T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE RIEMANN METODU

Buğra BAĞCI

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE RIEMANN METODU

Buğra BAĞCI

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312005 numaralı öğrencisi Buğra BAĞCI'nın hazırladığı "**Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Riemann Metodu**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 02/01/2014 Perşembe günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...../...../20.... tarih ve ...... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....../....../20....

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE RIEMANN METODU

Buğra BAĞCI

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2014; Sayfa: 125

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde verilmiş kaynaklar incelenerek elde edilebilecek yeni sonuçlarla kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılıp hiperbolik diferansiyel denklemler için Cauchy ve Goursat problemlerinin çözümü açık integral formüllerle ifade edilmiştir. Buradaki Cauchy ve Goursat problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği, bu problemlerin eşdeğer Volterra integral denklemler sisteminin sürekli çözümünün bulunması problemine getirilip ardışık yaklaşımlar metodu ile çözümü bulunarak ispatlanmıştır. Bu tezde Riemann metodu lineer diferansiyel operatörler için Green formülü kullanılarak verildiğinden burada lineer diferansiyel operatörler için Green formülleri de gereken şekilde verilmiştir. Riemann metodunun açıklanmasında Riemann fonksiyonu önemli bir yer tutar. Tezde Riemann fonksiyonu Cauchy ve Goursat problemleri için gereken şekilde tanımlanmış, Riemann fonksiyonunun özellikleri örneğin simetrikliği ve Riemann fonksiyonunun bulunması yöntemi verilmiş ve ayrı ayrı örneklerde inşa metodu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Diferansiyel Denklemler, Cauchy Problemi, Goursat Problemi, Karakteristikler Metodu, Riemann Metodu.

RIEMANN METHOD FOR THE SOLUTION OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Buğra BAĞCI

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2014; Page: 125

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis new results can be obtained by examining the given references of the classified hyperbolic partial differential equations with Cauchy and Goursat problems for the solution of differential equations and integral formulas are expressed an clear. The Cauchy and Goursat problems of existence and uniqueness of the solution of these problems equivalent Volterra system of integral equations by the method of successive approximations to the solutions has been found and proven. In this thesis, Riemann method for linear differential operator with the formula for the Green, are given here for linear differential operators are provided as required in formulas Green. Riemann method, Riemann function plays an important role in explaining. In thesis, Riemann function defined as needed to Cauchy and Goursat problems, Riemann function characteristics such symmetry and the presence of the Riemann function given method and construction method is shown in the individual cases.

Keywords: Hyperbolic Differential Equations, Cauchy Problem, Goursat Problem, Method Of Characteristics, Method Of Riemann.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Öğr. Gör. Mehmet EKİCİ, Araş. Gör. Hüseyin KAMACI ile her zaman arkamda duran değerli ailem ve eşim Zehra BAĞCI'ya sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

$[a,b]$	:	Kapalı Reel Sayı Aralığı
(a,b)	:	Açık Reel Sayı Aralığı
$C_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$l(y)$	:	Lineer Diferansiyel İfade
$l^{*}(y)$	:	Lineer Diferansiyel İfadenin Eşleniği
L	:	LineerDiferansiyel Operatör
L^{*}	:	L Operatörünün Eşlenik Operatörü
$G(x,\xi)$	:	Green Fonksiyonu
sin	:	Sinüs Fonksiyonu
cos	:	Kosinüs Fonksiyonu
$v(x,y;\xi,\eta)$	:	Riemann Fonksiyonu
$y^{(n)}(x)$	:	$y(x)$ fonksiyonunun x-e göre n. mertebeden türevi
$\frac{\partial}{\partial x}$	:	x-e göre kısmi türev operatörü

1. GİRİŞ

$x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $(k = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ kısmi türevlerini içeren denkleme aranan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun kısmi türevli diferansiyel denklemi denir[1].

Kısmi türevli diferansiyel denklemi genel olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

Bu denklemdeki F fonksiyonu gösterilen argümentlere bağlı fonksiyondur.

Aranan u fonksiyonunun diferansiyel denklemin içerdiği en yüksek mertebeli türevinin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir[1].

Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem genel şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1.2)$$

İki bağımsız değişkene bağlı birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem genel şekilde uygun olarak,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

biçiminde ifade edilir.

Uygun olarak ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

şeklinde yazılır.

Aranan fonksiyonun tüm yüksek mertebeden türevlerine göre lineer olan kısmi türevli diferansiyel denkleme kuazi lineer diferansiyel denklem denir.

Örneğin,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f=0 \tag{1.5}$$

denklemi ikinci mertebeden iki bağımsız değişkene bağlı kuazi lineer diferansiyel denklemdir.

Aranan fonksiyona ve onun tüm kısmi türevlerine göre lineer olan kısmi türevli diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir[1].

Örneğin,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F \tag{1.6}$$

denklemi aranan u fonksiyonuna göre ikinci mertebeden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemdir.

Aranan fonksiyonu ve bu fonksiyonun gereken kısmi türevlerini verilmiş diferansiyel denklemde yerine yazdığımızda denklemi sağlayan u fonksiyonuna kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü denir[1].

Birçok fiziksel olay kısmi türevli diferansiyel denklemle ifade edilir.

Örneğin,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=n(x,y,z) \tag{1.7}$$

denklemi, kırılma indisi $n(x,y,z)$ olan homojen olmayan ortamda ışık ışınlarının yayılması denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

denklemi çubukta ısı iletimi denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

denklemi telin titreşimi denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.10}$$

denklemi Laplace denklemi olup yüklü kaynakların olmadığı ortamda, elektrik alanı denklemi, veya cismin içinde ısı kaynağı olmadığında homojen izotrop ortamda ısı iletimi denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z) \tag{1.11}$$

denklemi homojen izotrop bölgede ısı iletiminin durumunu ifade eden Poisson denklemidir. Burada $-f(x,y,z)$ fonksiyonu (x,y,z) koordinatlı noktada ısı kaynağının gücünü ifade eden fonksiyondur[1].

$(1.7) - (1.11)$ denklemlerine matematiksel fiziğin temel denklemleri denir.

$(1.7) - (1.11)$ denklemlerinin her birinin sonsuz tane çözümü vardır. Verilmiş özel fiziksel ve ya geometrik, teknik problemi çözerken bu sonsuz çözümlerden ek şartları sağlayan bir çözüm seçmemiz gerekir. Buradaki ek şartlar, başlangıç ve sınır şartları olabilir.

Genelde kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ilgili problemlerin üç temel şartı sağlaması gerekir:

1) Ele alınan problemdeki kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü olmalıdır;

2) Ele alınan problemin çözümü tek olmalıdır;

3) Ele alınan problemdeki kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü başlangıç verilerine bağlı olarak kararlı olmalıdır. Yani, problemdeki verilere küçük değişiklikler yaptığımızda çözümde de küçük değişiklikler olmalıdır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ilgili ele alınan problem bu üç şartı sağladığında bu probleme korrekt problem denir.

