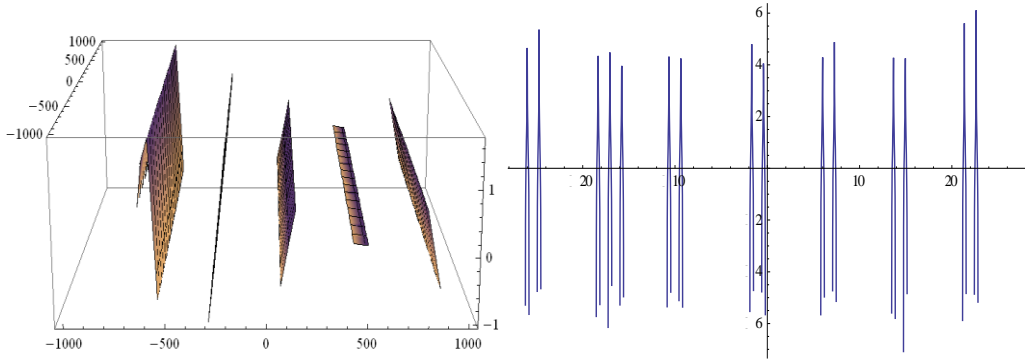
Şekil 3.7-3.13, (N+1) boyutlu çift sinh-Gordon denkleminde ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. (3.48) Weierstrass eliptik fonksiyon çözümlerinin literatürde yer almadığı ve böylece yeni çözümler olduğu görülmüştür [33].



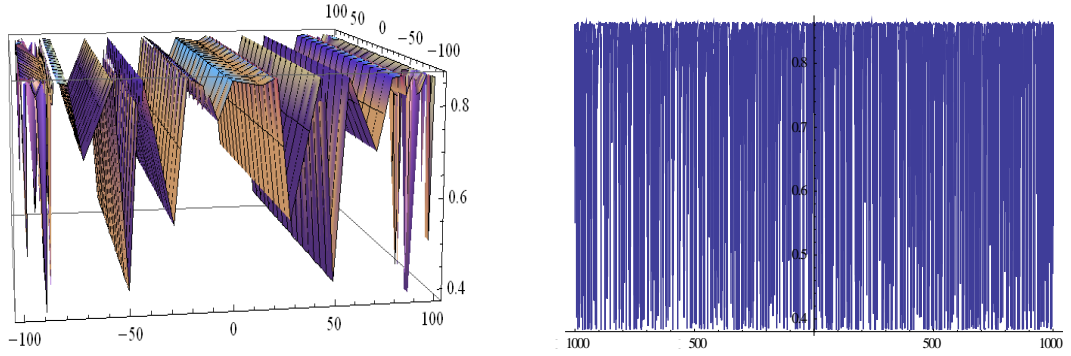
Şekil 3.7. (3.48) denkleminde  $i = 1$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için reel üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



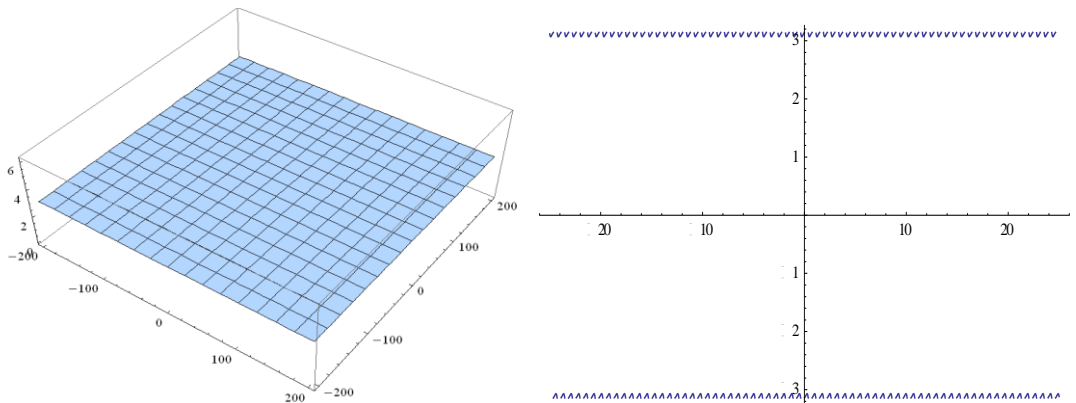
Şekil 3.8. (3.48) denkleminde  $i = 1$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için sanal üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



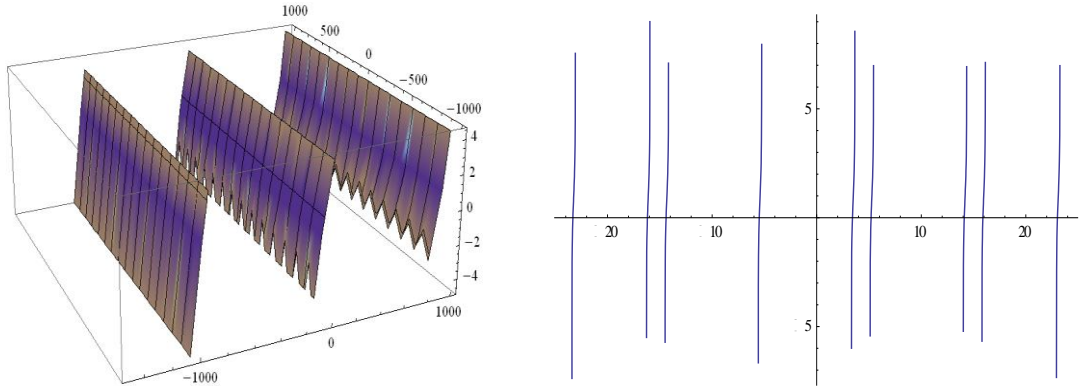
**Şekil 3.9.** (3.48) denkleminde  $i = 2$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