Korrekt olmayan problemlerin fiziksel anlamı olmayabilir.

Burada, ifade edilen tanımlara bağlı kalarak ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin kanonik şekle dönüştürülmesi gösterilecek ve örneklerle açıklanacaktır. Ayrıca hiperbolik diferansiyel denklemlerin çözümünde karakteristikler metodu tanımlanarak sonsuz telin serbest titreşimleri denkleminin karakteristikler metodu ile genel çözümü için D'alambert formülü elde edilecektir. Bunlara ek olarak Cauchy ve Goursat problemleri tanımlanarak bu problemler, eşdeğer integral denklemler sisteminin çözümüne getirilerek ardışık yaklaşımlar metodu ile varlık ve teklikleri ispatlanacaktır. Tezin konusunu belirleyen Riemann metodu, Cauchy ve Goursat problemlerine uygulanacak, farklı örneklerle açıklanacaktır. Riemann metodunun ortaya çıkmasına yardımcı olan Riemann fonksiyonu tanımlanarak fiziksel anlamı anlatılacaktır. Son olarak, elektrik hatlarındaki titreşimler Riemann metodu yardımıyla açıklanacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. İki Bağımsız Değişkene Bağlı İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Hale Getirilmesi

İki boyutlu bölgede iki bağımsız değişkene bağlı ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler genel olarak,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir[2].

(2.1) denklemi yüksek mertebeden türevlere göre lineer olduğunda ve yüksek mertebeden türevlerin katsayıları x, y değişkenleri ile birlikte u, u_x, u_y değişkenlerine de bağlı olduğunda bu denkleme kuazi lineer diferansiyel denklem denir. (2.1) denklemi aranan fonksiyonun kendisine ve türevlerine göre lineer olduğunda ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Yüksek mertebeden türevlere göre lineer olan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.1')$$

Burada $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ bir Ω bölgesinde tanımlanmış önceden verilmiş sürekli fonksiyonlar ve F fonksiyonu da önceden verilmiş bir fonksiyondur.

Şimdi $(2.1')$ şeklinde ifade edilen diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasını ve kanonik şekle getirilmesini gösterelim:

İkinci mertebeden kuazi lineer diferansiyel denklemin tipi diskriminant olarak isimlendirilen,

$$\Delta(x,y) = B^2 - AC$$

ifadesinin işareti ile belirlenir ve burada 3 farklı durum karşımıza çıkar:

1) $\Delta = B^2 - AC > 0$ olduğunda $(2.1')$ denklemine hiperbolik diferansiyel denklem denir ve belli bir kuralla seçilmiş $\xi = \xi(x,y)$ ve $\eta = \eta(x,y)$ değişkenleri yardımıyla,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (2.2')$$

sade (kanonik) şekillerinden birine getirilir.

Hiperbolik diferansiyel denklemin (2.2) şekline birinci kanonik şekli, $(2.2')$ şekline ise ikinci kanonik şekli denir. Kolaylıkla,

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}\ , \qquad \beta = \frac{\xi-\eta}{2}$$

dönüşümünün kullanılmasıyla diferansiyel denklemin birinci kanonik şekli ikinci kanonik şekline veya tersine getirilebilir[2].

2) $\Delta = B^2 - AC = 0$ olduğunda $(2.1')$ denklemine parabolik diferansiyel denklem denir ve bu denklem belli bir $\xi = \xi(x,y)$ ve $\eta = \eta(x,y)$ dönüşümü ile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (2.3)$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_4\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (2.3')$$

kanonik şekillerinden birine getirilebilir[2].

3) $\Delta = B^2 - AC < 0$ olduğunda ise $(2.1')$ denklemine eliptik diferansiyel denklem denir ve bu denklemi belli bir $\xi = \xi(x,y)$ ve $\eta = \eta(x,y)$ dönüşümü ile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_5\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{2.4}$$

kanonik şekline getirmek mümkündür[2].

Örnek 2.1.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

Bu denklemde,

$$A(x, y) = x \quad , \quad B(x, y) = 0 \quad , \quad C(x, y) = y$$

olduğundan;

$$\Delta(x, y) = B^2 - AC = -xy$$

olur.

Buradan;

$-xy > 0$ dolayısıyla $xy < 0$ olduğunda yani Oxy düzleminin 2. ve 4. bölgelerinde ele aldığımız denklem hiperbolik diferansiyel denklemdir.

$-xy < 0$ dolayısıyla $xy > 0$ olduğunda Oxy düzleminin 1. ve 3. bölgelerinde ele aldığımız denklem eliptik diferansiyel denklemdir.

2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Hale Getirilmesi İçin Değişken Dönüşümü

Şimdi ikinci mertebeden kısmi türevli $(2.1')$ denkleminde,

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \tag{2.5}$$

dönüşümü yapalım. Bunun için $(2.1')$ denkleminin içerdiği türevlerin yeni değişkenlerdeki türevlerle ifadelerini bulalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

Türevler için bulduğumuz bu ifadeleri $(2.1')$ denkleminde uygun olarak yerlerine yazıp $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ türevlerine göre gruplandırdığımızda $(2.1')$ denklemi yeni ξ ve η değişkenleri ile aşağıdaki şekilde yazılır:

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

Burada;

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.7)$$

$$B_1 = A \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2.8)$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.9)$$

dir.

2.3. Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Hale Getirilmesi

Şimdi $\Delta(x, y) = B^2 - AC > 0$ eşitsizliği sağlandığında yani $(2.1')$ denklemi hiperbolik diferansiyel denklem olduğunda $(2.1')$ denklemini birinci çeşit kanonik şekle getirelim. Bu durumda, $A_1 = C_1 = 0$ ve $B_1 \neq 0$ şartının sağlanması gerekir.

Varsayalım ki, $A_1 = C_1 = 0$ olsun. O zaman A_1 ve C_1 katsayılarının (2.7) ve (2.9) ifadelerinden $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ fonksiyonlarının uygun olarak

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

denklemlerinin çözümleri olması gerekir. Bu denklemlere dikkat ettiğimizde ise $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ fonksiyonlarının aynı,

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

denkleminin farklı çözümleri olduğu görülür.

Bu sonuncu denklemin her iki tarafını $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ ifadesine bölelim ve

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{dy}{dx}$$

şeklinde yazalım.

Bu durumda sonuncu denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \qquad (2.10)$$

Bu (2.10) denklemine $(2.1')$ denkleminin karakteristik denklemi denir.

Burada $B^2 - AC > 0$ olduğundan (2.10) denklemini $\frac{dy}{dx}$ türevine göre çözersek,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \qquad (2.10')$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \qquad (2.10'')$$

eşitliklerini elde ederiz.

Burada genelliği bozmadan $A \neq 0$ olduğunu varsaydık.

Bulduğumuz bu denklemlerde $B^2 - AC > 0$ olduğundan bu denklemlerin sağ tarafları reel ve farklı fonksiyonlardır. Bu denklemlerin uygun olarak genel integrallerini,

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad , \quad \psi(x, y) = c_2 \qquad (2.11)$$

ile gösterelim.

(2.11) eğrilerine $(2.1')$ denkleminin karakteristik eğrileri ve ya karakteristikleri denir. Böylece, $B^2 - AC > 0$ olduğunda $(2.1')$ denkleminin farklı reel karakteristikler ailesi vardır[2].

Şimdi (2.5) dönüşümünde;

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) = \varphi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) = \psi(x,y) \end{cases} \tag{2.11'}$$

aldığımızda $A_1 = C_1 = 0$ elde edilir. Burada $B_1 \neq 0$ olduğu genel olarak ispatlanır. Ayrıca, $\varphi(x,y)$ ve $\psi(x,y)$ fonksiyonlarının yukarıdaki diferansiyel denklemlerin iki kez sürekli diferansiyellenebilen çözümleri olduklarını varsayarız.

Böylece $(2.11')$ dönüşümünün yardımıyla $(2.1')$ denklemi,

$$2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{2.12}$$

ve ya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2B_1} F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{2.12'}$$

kanonik şekline getirilmiş olur.

$(2.12')$ kanonik şeklinden ikinci kanonik şekle geçmek için $(2.12')$ denkleminde,

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

eşitlikleri ile yeni α ve β değişkenlerine geçtiğimizde,

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\right) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u}{\partial\beta}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)$$

eşitliklerini kullanarak $(2.12')$ denklemini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \phi \quad , \quad \left(\phi = -4\frac{1}{2B_1}F\right)$$

ikinci kanonik şekline getirmiş oluruz.

2.4. Parabolik Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Hale Getirilmesi

Parabolik diferansiyel denklemler için $B^2 - AC = 0$ olduğundan $(2.1')$ denklemi parabolik olduğunda (2.10) karakteristik denkleminin yalnız bir tane çözümü olur. Yani $(2.1')$ denkleminin yalnız bir karakteristik denklemi olur. İkinci karakteristik öyle seçilir ki, $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ dönüşümünün,

$$J(\xi,\eta) = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Jakobiyanı sıfırdan farklı olsun. $\eta(x,y)$ burada ifade edilen şartla seçildiğinde $(2.1')$ denklemi parabolik olduğu durumda $B = \sqrt{AC}$ olduğundan,

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

olur.

Bu eşitliğin sağlanmasından da,

$$B_1 = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0$$

eşitliği bulunur.

Bu yüzden $(2.1')$ denklemi parabolik olduğunda (2.5) dönüşümü burada gösterilen yöntemle seçildiğinde $(2.1')$ denklemi

$$C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad , \quad \left(\phi = -\frac{1}{C_1}F\right)$$

kanonik şekline getirilmiş olur. Bu denklemin sağ tarafında $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ türevi olmadığından bu denklem ξ parametresine bağlı adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür[2].

2.5. Eliptik Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Hale Getirilmesi

$(2.1')$ denklemi eliptik denklem olduğunda yani $B^2 - AC < 0$ şartı sağlandığında $(2.10')$ ve $(2.10'')$ denklemlerinin sağ tarafları kompleks değerli fonksiyonlar olur.

Varsayalım ki,

$$\varphi(x, y) = c_1$$

$(2.10')$ denkleminin kompleks integralidir.

Bu durumda,

$$\bar{\varphi}(x, y) = c_2$$

$(2.10'')$ kompleks eşlenik denklemin genel integrali olur. Burada $\bar{\varphi}(x, y)$ fonksiyonu $\varphi(x, y)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Şimdi biz (2.5) dönüşümü olarak,

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) = \bar{\varphi}(x, y) \end{cases} \tag{2.13}$$

dönüşümünü aldığımızda $(2.1')$ denklemi (2.12) ve ya $(2.12')$ denklemi şekline getirilir.

Kompleks değişkenlerle işlem yapmamak için aşağıdaki dönüşümlerle yeni α, β değişkenlerine geçelim:

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2}$$

Böylece;

$$\xi = \alpha + i\beta \quad , \quad \eta = \alpha - i\beta$$

olur.

Bu durumda,

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left(A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2-\left(A\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right)\right)$$

$$+2i\left(A\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)=0$$

Yani,

$$A_1=C_1$$

(2.6) denklemi $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}$ türevinin katsayısına bölündükten sonra aşağıdaki şekle getirilmiş olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\phi\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)\quad,\quad\left(\phi=-\frac{1}{C_1}F\right)$$

Bu ise eliptik diferansiyel denklemin kanonik şeklidir[2].

2.6. Örnekler

Örnek 2.2.

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

denklemini kanonik şekle getirelim.

Bu denklemde;

$$A=2,\qquad B=\frac{3}{2},\qquad C=1$$

olduğundan,

$$B^2 - AC = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

olur ve ele aldığımız denklemin hiperbolik kısmi diferansiyel denklem olduğu anlaşılır. Söz konusu denklemin karakteristik denklemi, yani

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

denklemleri uygun olarak

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}}{2}$$

olur.

Buradan,

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

dir.

Bu denklemleri çözerek;

$$x - y = c_1 \quad ve \quad x - 2y = c_2$$

genel integrallerini buluruz.

Böylece verilmiş denklemin karakteristikleri,

$$\xi = x - y \quad , \quad \eta = x - 2y$$

olur.

Şimdi ele aldığımız diferansiyel denklemin içerdiği türevleri bulalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(-1)\right]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Türevlerin bu değerlerini ele aldığımız denklemde yerlerine yazdığımızda verilmiş hiperbolik diferansiyel denklemin aşağıdaki birinci kanonik şeklini bulmuş oluruz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 3\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

Şimdi bu birinci kanonik şekilden ele aldığımız hiperbolik diferansiyel denklemin ikinci kanonik şekline geçmek için bu elde ettiğimiz birinci kanonik denklemde;

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

değişken dönüşümünü yapalım. Yukarıdaki denklemde bulunan türevleri hesapladığımızda;

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial \eta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right] = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Türevler için bulduğumuz bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazdığımızda;

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 3\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 6\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0$$

bulunur.

Örnek 2.3.

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10\frac{\partial u}{\partial x} - 15\frac{\partial u}{\partial y} - 50u + x - 2y = 0$$

denklemini kanonik hale getirelim.

Bu denklemde;

$$A = 9, \qquad B = -3, \qquad C = 1$$

olduğundan

$$\Delta = B^2 - AC = 9 - 9 = 0$$

olur. Böylece söz konusu bu denklem parabolik diferansiyel denklemdir. Ele aldığımız bu denklemin karakteristikler denklemi;

$$9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(-3)\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

olur.

Buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

denklemini elde ederiz.

Bu sonuncu denklemi çözerek genel integralinin,

$$x + 3y = c$$

şeklinde olduğunu buluruz.

Demek ki;

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y) = x + 3y$$

dir.

Şimdi $\eta = \eta(x, y)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki $J(\xi, \eta) \neq 0$ koşulu sağlansın. Örneğin; $\eta = x$ alalım.