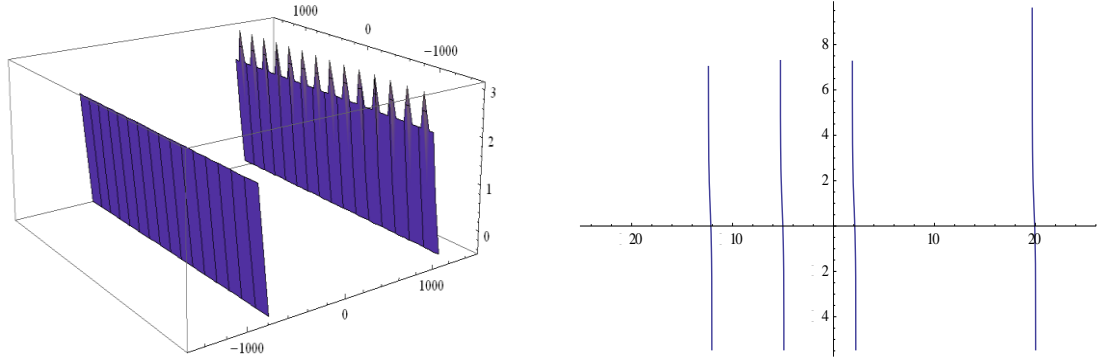
**Şekil 3.10.** (3.48) denkleminde  $i = 3$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için reel üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.11.** (3.48) denkleminde  $i = 3$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için sanal üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.12.** (3.48) denkleminde  $i = 4$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.13.** (3.48) denkleminde  $i = 5$ ,  $a_{-1} = b_4 = \tau = \beta = t = 1$ ,  $\alpha = 4$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -\frac{3}{4}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

### 3.3. Liouville Denklemi ve Uygulaması

Bu kısımda

$$u_{,xt} + e^u = 0 \quad (3.49)$$

şeklinde verilen Liouville denkleminin [32] genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. (3.49) şeklinde verilen Liouville denklemi  $u(x,t) = u(\eta)$ ,  $\eta = x - ct$ ,  $v = e^{-u}$ ,  $u = \ln v$  dönüşümleri ile

$$-c(vv'' - (v')^2) + v^3 = 0 \quad (3.50)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.50) ile verilen denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan  $v^3$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $vv''$  teriminin dengelenmesi ile denge sayısı  $N = 2$  bulunur. Hesaplanan bu dengeleme terimi (2.3) denklemde yerine yazıldığında denklemin yeni çözümü,

$$v(\eta) = a_{-2}w^{-2}(\eta) + a_{-1}w^{-1}(\eta) + a_0 + a_1w(\eta) + a_2w^2(\eta) \quad (3.51)$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$a_{-2} = a_{-2}, a_{-1} = \frac{a_0 b_3}{2b_4}, a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = 0, b_0 = \frac{a_{-2}^2 b_4}{a_0^2},$$

$$b_1 = \frac{a_{-2} b_3}{a_0}, b_2 = \frac{b_3^2}{4b_4} + \frac{2a_{-2} b_4}{a_0}, b_3 = b_3, b_4 = b_4, c = \frac{a_0^2}{2a_{-2} b_4} \quad (3.52)$$

$b_1 = b_3 = 0$  için

$$a_{-2} = a_{-2}, a_{-1} = 0, a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = 0, b_0 = \frac{a_{-2}^2 b_4}{a_0^2},$$

$$b_1 = 0, b_2 = \frac{2a_{-2} b_4}{a_0}, b_3 = 0, b_4 = b_4, c = \frac{a_0^2}{2a_{-2} b_4} \quad (3.53)$$

elde edilir.

Weierstrass fonksiyonu  $\psi(\xi; g_2, g_3)$ 'nin invariantları

$$g_2 = \frac{4}{3} \frac{a_{-2}^2 b_4^2}{a_0^2} \quad (3.54)$$

ve

$$g_3 = \frac{16}{27} \frac{a_{-2}^2 b_4^3}{a_0^3} (9a_0 - 4a_{-2}) \quad (3.55)$$

ile tanımlı iken (2.4) denkleminin çözümleri

$$w_1(\xi) = \sqrt{\frac{3a_0\psi(\xi; g_2, g_3) - 2a_2b_4}{3b_4a_0}} \quad (3.56)$$

ve

$$w_2(\xi) = \sqrt{\frac{3a_{-2}^2b_4}{a_0(a_0\psi(\xi; g_2, g_3) - 2a_{-2}b_4)}} \quad (3.57)$$

olarak yazılabilir.

Weierstrass fonksiyonunun

$$g_2 = -\frac{1}{6} \frac{a_{-2}^2b_4^2}{a_0^2} \left( -17 + 33 \frac{a_{-2}b_4}{a_0} \right) \quad (3.58)$$

ve

$$g_3 = \frac{1}{216} \frac{a_{-2}^3b_4^3}{a_0^3} \quad (3.59)$$

şeklindeki invariantları

$$D_{\pm} = -\frac{5a_{-2}b_4}{a_0} \quad (3.60)$$

ile tanımlanan  $D$  değeri için bir diğer çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$w_3(\xi) = \frac{a_{-2}}{a_0} \sqrt{\frac{2b_4(6a_0\psi(\xi; g_2, g_3) - a_{-2}b_4)}{12a_0\psi(\xi; g_2, g_3) - 5a_{-2}b_4}} \quad (3.61)$$

Ayrıca Weierstrass fonksiyonunun

$$\psi'(\xi; g_2, g_3) = \frac{d\psi(\xi; g_2, g_3)}{d\xi} \quad (3.62)$$

$$g_2 = \frac{a_{-2}^2 b_4^2}{4a_0^2} \quad (3.63)$$

ve

$$g_3 = \frac{4a_{-2}^2 b_4^2}{27a_0^2} \quad (3.64)$$

şeklinde tanımlanan türevi ve invaryantları ile

$$w_4(\xi) = \frac{a_{-2} \sqrt{b_4} (6a_0 \psi(\xi; g_2, g_3) + 2a_{-2} b_4)}{3a_0^2 \psi'(\xi; g_2, g_3)} \quad (3.65)$$

ve

$$w_5(\xi) = \frac{3a_0}{\sqrt{b_4}} \frac{\psi'(\xi; g_2, g_3)}{6a_0 \psi(\xi; g_2, g_3) + 2a_{-2} b_4} \quad (3.66)$$

çözüm fonksiyonları bulunur.

Genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ile

$$v(\eta) = a_{-2} w_i^{-2}(\eta) + a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta) + a_2 w_i^2(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.67)$$

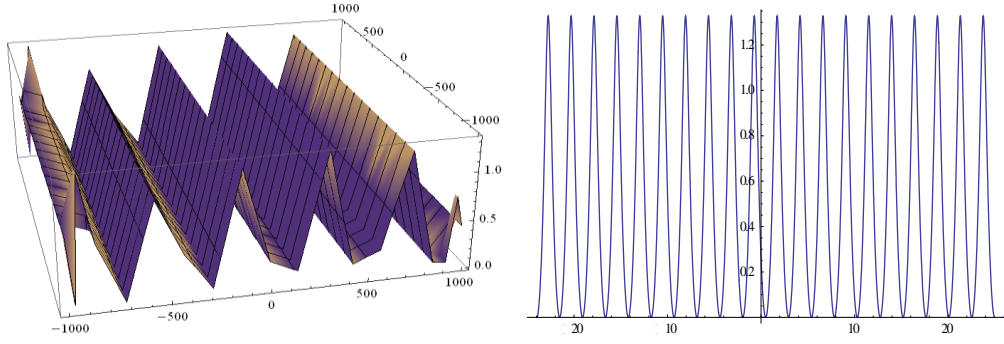
elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

$$u(\eta) = \ln(a_{-2} w_i^{-2}(\eta) + a_{-1} w_i^{-1}(\eta) + a_0 + a_1 w_i(\eta) + a_2 w_i^2(\eta)), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.68)$$

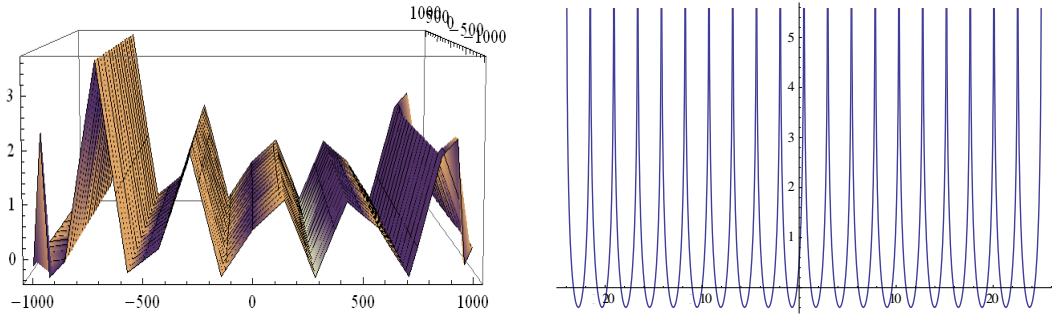
$$u(x, t) = \ln \left( \sum_{k=-2}^2 a_k w_i^k(x - ct) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.69)$$

elde edilir.

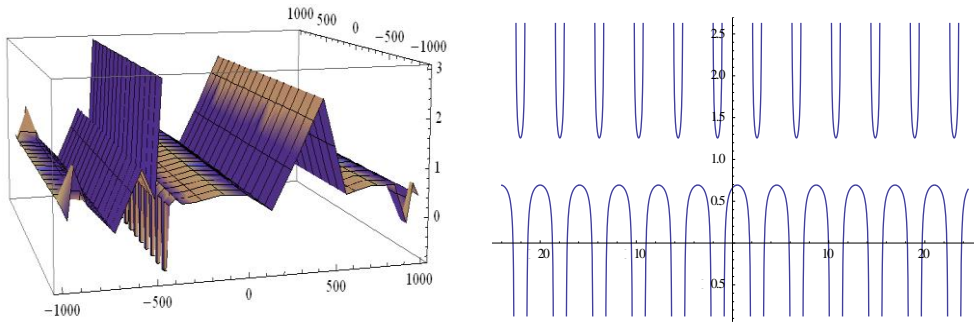
Şekil 3.14-3.18, Liouville denkleminin ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. (3.69)'daki çözümlerin Weierstrass eliptik fonksiyon yapısında olup literatürdeki çözümler ile karşılaştırıldığında yeni sonuçlar olduğu görülmüştür [32].



**Şekil 3.14.** (3.69) denkleminde  $i = 1$ ,  $a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1$ ,  $g_2 = \frac{4}{3}$ ,  $g_3 = \frac{80}{27}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

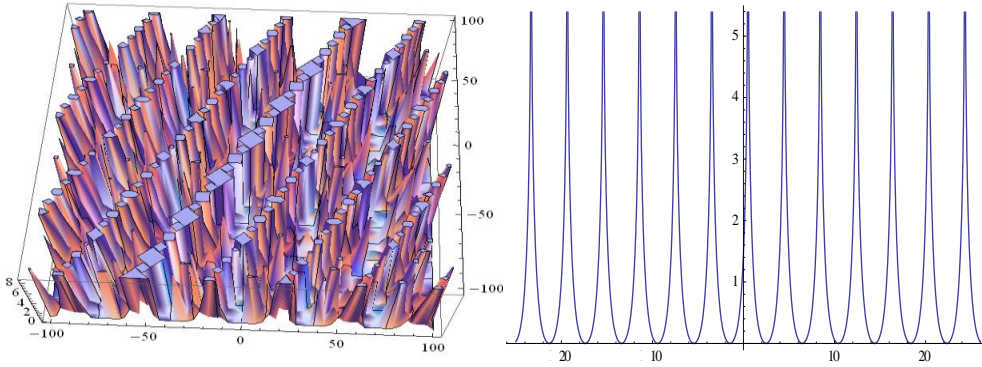


**Şekil 3.15.** (3.69) denkleminde  $i = 2$ ,  $a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1$ ,  $g_2 = \frac{4}{3}$ ,  $g_3 = \frac{80}{27}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