Bu durumda,

$$J(\xi,\eta)=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

olur.

Böylece,

$$\xi=\xi(x,y)=\varphi(x,y)=x+3y$$

$$\eta=\eta(x,y)=\psi(x,y)=x$$

dir.

Ele aldığımız denklemde bulunan türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=3\frac{\partial u}{\partial \xi}+0\frac{\partial u}{\partial \eta}=3\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

Türevler için bulduğumuz bu ifadeleri ele aldığımız denklemde yerlerine yazıp sadeleştirdiğimizde;

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 35\frac{\partial u}{\partial \xi} + 10\frac{\partial u}{\partial \eta} - 50u + x - 2y = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{35}{9}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{10}{9}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{50}{9}u + \frac{1}{9}(x - 2y) = 0$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$\xi = x + 3y \quad , \quad \eta = x$$

dönüşümünü yeniden kullanarak,

$$x - 2y = \eta - \frac{2}{3}(\xi - \eta) = \frac{5\eta - 2\xi}{3}$$

eşitliği bulunur.

Böylece ele aldığımız denklemin kanonik şekli;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{35}{9}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{10}{9}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{50}{9}u + \frac{1}{27}(5\eta - 2\xi) = 0$$

denklemi olur.

Örnek 2.4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 24\frac{\partial u}{\partial y} - 9u + 9(x + y) = 0$$

denklemini kanonik hale getirelim.

Bu denklemde;

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = \frac{13}{2}$$

olduğundan,

$$\Delta = B^2 - AC = 4 - 13 = -9 < 0$$

olur ve dolayısıyla bu denklemin eliptik diferansiyel denklem olduğu elde edilir. Bu denklemin karakteristiklerinin denklemi;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2.2\frac{dy}{dx} + 13 = 0$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemi $\frac{dy}{dx}$ türevine göre çözerek karakteristikler için aşağıdaki denklem bulunur:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm 3i \quad , \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

Bu denklemi çözerek,

$$y = 2x \pm 3ix - c$$

çözümü, buradan ise

$$2x - y \pm 3ix = c$$

bulunur. Bu integralin reel ve sanal kısımlarını uygun olarak ξ ve η alarak denklemi direkt kanonik şekle getirebiliriz. Böylece,

$$\xi = 2x - y \quad , \quad \eta = 3x$$

elde edilir.

Ele alınan denklemin içerdiği türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= 2\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] + 3\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right] = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] = -2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

Türevler için bulduğumuz bu ifadeleri verilmiş denklemde yerlerine yazıp gereken sadeleştirmeleri yaptığımızda ele aldığımız denklemin aşağıdaki şekilde kanonik halini elde ederiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - u + \eta - \xi = 0$$

Örnek 2.5.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

denklemini kanonik hale getirelim.

Bu denklemde;

$$A = x, \qquad B = 0, \qquad C = y$$

olduğundan,

$$\Delta = B^2 - AC = -xy$$

elde edilir.

Buna göre,

a) $\Delta = -xy > 0\,, xy < 0$ olduğunda denklem hiperbolik,

b) $\Delta = -xy = 0, xy = 0$ olduğunda denklem parabolik,

c) $\Delta = -xy < 0, xy > 0$ olduğunda denklem eliptik diferansiyel denklem olur.

Bu durumların her biri için verilen denklemi kanonik hale getirelim:

Ele alınan denkleme uygun karakteristik denklem,

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$$

olur.

Bu karakteristik denklemin çözümü;

a)

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{y}{x}}, \quad xy < 0$$

şeklindedir.

Burada iki durum söz konusu olabilir.

$$x > 0\ , \qquad y < 0 \quad ve \quad x < 0\ , \qquad y > 0$$

Birinci durumda, yani $x > 0,\ y < 0$ olduğu durumda;

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

denklemini çözerek,

$$-2\sqrt{-y} = \pm 2\sqrt{x} + 2c$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece bu durum için,

$$\sqrt{x}+\sqrt{-y}=c_1\ ,\qquad \sqrt{x}-\sqrt{-y}=c_2$$

birinci integrallerini buluruz. Yani bu durum için

$$\xi=\xi(x,y)=\varphi(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{-y}$$

$$\eta=\eta(x,y)=\psi(x,y)=\sqrt{x}-\sqrt{-y}$$

olur

İkinci, yani $x<0\,, y>0$ durumunda ise uygun olarak,

$$\xi=\xi(x,y)=\varphi(x,y)=\sqrt{-x}+\sqrt{y}$$

$$\eta=\eta(x,y)=\psi(x,y)=\sqrt{-x}-\sqrt{y}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Önce birinci durum için verilen denklemi kanonik hale getirelim. Bunun için denklemin içerdiği türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{-1}{2\sqrt{-y}}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{-y}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{4x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{(-1)}{4y}+\frac{1}{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{4y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{4y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{4y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Türevler için bulduğumuz bu ifadeleri ele aldığımız denklemde uygun olarak yerlerine yazıp gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{-y}}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi} - \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{-y}}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} - u = 0$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu sonuncu denklemde,

$$\sqrt{x} = \frac{\xi + \eta}{2} \ , \qquad \sqrt{-y} = \frac{\xi - \eta}{2}$$

olduğunu dikkate alarak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\xi^2 - \eta^2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) - u = 0$$

denklemini buluruz.

İkinci durumda da, yani $x < 0$, $y > 0$ olduğu durumda denklem,

$$\xi = \xi(x,y) = \varphi(x,y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$$

$$\eta = \eta(x,y) = \psi(x,y) = \sqrt{-x} - \sqrt{y}$$

dönüşümü ile aynı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\xi^2 - \eta^2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) - u = 0$$

kanonik şekline getirilir.

b) $xy = 0$ durumunda denklem parabolik diferansiyel denklemdir ve onun kanonik şekli;

$$x \neq 0 \ , \qquad y = 0$$

olduğunda,

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$$

şeklinde;

$$x = 0 \ , \qquad y \neq 0$$

olduğunda ise,

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

şeklinde olur.

c) $xy > 0$ olduğunda denklem eliptik diferansiyel denklem olur ve burada da iki durum ortaya çıkar. Bu durumlar;

$$x > 0 \ \ , \ y > 0 \ \ ve \ \ x < 0 \ \ , \ y < 0$$

dır.

Birinci durumda karakteristik denklemin çözümleri,

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{\frac{y}{x}}$$

olur ve uygun olarak karakteristikleri,

$$\sqrt{x} + i\sqrt{y} = c_1 \ \ , \ \sqrt{x} - i\sqrt{y} = c_2$$

olur.

Bu durum için;

$$\xi = \sqrt{x} \ \ , \ \eta = \sqrt{y}$$

dönüşümünü yaparak ve denklemde olan türevleri yeni değişkenlerle ifade ederek verilmiş denklemi aşağıdaki gibi kanonik hale getirebiliriz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} - u = 0$$

İkinci durumda, yani $x < 0,\ y < 0$ eşitsizlikleri sağlandığında karakteristik denklemin çözümleri,

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}}$$

şeklinde bulunur.

Karakteristikleri ise,

$$\sqrt{-x} + i\sqrt{-y} = c_1 \quad , \quad \sqrt{-x} - i\sqrt{-y} = c_2$$

şeklinde elde edilir. Bu durum için,

$$\xi = \sqrt{-x} \quad , \quad \eta = \sqrt{-y}$$

dönüşümünü yaparak verilen diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} - u = 0$$

kanonik şekline getirilir.

3. HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KARAKTERİSTİKLER METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Diferansiyel denklemler teorisinde genelde hiperbolik diferansiyel denklemler titreşimlerle ilgili problemlerin incelenmesinde karşılaşılır. Biz de burada sonlu ve sonsuz telin titreşimi denklemini hiperbolik diferansiyel denklemlerle ifade edip çözümü için bir yöntemi anlatacağız[3].

3.1. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler İçin Karakteristikler Metodu Tanımı

Hiperbolik diferansiyel denklemi kanonik şekle getirerek onun genel çözümünü bulup sonra ise genel çözümde olan keyfi fonksiyonları seçerek verilen diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinin (verilmiş başlangıç veya sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin) bulunması yöntemine karakteristikler metodu denir.

Karakteristikler metodunu uygulayarak sonsuz telin titreşimleri denklemi için Cauchy probleminin çözümünün bulunmasını gösterelim[3].

3.2. Sonsuz Telin Serbest Titreşim Denkleminin Karakteristikler Metodu İle Çözümü

Homojen telin serbest titreşimlerinin denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{3.1}$$

Bu denklemde $u = u(x,t)$ fonksiyonu telin x koordinatlı noktasının t anındaki denge durumundan yer değiştirmesini (sapmasını) gösterir. Burada biz telin Ox ekseni üzerinde yerleştirildiğini varsayalım. O zaman telin denge durumu Ox koordinat ekseni olur. $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ eşitliğindeki ρ telin birim uzunluğundaki kütle yoğunluğu, T ise telin her bir noktasındaki gerilim kuvveti (gerginliği) dir[3].

Şimdi karakteristikler metodunu uygulayarak telin titreşimi denklemini çözelim. Bu amaçla telin titreşiminin (3.1) denklemini,

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.1')$$

şeklinde yazalım.

Bu denklem sabit katsayılı ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemde,

$$A = a^2 \ , \qquad B = 0 \ , \qquad C = -1$$

olduğundan,

$$B^2 - AC = a^2 > 0$$

olur.

Yani (3.1) ve ya $(3.1')$ denklemi hiperbolik diferansiyel denklemdir. $(3.1')$ denkleminin karakteristikleri denklemi,

$$a^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (3.2)$$

şeklinde yazılır.

(3.2) denklemini,

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0$$

şeklinde yazarak,

$$dx - adt = 0$$

$$dx + adt = 0$$

denklemler sistemini elde ederiz.

Sonuncu denklemlerin integralleri uygun olarak,

$$x - at = c_1$$

$$x + at = c_1$$

şeklinde bulunur.

Böylece (3.1) ve ya $(3.1')$ denklemini kanonik şekle getirmek için,

$$\xi = x - at \ , \qquad \eta = x + at \tag{3.3}$$

dönüşümünü yapalım.

Şimdi $(3.1')$ denklemindeki $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ kısmi türevleri yeni değişkenlerdeki türevlerle ifade edelim.

Bu amaçla,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= -a\left[(-a)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] + a\left[(-a)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

eşitliklerini elde ederiz.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ türevleri için bulduğumuz bu ifadeleri $(3.1')$ denkleminde yerlerine yazarak,

$$4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

denklemini elde ederiz.

Bu denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

şeklinde yazalım.

Bu denklemi ξ değişkenine göre integralleyerek,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = w(\eta)$$

eşitliğini buluruz. Burada $w(\eta)$ fonksiyonu η değişkenine bağlı keyfi fonksiyondur. Bu sonuncu denklemi η değişkenine göre integralleyerek,

$$u = \int w(\eta) d\eta + \theta_1(\xi)$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada,

$$\int w(\eta) d\eta = \theta_2(\eta)$$

şeklinde gösterelim.

Bu durumda,

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$$

çözümünü buluruz. Burada $\theta_1(\xi)$ ve $\theta_2(\eta)$ fonksiyonları argümentlerinin keyfi fonksiyonlarıdır.

Bu sonuncu çözümde,

$$\xi = x - at \ , \qquad \eta = x + at$$

alarak (3.1) denkleminin çözümünü,

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{3.4}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

(3.4) şeklinde bulduğumuz bu çözümün (3.1) denklemini sağladığını gösterelim:

Bunun için,

$$u_t = -a\theta_1' + a\theta_2' = [-\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)]a$$

$$u_x = \theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)$$

$$u_{tt} = a^2\theta_1''(x - at) + a^2\theta_2''(x + at)$$

$$u_{xx} = \theta_1''(x + at) + \theta_2''(x - at)$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Bu eşitliklerden,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

denklemi elde edilir.

(3.1) denkleminin (3.4) şeklinde bulunan çözümüne D'alambert çözümü denir[3].

Bu çözümde,

$$u_1 = \theta_1(x - at)$$

fonksiyonu Ox eksenine göre pozitif yönde yayılan dalgayı gösterir. Bu dalgaya sağa doğru yayılan dalga denir.

$$u_2 = \theta_2(x + at)$$

fonksiyonuna ise Ox eksenine göre negatif yönde yayılan dalgayı gösterir. Bu dalgaya sola doğru yayılan dalga denir.

$$u_1 = \theta_1(x - at)$$

dalgası a hızı ile Ox ekseninde sağa (pozitif yöne),

$$u_2 = \theta_2(x + at)$$

dalgası ise a hızı ile Ox ekseninde sola doğru (negatif yöne) yayılır.

Böylece (3.4) çözümü düz ve ters dalgaların toplamıdır[3].

3.3. Sonsuz Telin Serbest Titreşimleri Denklemi İçin Cauchy Probleminin Karakteristikler Metodu İle Çözümü

Burada sonsuz telin serbest titreşimlerinin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \tag{3.5}$$

denkleminin,

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u(x,0) = \varphi(x) \ , & -\infty < x < +\infty \\ u_t|_{t=0} = u_t(x,0) = \psi(x) \ , & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{3.6}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. (3.5) − (3.6) problemine Cauchy problemi de denir. (3.6) koşullarındaki $\varphi(x)$ fonksiyonu x koordinatlı noktanın $t = 0$ anındaki yer değiştirmesini, $\psi(x)$ fonksiyonu ise telin x koordinatlı noktasının $t = 0$ anındaki başlangıç hızını gösterir.