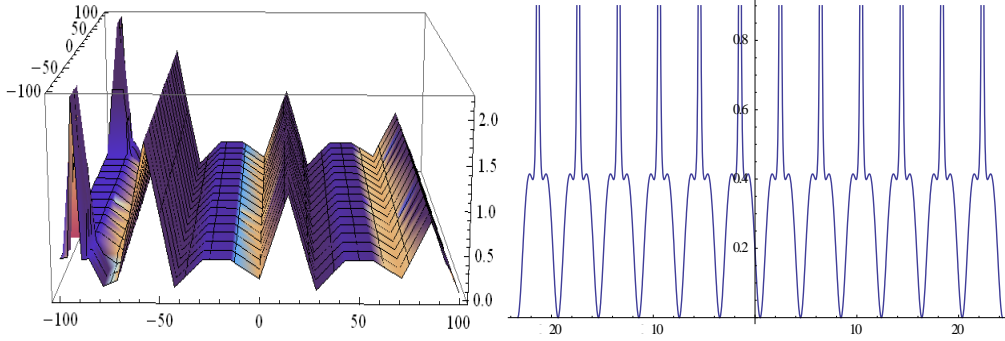


**Şekil 3.16.** (3.69) denkleminde  $i = 3$ ,  $a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1$ ,  $g_2 = -\frac{8}{3}$ ,  $g_3 = \frac{1}{216}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.





**Şekil 3.17.** (3.69) denkleminde  $i = 4$ ,  $a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1$ ,  $g_2 = \frac{1}{4}$ ,  $g_3 = \frac{4}{27}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.18.** (3.69) denkleminde  $i = 5$ ,  $a_{-2} = a_0 = b_4 = t = 1$ ,  $g_2 = \frac{1}{4}$ ,  $g_3 = \frac{4}{27}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 4. ÜSTEL FONKSİYONLU DENEME DENKLEM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde üstel fonksiyonlu deneme denklem yönteminin Tzidzeica-Dodd-Bullough, (N+1)-boyutlu çift sinh-Gordon ve Liouville denklemlerine uygulamaları verilmiştir.

### 4.1. Tzidzeica-Dodd-Bullough Denklemine Yönelik Uygulama

Bu kısımda

$$u_{xt} - e^{-u} - e^{-2u} = 0 \quad (4.1)$$

ile verilen Tzidzeica-Dodd-Bullough denklemine [32] üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi uygulanmıştır. (4.1) şeklinde verilen Zidzeica-Dodd-Bullough denklemine  $v(x,t) = e^{-u}$ ,  $u(x,t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{v^{-1} - v}{2} \right]$ ,  $\eta = x - ct$  dönüşümleri ile

$$-c(vv'' - (v')^2) - v^3 - v^4 = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.2) ile verilen denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan  $v^4$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $vv''$  teriminin dengelenmesi ile denge sayısı bulunur. Lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesi için

$$v = A_{-N} e^{-N\phi(\eta)} + \dots + A_N e^{N\phi(\eta)}$$

olarak alınır.

$$v' = \phi'(\eta) A_N e^{N\phi(\eta)} + \dots$$

$$= B_M e^{M\phi(\eta)} A_N e^{N\phi(\eta)} + \dots$$

$$= A_N B_M e^{(M+N)\phi(\eta)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
v'' &= A_N B_M \phi'(\eta) e^{(M+N)\phi(\eta)} + \dots \\
&= A_N B_M^2 e^{M\phi(\eta)} e^{(M+N)\phi(\eta)} + \dots \\
&= A_N B_M^2 e^{(2M+N)\phi(\eta)} + \dots
\end{aligned}$$

ve

$$v^4 = A_N^4 e^{4N\phi(\eta)} + \dots$$

ifadeleri  $vv'' \approx v^4$  denkleğinde yerine yazıldığında,  $N = M$  olduğu kolayca hesaplanabilir.

**Durum 1:**  $N = M = 1$  için,

İlgili  $N$  ve  $M$  değerleri sırasıyla (2.23), (2.24) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$v(\eta) = A_{-1} e^{-\phi(\eta)} + A_0 + A_1 e^{\phi(\eta)} \quad (4.3)$$

fonksiyonu ile

$$\phi(\eta) = \ln \left[ \frac{B_0}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right] \quad (4.4)$$

çözümüne sahip olan

$$\phi'(\eta) = B_0 + B_1 e^{\phi(\eta)} \quad (4.5)$$

denklemini bulunur. Bu problemin çözümü için, Mathematica paket programı yardımı ile elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$B_0 = -\frac{B_1}{A_1}, \quad B_1 = B_1, \quad A_{-1} = 0, \quad A_0 = -1, \quad A_1 = A_1, \quad c = -\frac{A_1^2}{B_1^2} \quad (4.6)$$

Bu çözümler yardımıyla

$$v(\eta) = -1 + A_1 e^{\phi(\eta)} \quad (4.7)$$

çözüm fonksiyonunda ilgili değerler yerine yazıldığında,

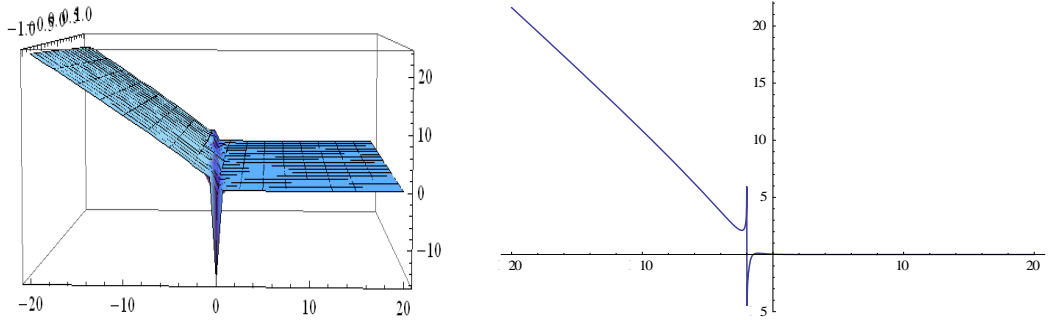
$$v(\eta) = \frac{e^{\frac{B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)}}{B_1 - e^{\frac{B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)}} \quad (4.8)$$