Şimdi, (3.5) denkleminin (3.6) şartlarını sağlayan çözümünü bulmak için (3.5) denkleminin,

$$u(x,t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at)$$

D'alambert çözümündeki $\theta_1(x)$ ve $\theta_2(x)$ keyfi olan fonksiyonları öyle seçelim ki, (3.6) başlangıç şartları sağlansın. (3.6) başlangıç koşullarını kullanarak,

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x)$$

$$-a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \psi(x)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bu sistemdeki ikinci eşitliği 0-dan x-e kadar integralleyerek,

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x)$$

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz + C$$

yazabiliriz. Burada C keyfi sabit sayıdır.

Sonuncu sistemden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{cases} \theta_1(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz + \dfrac{C}{2} \\ \theta_2(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz - \dfrac{C}{2} \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.7) eşitliklerini,

$$u(x,t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at)$$

D'alambert çözümünde yerlerine yazarak,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz + \frac{C}{2} + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz - \frac{C}{2}$$

eşitliğini elde ederiz.

Buradan,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (3.8)$$

formülünü buluruz.

$(3.5)-(3.6)$ Cauchy probleminin (3.8) şeklindeki çözümüne $(3.5)-(3.6)$ probleminin D'alambert çözümü ve (3.8) formülüne de D'alambert formülü denir.

Bu (3.8) formülündeki $\varphi(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeye kadar (ikinci mertebe dahil olmak üzere) sürekli diferansiyellenebilen, $\psi(x)$ fonksiyonu ise birinci mertebeye kadar (birinci mertebe dahil olmak üzere) sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduklarında $(3.5)-(3.6)$ probleminin (3.8) formülü ile bulunan çözümü $(3.5)-(3.6)$ probleminin klasik çözümü olur[3].

3.4. Sonsuz Telin Serbest Titreşimleri İçin Cauchy Probleminin Korrektliği

Sonsuz telin serbest titreşiminin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad -\infty<x<+\infty \ \ , \ \ t>0 \qquad (3.9)$$

denkleminin

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \ , & -\infty<x<+\infty \\ u_t(x,0)=\psi(x) \ , & -\infty<x<+\infty \end{cases} \qquad (3.10)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemini yani, Cauchy problemini ele alalım.

Şimdi burada $(3.9)-(3.10)$ probleminin korrekt problem olduğunu gösterelim. $(3.9)-(3.10)$ Cauchy probleminin çözümü var ve bu çözüm;

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (3.11)$$

formülü ile bulunur.

$(3.9)-(3.10)$ probleminin (3.11) formülü ile bulunan çözümü tektir.

Bu (3.11) formülünün bulunması yönteminden görülür. (3.11) formülü ile bulunan çözüm için başlangıç koşullarında verilen $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarını çok küçük değiştirelim. Başlangıç şartlarının,

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi^*(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi^*(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde verildiğini varsayalım. Bu (3.12) başlangıç şartlarına uygun (3.9) denkleminin çözümünü $u^*(x,t)$ şeklinde gösterelim. (3.9) denkleminin (3.12) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü var ve tektir.

Bu çözüm,

$$u^*(x,t) = \frac{\varphi^*(x-at)+\varphi^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi^*(z)dz \tag{3.13}$$

D'alambert formülü ile bulunur.

$(3.9) - (3.10)$ probleminin çözümü ise (3.11) formülü ile bulunur.

Şimdi gösterelim ki, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki,

$$|\varphi - \varphi^*| < \delta \ , \ |\psi - \psi^*| < 0 \tag{3.14}$$

koşullarını sağlayan her bir $\varphi^*(x)$ ve $\psi^*(x)$ fonksiyonları için,

$$|u - u^*| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Keyfi $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$$

alalım ve bu δ sayısı için (3.14) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. O zaman aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım:

$$|u-u^*| \le \frac{|\varphi(x-at)-\varphi^*(x-at)|}{2}+\frac{|\varphi(x+at)-\varphi^*(x+at)}{2}$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\psi^*(z)|dz < \frac{\varepsilon}{2(1+t_0)}+\frac{\varepsilon}{2(1+t_0)}+\frac{\varepsilon\cdot 2at}{2a(1+t_0)}$$

$$=\frac{\varepsilon}{(1+t_0)}+\frac{\varepsilon}{(1+t_0)}\cdot t_0=\varepsilon$$

Böylece ele aldığımız $(3.9)-(3.10)$ Cauchy probleminin çözümü var ve tek olduğundan ve başlangıçta verilen $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğundan ele aldığımız bu Cauchy problemi korrekttir[3].

3.5. Sonlu Telin Serbest Titreşimleri Denkleminin Karakteristikler Metodu İle Çözümü

Şimdi sonlu telin serbest titreşiminin denklemini ele alalım. Genelliği bozmadan telin sol ucunun $x=0$ noktasına, sağ ucunun ise $x=l$ noktasına sabitleştirildiğini varsayalım. O zaman telin durumunu belirleyen $u(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır şartlarını sağlayacaktır:

$$u(x,t)|_{x=0}=0 \ \ , \ \ u(x,t)|_{x=l}=0$$

Böylece burada telin titreşimleri denklemi için aşağıdaki sınır değer-bağlangıç değer problemini ele alalım.

Böylece sonlu telin serbest titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad 0<x<l \ \ , \ \ t>0 \tag{3.15}$$

denkleminin,

$$u(0,t)=0 \ \ , \ \ u(l,t)=0 \tag{3.16}$$

sınır şartlarını ve

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \ , & 0<x<l \\ u_t(x,0)=\psi(x) \ , & 0<x<l \end{cases} \tag{3.17}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları $0 < x < l$ aralığında tanımlanış fonksiyonlardır.

(3.15) denkleminin karakteristikler metodu ile bulunmuş genel çözümünü yani D'alambert çözümünü ele alalım:

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{3.18}$$

Şimdi burada $\theta_1(x)$ ve $\theta_2(x)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki, (3.18) formülü ile bulunan bu $u(x,t)$ fonksiyonu (3.16) sınır şartlarını ve (3.17) başlangıç koşullarını sağlasın.

(3.16) koşullarını sağlaması şartına göre,

$$\begin{cases} \theta_1(-at) + \theta_2(at) = 0 \\ \theta_1(l - at) + \theta_2(l + at) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

koşullarını elde ederiz.

Bu eşitliklerin birincisinden,

$$\theta_2(at) = -\theta_1(-at) \tag{3.20}$$

eşitliğinin sağlanması gerektiğini buluruz.

Argümentinin pozitif değerlerinde θ_2 fonksiyonu belli olduğu için argümentinin negatif değerlerinde θ_1 fonksiyonunu (3.20) bağıntısı ile tanımlarız. Özel durumda,

$$\theta_2(l + at) = -\theta_1(-l - at)$$

olur.

Bu değerleri (3.19) da yerine yazarak;

$$\theta_1(l - at) = \theta_1(-l - at)$$

eşitliğini elde ederiz.