elde edilir.  $u(x, t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{v^{-1} - v}{2} \right]$  bağıntısı kullanılarak

$$u(x, t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{B_1 \left( B_1 - 2e^{\frac{B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)} \right)}{2e^{\frac{B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)} \left( B_1 - e^{\frac{B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)} \right)} \right] \quad (4.9)$$

şeklindeki çözüm fonksiyonu bulunur.

Şekil 4.1 Tzidzeica-Dodd-Bullough denkleminde ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. (4.9) çözümünün Weierstrass dönüşüm yöntemi ile elde edilen (3.10) fonksiyonundan ve  $(G'/G)$  yöntemi ile hesaplanan çözümlerden farklı olduğu görülmüştür [32].



**Şekil 4.1.** (4.9) denkleminde  $A_1 = B_1 = \eta_0 = t = 1$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

**Durum 2:**  $N = M = 2$  için elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$B_0 = \frac{B_1}{A_1}, B_1 = B_1, A_{-1} = 0, A_0 = 0, A_1 = A_1, c = -\frac{A_1^2}{B_1^2} \quad (4.10)$$

Bu durumda

$$v(\eta) = -1 + A_1 e^{\phi(\eta)} \quad (4.11)$$

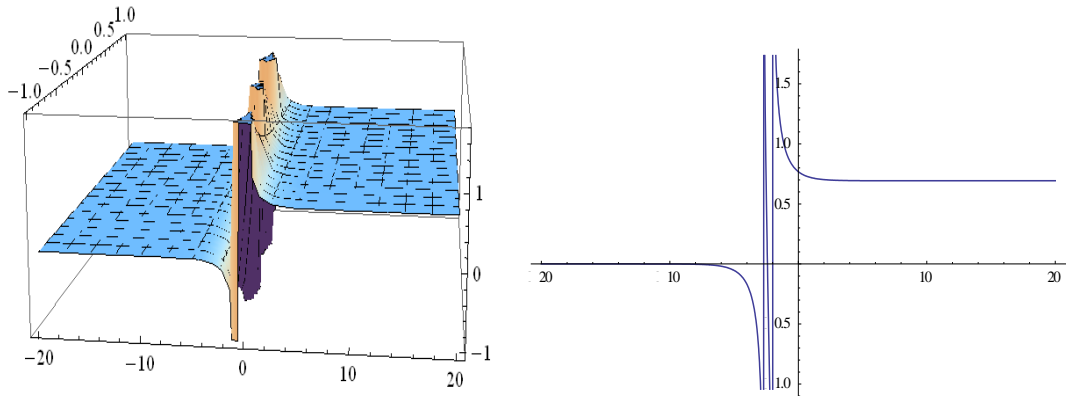
şeklindeki çözüm fonksiyonunda ilgili değerler yerine yazılarak

$$v(\eta) = -1 + \left[ \frac{B_1}{e^{\frac{-B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)} - B_1} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir ve  $u(x, t) = \operatorname{arcsinh} \frac{v^{-1} - v}{2}$  bağıntısı ile aşağıdaki çözüm bulunur

$$u(x, t) = \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{e^{\frac{-B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)} - B_1}{2B_1 - e^{\frac{-B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)}} + \frac{B_1}{B_1 - e^{\frac{-B_1}{A_1} \left( x + \frac{A_1^2}{B_1^2} t + \eta_0 \right)}} \right) \right]. \quad (4.13)$$

Şekil 4.2, 4.1 denkleminde ait çözümlerin davranışını göstermektedir. (4.13) çözümünün literatüre [32] ve (3.10) çözümüne bakılarak yeni olduğu görülmüştür.



Şekil 4.2. (4.13) denkleminde  $A_1 = B_1 = \eta_0 = t = 1$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 4.2. (N+1)-Boyutlu Çift sinh-Gordon Denkleminin Yönelik Uygulama

Bu kısımda

$$\tau^2(n-c^2)u'' - \alpha \sinh(u) - \beta \sinh(2u) = 0 \quad (4.14)$$

denkleminin [33] üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi uygulanmıştır. (4.14)

denkleminin,  $u(x_1, \dots, x_n, t) = u(\eta)$ ,  $\eta = \tau \left( \sum_{j=1}^n x_j - ct \right)$ ,  $u = \ln v$  dönüşümleri ile

$$2\tau^2(n-c^2)(vv'' - (v')^2) - \alpha(v^3 - v) - \beta(v^4 - 1) = 0 \quad (4.15)$$

şeklindeki adi diferansiyel denkleme indirgenir. (4.15) denkleminde  $v^4$  terimi ile  $vv''$  teriminin dengelenmesi sonucu  $N = M$  bulunur.  $N = M = 1$  seçilerek

$$v(\eta) = A_{-1}e^{-\phi(\eta)} + A_0 + A_1e^{\phi(\eta)} \quad (4.16)$$

fonksiyonu ile

$$\phi(\eta) = \ln \left[ \frac{B_0}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right] \quad (4.17)$$

çözümüne sahip olan

$$\phi'(\eta) = B_0 + B_1e^{\phi(\eta)} \quad (4.18)$$

denkleminin bulunur. Mathematica programı ile aşağıdaki çözüm durumlarına ulaşılır:

**Durum 1:** Elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$A_{-1} = 0, A_0 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta}, A_1 = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0},$$

$$B_0 = B_0, B_1 = B_1, c = \pm \frac{1}{\tau B_0} \sqrt{\frac{4\beta^2 - \alpha^2 + 2n\beta\tau^2 B_0^2}{2\beta}} \quad (4.19)$$

Bu çözümler yardımıyla

$$v(\eta) = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\phi(\eta)} \quad (4.20)$$

elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

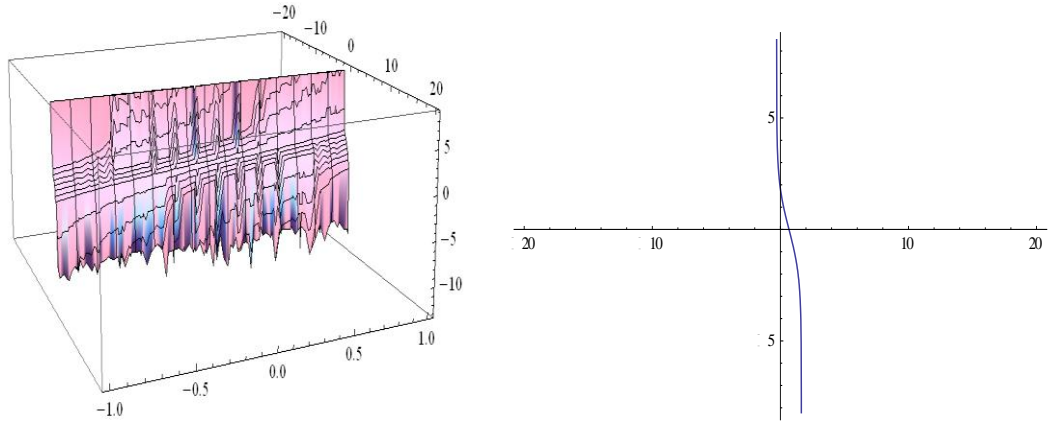
$$u(\eta) = \ln \left[ \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\phi(\eta)} \right] \quad (4.21)$$

olur. Ayrıca (4.17) denklemi (4.21) denkleminde yerine yazılarak

$$u(\eta) = \ln \left[ \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\ln \left( \frac{B_0}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right)} \right] \quad (4.22)$$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \ln \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{B_1 - e^{-B_0 \left( \tau \left[ \sum_{j=1}^n x_j \mp \frac{1}{\tau B_0} \sqrt{4\beta^2 - \alpha^2 + 2n\beta\tau^2 B_0^2} \right] + \eta_0 \right)}} \right) \right] \quad (4.23)$$

şeklindeki çözüm fonksiyonuna ulaşılır. Şekil 4.3, (N+1) boyutlu çift sinh-Gordon denkleminde ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir.



**Şekil 4.3.** (4.23) denkleminde  $B_0 = B_1 = \beta = \tau = \eta_0 = t = 1$ ,  $\alpha = 3$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  değerleri

için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

**Durum 2:** Elde ettiğimiz çözümler aşağıda verilmiştir:

$$A_{-1} = 0, A_0 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta}, A_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0},$$

$$B_0 = B_0, B_1 = B_1, c = \pm \frac{1}{\tau B_0} \sqrt{\frac{4\beta^2 - \alpha^2 + 2n\beta\tau^2 B_0^2}{2\beta}} \quad (4.24)$$

Bu çözümler yardımıyla

$$v(\eta) = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\phi(\eta)} \quad (4.25)$$

elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

$$u(\eta) = \ln \left[ \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\phi(\eta)} \right] \quad (4.26)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (4.17) denklemini (4.26) denkleminde yerine yazılarak

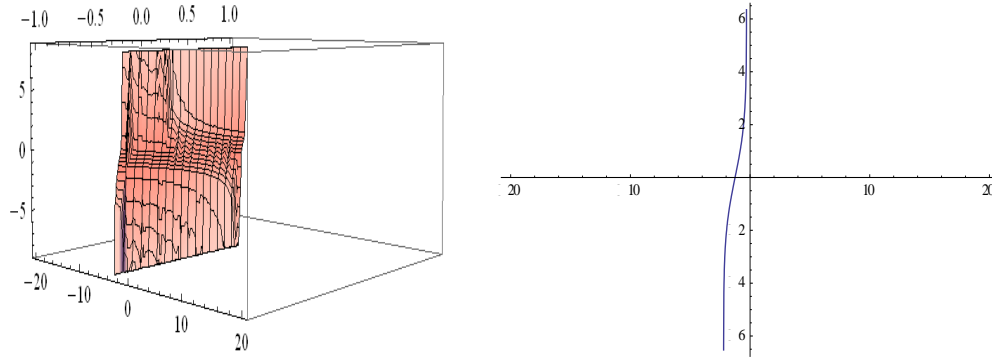
$$u(\eta) = \ln \left[ \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{\beta B_0} e^{\ln \left( \frac{B_0}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right)} \right] \quad (4.27)$$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \ln \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} B_1}{B_1 - e^{-B_0 \left[ \tau \left( \sum_{j=1}^n x_j + \frac{1}{\tau B_0} \sqrt{\frac{4\beta^2 - \alpha^2 + 2n\beta\tau^2 B_0^2}{2\beta}} t \right) + \eta_0 \right]}} \right) \right] \quad (4.28)$$

denklemini elde edilmiştir.

Şekil 4.4, (N+1) boyutlu çift sinh-Gordon denkleminin çözümlerinin dalga yapısını göstermektedir. (4.28) üstel fonksiyonlu deneme denkleminin çözümlerinin literatürde yer almadığı ve böylece yeni çözümler olduğu görülmüştür [33].