Buradan,

$$\theta_1(2l - l - at) = \theta_1(l - at) = \theta_1(-l - at)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu ise θ_1 fonksiyonunun $2l$ periyotlu fonksiyon olarak seçilmesinin gerektiğini gösterir. Böylece, (3.18) çözümünün (3.16) sınır şartlarını sağlaması için genel çözüm,

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) - \theta_1(-x - at)$$

şeklinde seçilmeli ve bu formülde θ_1, $2l$ periyotlu fonksiyon olmalıdır.

Şimdi buradaki θ_1 fonksiyonunu öyle seçelim ki, (3.17) başlangıç şartları da sağlansın.

Yani,

$$u|_{t=0} = \theta_1(x) - \theta_1(-x) = \varphi(x)$$

$$u_t|_{t=0} = -a\theta_1'(x) + a\theta_1'(-x) = \psi(x)$$

eşitlikleri de sağlansın.

Burada,

$$\varphi(x) = \theta_1(x) - \theta_1(-x)$$

eşitliğinin sağlanması için $\varphi(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olmalıdır.

Diğer yandan,

$$\varphi(x + 2l) = \theta_1(x + 2l) - \theta_1(-x - 2l) = \theta_1(x) - \theta_1(-x - 2l + 2l) = \varphi(x)$$

eşitliğinden $\varphi(x)$ fonksiyonu $2l$ periyotlu fonksiyon olması gerekir.

Şimdi $\psi(x)$ fonksiyonunun da tek ve $2l$ periyotlu fonksiyon olması gerektiğini gösterelim.

Gerçekten,

$$\psi(x) = -a[\theta_1'(x) - \theta_1'(-x)]$$

olduğundan,

$$\psi(-x) = a[\theta_1'(-x) - \theta_1'(x)] = -\psi(x)$$

olur.

Diğer yandan,

$$\theta_1'(x+2l) = \lim_{h\to 0} \frac{\theta_1(x+2l+h) - \theta_1(x+2l)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\theta_1(x+h) - \theta_1(x)}{h} = \theta_1'(x)$$

olduğundan $\psi(x)$ fonksiyonu da $2l$ periyotlu fonksiyon olması gerekir.

Böylece $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarını tüm $(-\infty, +\infty)$ aralığına tek ve $2l$ periyotlu fonksiyon gibi devam ettirdiğimizde $(3.15) - (3.16) - (3.17)$ probleminin çözümü,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz$$

eşitliği ile bulunur.

Bu çözüm (3.15) denklemini sağlar. (3.16) ve (3.17) şartlarını da sağlaması kolaylıkla gösterilebilir.

Örnek 3.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin

$$u|_{t=0} = x^2 \quad , \quad u_t|_{t=0} = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Burada,

$$a = 1 \quad , \quad \psi(x) = 0$$

olduğundan,

$$u(x,t) = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} = x^2 + t^2$$

olur.

Örnek 3.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin

$$u|_{t=0} = 0 \ \ , \ \ u_t|_{t=0} = x$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım.

Burada,

$$a = 2 \ \ , \ \ \varphi(x) = 0 \ \ , \ \ \psi(x) = x$$

olduğundan,

$$u = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} zdz = \frac{1}{8}z^2|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8}[(x+2t)^2 - (x-2t)^2] = xt$$

elde edilir.

Böylece,

$$u(x,t) = xt$$

olur.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ

Adi diferansiyel denklemler teorisinden, n. mertebeden

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.1}$$

denkleminin genel çözümü, n tane keyfi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerine bağlı $\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ şeklinde fonksiyon olur. (4.1) diferansiyel denkleminin herbir çözümü $\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ çözümünden $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerinin herhangi bir seçimi ile elde edildiğinde n sayıda keyfi sabite bağlı bu $\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ çözüme n. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü denir. Aranan fonksiyonun diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevinin mertebesine verilmiş diferansiyel denklemin mertebesi denir. Uygun olarak verilmiş kısmi diferansiyel denklemin içerdiği aranan fonksiyonun en yüksek mertebeli kısmi türevinin mertebesine verilmiş kısmi diferansiyel denklemin mertebesi denir. Burada dikkat edilmelidir ki, n. mertebeden kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü n tane keyfi fonksiyona bağlı olur. Bu özelliği burada bir örnekle gösterelim. İkinci mertebeden kısmi türevli;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu diferansiyel denklemi integralleyebiliriz. Bu diferansiyel denklemi integrallemek için aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - 3u\right) = 0$$

Bu eşitliğin her iki tarafını x değişkenine göre integralleyerek,

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 3u = c(y)$$

denklemini buluruz. Burada $c(y)$ fonksiyonu y değişkenine bağlı keyfi fonksiyondur. Bu sonuncu denklem adi türevli birinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemdir. Bu denklemi Lagrange sabitlerin varyasyonu yöntemini uygulayarak çözdüğümüzde çözüm için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$u(x,y) = e^{\int 3dy}\left[\varphi(x) + \int c(y)e^{-\int 3dy}dy\right]$$

Burada,

$$\psi(y) = \int c(y)e^{-\int 3dy}dy$$

ile gösterelim. Bu eşitliğin sağ tarafında integral altındaki $c(y)$ fonksiyonu y değişkenine bağlı keyfi fonksiyon olduğundan belirsiz integralin sonucu olan $\psi(y)$ fonksiyonu da y değişkeninin keyfi fonksiyonu olur.

Böylece ele aldığımız denklemin genel çözümünü aşağıdaki şekilde iki keyfi $\varphi(x)$ ve $\psi(y)$ fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$u(x,y) = e^{3y}[\varphi(x) + \psi(y)]$$

şeklinde elde ederiz[4].

4.1. Cauchy Problemi

Şimdi ikinci mertebeden kısmi türevli lineer,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu = f \qquad (4.2)$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

(4.2) diferansiyel denkleminin katsayıları olan $A(x,y), B(x,y), C(x,y), D(x,y)$,

$E(x,y), F(x,y)$ fonksiyonlarının ve diferansiyel denklemin sağ tarafı olan $f(x,y)$ fonksiyonunun belli bir Ω bölgesinde tanımlanmış yeterince diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Oxy koordinat düzleminde koordinat eksenlerine paralel olan her doğru ile yalnız bir noktada kesişen bir l eğrisinin verildiğini, bu eğrinin denkleminin $y = g(x)$ olduğunu ve l eğrisinin (4.2) denkleminin karakteristikleri ile çakışmadığını varsayalım.

(4.2) diferansiyel denkleminin l eğrisi üzerinde,

$$\begin{cases} u(x,y)|_{\,y=g(x)} = \varphi_0(x) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}|_{y=g(x)} = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{4.3}$$

koşullaını sağlayan çözümünün bulunması problemine Cauchy problemi denir[4].

4.2. Goursat Problemi

Ele aldığımız (4.2) denkleminin karakteristiklerini,

$$\xi(x,y) = c_1 \ , \qquad \eta(x,y) = c_2$$

ile gösterelim.

Bu sonuncu eşitlikleri y değişkenlerine göre çözüp,

$$y = \xi_1(x,c_1)\ , \qquad y = \eta_1(x,c_2)$$

eşitliklerini bulalım.