**Şekil 4.4.** (4.28) denkleminde  $B_0 = B_1 = \beta = \tau = \eta_0 = t = 1$  ,  $\alpha = 3$  ,  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

### 4.3. Liouville Denklemine Yönelik Uygulama

Bu kısımda

$$u_{xt} + e^u = 0 \quad (4.29)$$

ile verilen Liouville denklemine [32] genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. (4.29) şeklinde verilen Liouville denklemine  $u(x, t) = u(\eta)$  ,  $\eta = x - ct$  ,  $v = e^{-u}$  ,  $u = \ln v$  dönüşümleri ile

$$-c(vv'' - (v')^2) + v^3 = 0 \quad (4.30)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.30) ile verilen denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan  $v^3$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $vv''$  teriminin dengelenmesi sonucu  $2M = N$  bulunur. Özel olarak (4.30) denkleminin çözümü için  $M = 1$  için  $N = 2$  olduğunu varsayalım. Bu değerler (2.23), (2.24) denklemlerinde yerine yazıldığında denklemlerin yeni çözümleri:

$$\phi'(\eta) = B_0 + B_1 e^{\phi(\eta)} \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) denkleminin çözümü

$$\phi(\eta) = \ln \left[ \frac{B_0}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right] \quad (4.32)$$

şeklinde bulunmuştur. Buradan da

$$v(\eta) = A_{-2}e^{-2\phi(\eta)} + A_{-1}e^{-\phi(\eta)} + A_0 + A_1e^{\phi(\eta)} + A_2e^{2\phi(\eta)} \quad (4.33)$$

fonksiyonu elde edilir. Ayrıca aşağıdaki parametreler hesaplanmıştır

$$A_{-2} = 0, A_{-1} = 0, A_0 = 0, A_1 = A_1, \\ A_2 = \frac{A_1B_1}{B_0}, B_0 = B_0, B_1 = B_1, c = \frac{A_1}{2B_0B_1}. \quad (4.34)$$

Bu çözümler yardımıyla

$$v(\eta) = A_1e^{\phi(\eta)} + \frac{A_1B_1}{B_0}e^{2\phi(\eta)} \quad (4.35)$$

elde edilir.  $u = \ln v$  bağıntısı kullanılarak

$$u(\eta) = \ln \left[ A_1e^{\phi(\eta)} + \frac{A_1B_1}{B_0}e^{2\phi(\eta)} \right] \quad (4.36)$$

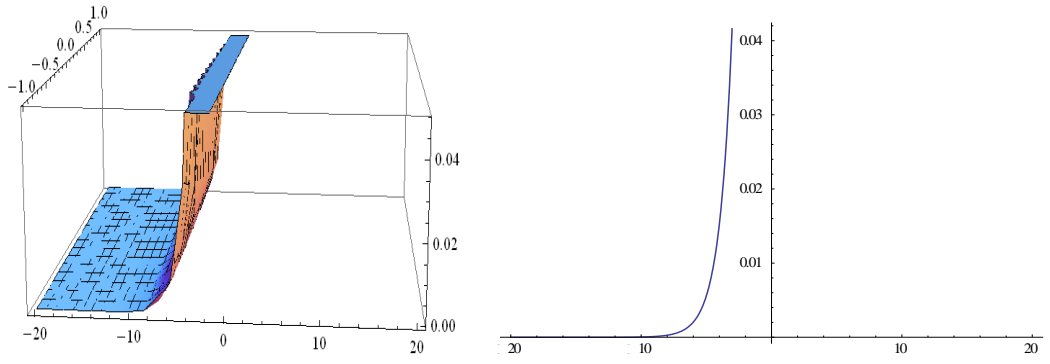
ifadesi elde edilir. Ayrıca (4.32) denklemini (4.36) denkleminde yerine yazılarak

$$u(\eta) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{A_1B_0e^{-B_0(\eta+\eta_0)}}{e^{-B_0(\eta+\eta_0)} - B_1} \right] \quad (4.37)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{A_1B_0e^{-B_0(x-ct+\eta_0)}}{e^{-B_0(x-ct+\eta_0)} - B_1} \right] \quad (4.38)$$

elde edilmiştir.

Şekil 4.5, Liouville denkleminin ait çözümlerin dalga yapısını göstermektedir. (4.38) üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemine ait çözümlerin literatürde yer almadığı ve böylece yeni çözümler olduğu görülmüştür [32].



**Şekil 4.5.** (4.38) denkleminde  $B_0 = B_1 = A_1 = \eta_0 = t = 1$  ,  $c = \frac{1}{2}$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## SONUÇ

Bu tez çalışmasında gerçek yaşam problemlerinin matematiksel modellerini ifade eden üstel veya hiperbolik fonksiyonları içeren Tzidzeica-Dodd-Bullough,  $(N+1)$ -boyutlu çift sinh-Gordon ve Liouville denklemlerine sırasıyla genişletilmiş Weierstrass dönüşüm yöntemi ile üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi uygulanmış ve elde edilen çözüm fonksiyonları literatürdeki çözümler ile karşılaştırılmıştır. Böylece literatürde olmayan bazı yeni çözümler bulunduğu görülmüştür. Weierstrass dönüşüm yöntemi kullanılarak genel eliptik diferansiyel denklemden bulunan Weierstrass eliptik fonksiyonlarının oluşturduğu yeni çözüm sınıflarına ulaşılmıştır. Diğer taraftan üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemi ile de rasyonel üstel fonksiyonların logaritma formundaki çözümleri elde edilmiş olup bu iki yöntem ve literatürdeki diğer yöntemler karşılaştırıldığında bazı yeni çözüm fonksiyonlarının yapılandırıldığı görülmüştür. Ayrıca parametrelerin keyfi değerleri için çizilen iki ve üç boyutlu grafikler ile çözümlerin fiziksel davranışları belirlenmiştir. Bu yöntemlerin uygulanmasında kullanılan kodlar Mathematica paket programında kolayca oluşturulmuştur. Bu sonuçlar neticesinde genişletilmiş Weierstrass dönüşüm ve üstel fonksiyonlu deneme denklem yöntemlerinin üstel veya hiperbolik fonksiyonları içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkin olduğu söylenebilir. Bu tez çalışmasında kullanılan iki yöntem diğer üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonları içeren diferansiyel denklemler ile geliştirilmiş formdaki diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

1. Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., Interaction of Solitons Incollisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett., 15, 240-243, 1965.
2. Debtnath, L., Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA., 1997.
3. Wazwaz, A.M., Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, Rotterdam, 2002.
4. Hirota, R., Direct Methods in Soliton Theory, In Solitons (Bullogh, R. K. and Caudrey, P. J., Eds). Springer, Berlin, 1980.
5. Biswas, A., 1-soliton Solution of the K(m,n) Equation with Generalized Evolution, Phys. Lett. A, 372, 4601-4602, 2008.
6. Triki, H., et al., 1-soliton Solution of the Three Component System of Wu-Zhang Equations, Hacet. J. Math. Stat., 41(4), 537-543, 2012.
7. Alshaery, A.A., et al., Bright and Singular Solitons in Quadratic Nonlinear Media, J. Electromagnet. Wave. App., 28(3), 275-280, 2014.
8. El-Wakil, S.A., et al., Exact Periodic Wave Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations, Chaos Soliton. Fract., 29(4), 1037-1044, 2006.
9. Hu, X.B., Ma W.X., Application of Hirota's Bilinear Formalism to the Toeplitz Lattice-Some Special Soliton-Like Solutions, Phys. Lett. A, 293, 161-165, 2002.
10. Fan, E.G., Extended tanh-Function Method and its Applications to Nonlinear Equations, Phys. Lett. A, 277, 212-218, 2000.
11. Matveev, V.B., Salle, M.A., Darboux Transformations and Solitons, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
12. Wang, M.L., Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations, Phys. Lett. A, 199, 169-172, 1995.
13. Yan, C.T., A Simple Transformation for Nonlinear Waves, Phys. Lett. A, 224, 77-84, 1996.
14. Feng, Z.S., On Explicit Exact Solutions to the Compound Burgers-KdV Equation, Phys. Lett. A, 293, 57-66, 2002.
15. Liu, C.S., Trial Equation Method and its Applications to Nonlinear Evolution Equations, Acta. Phys. Sin., 54(6), 2505-2509, 2005.

16. Liu, C.S., Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications, *Commun. Theor. Phys.*, 45(2), 219-223, 2006.
17. Liu, C.S., Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, *Comput. Phys. Commun.*, 181(2), 317-324, 2010.
18. Gurefe, Y., et al., Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, *Pramana-J. Phys.*, 77(6), 1023-1029, 2011.
19. Gurefe, Y., et al., Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *J. Adv. Math. Stud.*, 5(1), 41-47, 2012.
20. Pandir, Y., et al., Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 478531, 16 pp, 2012.
21. Pandir, Y., et al., Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation, *Phys. Scr.*, 87(2), 025003, 12 pp, 2013.
22. Gurefe, Y., et al., Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 219(10), 5253-5260, 2013.
23. Huber, A., The Calculation of Novel Class of Solutions of a Non-linear Fourth Order Evolution Equation by the Weierstrass Transform Method, *Appl. Math. Comput.*, 201(1-2), 668-677, 2001.
24. Huber, A., A Novel Class of Solutions for a Non-linear Third Order Wave Equation Generated by the Weierstrass Transformation, *Chaos Soliton. Fract.*, 28(4), 972-978, 2006.
25. Wakil, E.A., et al., Extended Weierstrass Transformation Method for Nonlinear Evolution Equations, *Nonl. Sci. Lett. A: Math. Phys. Mech.*, 1(3), 253-262, 2010.
26. Gurefe, Y., et al., New Exact Solutions of the Davey-Stewartson Equation with Power-Law Nonlinearity, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 38, 1223-1234, 2015.
27. Khan, A., Akbar, M.A., Application of  $\exp(-\Phi(\eta))$ -Expansion Method to Find the Exact Solutions of Modified Benjamin-Bona-Mahony Equation, *World Appl. Sci. J.*, 24(10), 1373-1377, 2013.

28. Hafez, M.G., et al., Some New Exact Traveling Wave Solutions for the Zhiber-Shabat Equation, *British J. Math. Com. Sci.*, 4(18), 2582-2593, 2014.
29. Roshid, O.R., Rahman, M.A., The  $\exp(-\Phi(\eta))$ -Expansion Method with Application in the (1+1)-Dimensional Classical Boussinesq Equations, *Results Phys.*, 4, 150-155, 2014.
30. Hafez, M.G., et al., Traveling Wave Solutions for Some Important Coupled Nonlinear Physical Models via the Coupled Higgs Equation and the Maccari System, *J. King Saud Uni.-Sci.*, 27(2), 105-112, 2015.
31. Hafez, M.G., Akbar, M.A., An Exponential Expansion Method and its Application to the Strain Wave Equation in Microstructured Solids, *Ain Shams Engineer. J.*, 6, 683-690, 2015.
32. Borhanifar, A., Moghanlu, A.Z., Application of the (G'/G)-Expansion Method for the Zhiber-Shabat Equation and Other Related Equations, *Math. Comput. Model.*, 54, 2109-2116, 2011.
33. Lee J., Sakthivel R., Travelling Wave Solutions for (N+1)-Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *Pramana-J. Phys.*, 75(4), 565-578, 2010.
34. Guenther, R.B., Lee W.J., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equation*, Prentice- Hall, Mineola, U.S.A., 1988.
35. Saied, E.A., et al., A Generalized Weierstrass Elliptic Function Expansion Method for Solving Some Nonlinear Partial Differential Equations, *Comput. Math. Appl.*, 58, 1725-1735, 2009.

## **ÖZGEÇMİŞ**

26.09.1990 tarihinde Hatay'ın Erzin ilçesinde doğan Latife Gizem KAMBUR, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Hürriyet İlköğretim Okulu, YDA Erzin Yeşilkent Lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında başarıyla bitirmiştir.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda başlamıştır.

### **İletişim Bilgileri**

Telefon: (531) 8828756

E-posta: latife.gizem.kambur@gmail.com