(4.2) denkleminin;

$$u(x,y)|_{y=\xi_1(x,c_1)} = \psi_1(x)$$

$$u(x,y)|_{y=\eta_1(x,c_2)} = \psi_2(x)$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Goursat problemi denir[4].

4.3. Cauchy ve Goursat Problemleri Arasındaki Farklar

[4] Cauchy problemi ile Goursat problemlerinin birbirinden farklı olan taraflarını açıklayalım. Bu amaçla aşağıdaki tanımı yapalım:

Tanım 4.1. l eğrisi üzerinde (4.2) denkleminin tüm çözümleri ve bu çözümlerin tüm birinci mertebeden türevleri çakışır, yani aynı olur fakat çözümlerin iki ve daha yüksek mertebeli türevleri çakışmaz, yani farklı olursa (4.2) denkleminin çözümleri l eğrisi üzerinde dallanır denir.

Kolaylıkla gösterilebilir ki, (4.2) denkleminin (4.3) Cauchy şartlarını sağlayan çözümü bulunduğunda ve l eğrisi üzerinde,

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C \neq 0$$

şartı sağlandığında bu çözüm l eğrisi üzerinde dallanmaz ve bu çözüm tek olur.

l eğrisi üzerinde;

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \tag{4.5}$$

eşitliği sağlandığında l eğrisi (4.5) denkleminin integral eğrisi ve ya başka bir deyişle l eğrisi (4.2) denkleminin karakteristiği olur. Bu durumda ya $(4.2) - (4.3)$ Cauchy probleminin çözümü yoktur ya da çözümü varsa tek değildir. Bu ise, l eğrisi üzerinde (4.2) denkleminin çözümünün dallanması demektir.

Ardışık yaklaşımlar yönteminin uygulanmasıyla $(4.2) - (4.3)$ Cauchy probleminin ve $(4.2), (4.4)$ Goursat probleminin çözümlerinin var ve tek oldukları ispatlanır.

Cauchy ve Goursat problemini çözmek için verilen denklemi kanonik şekle getirmek onun genel çözümünü bulmak için genel çözüme dahil olan keyfi fonksiyonları özel olarak seçmek gerekir. Problemin çözümünün bu şekilde bulunması yöntemine karakteristikler metodu denir[5].

4.4. Cauchy Probleminin Karakteristikler Metodu İle Çözümüne Örnekler

Örnek 4.1.

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.6}$$

denkleminin,

$$u(x,y) = \varphi_0(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \varphi_1(x) \tag{4.7}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için önce (4.6) denklemini kanonik hale getirelim.

Bu denklemde,

$$A = 1 + x^2 \ , \qquad B = 0 \ , \qquad C = -1 - y^2$$

olduğundan,

$$B^2 - AC = (1 + x^2)(1 + y^2) > 0$$

olur. Bu ise denklemin hiperbolik diferansiyel denklem olması demektir.

Bu denklemin karakteristik denklemi,

$$(1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1 + y^2) = 0$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemin integral eğrileri ise;

$$\frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \mp \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

denklemini çözerek bulunur.

Bu sonuncu denklemin her iki tarafını integralleyerek;

$$\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = c_1$$

$$\frac{y + \sqrt{1 + y^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = c_2$$

bulunur.

Böylece,

$$\begin{cases} \xi = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) \\ \eta = \dfrac{y + \sqrt{1 + y^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}} \end{cases} \tag{4.8}$$

dönüşümünü yaparak (4.6) denklemini kanonik şekle getirebiliriz. (4.6) denkleminde bulunan türevleri hesaplamak için önce ξ ve η fonksiyonlarının x ve y değişkenlerine göre gereken türevlerini bulalım:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi}{\sqrt{1+x^2}} \ , \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\xi}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\sqrt{1+x^2}} \ , \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\eta}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\xi\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \ , \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\xi\left(\sqrt{1+y^2}-y\right)}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\eta\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \ , \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -\frac{\eta\left(\sqrt{1+y^2}-y\right)}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Şimdi $u(x,y)$ fonksiyonunun (4.6) denkleminde bulunan türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\eta\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\eta\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\xi\left(\sqrt{1+y^2}-y\right)}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\eta\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(4.6) denklemindeki türevler için bulduğumuz bu ifadeleri denklemde uygun olarak yerlerine yazıp sadeleştirmeleri yaparak sonuçta aşağıdaki kanonik denklemi buluruz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Sonuncu denklemi çözmek için;

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

şeklinde yazalım.

Bu sonuncu denklemi önce ξ değişkenine göre integralleyerek;

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = c(\eta)$$

elde edilir. Burada $c(\eta)$ fonksiyonu η-ya bağlı keyfi fonksiyondur. Sonuncu denklemi η-ya göre integralleyerek;

$$u(\xi,\eta) = \psi_1(\eta) + \psi_2(\xi)$$

eşitliğini buluruz.

Burada,

$$\psi_1(\eta) = \int c(\eta)d\eta$$

ve $\psi_2(\xi)$ fonksiyonları keyfi fonksiyonlardır. ξ ve η −nın (4.8) ifadelerini burada göz önünde bulundurarak (4.6) denkleminin genel çözümünü;

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) + \psi_2\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right) \quad (4.9)$$

şeklinde elde ederiz. Burada ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları argümentleri iki kez sürekli diferansiyellenebilen keyfi fonksiyonlardır.

Bulduğumuz (4.9) genel çözümünü (4.3) başlangıç şartlarında yerlerine yazarak ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonlarının bulunması için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} \psi_1\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) + \psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \varphi_0(x) \\ \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\psi_1'\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) + \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\psi_2'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Bu sistemin ikinci denkleminin her iki tarafını $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ile çarpalım. Bu durumda sistem aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{cases} \psi_1\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) + \psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \varphi_0(x) \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\psi_1'\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) + \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx\psi_2'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\varphi_1(x) \end{cases}$$

Burada,

$$-d\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

ve

$$d\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

eşitliklerini göz önüne alarak sonuncu denklemler sistemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{cases} \psi_1\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)+\psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\varphi_0(x) \\ -\psi_1'\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)d\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)+\psi_2'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ =\dfrac{\varphi_1(x)dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

Bu sistemin ikinci denkleminin her iki tarafını x_0-dan x-e kadar integralleyerek sistemi,

$$\begin{cases} \psi_1\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)+\psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\varphi_0(x) \\ -\psi_1\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)+\psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1+t^2}}+\psi_2(x_0)-\psi_1(x_0) \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sistemi çözerek;

$$\psi_1\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x)\ -\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1+t^2}}+\psi_1(x_0)-\psi_2(x_0)\right] \quad (4.10)$$

$$\psi_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\varphi_0(x)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{2}\psi_1(x_0)+\frac{1}{2}\psi_2(x_0) \quad (4.11)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Burada (4.10) ve (4.11) formüllerinde $x+\sqrt{1+x^2}=\alpha$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$x=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}$$

olur.

$$\alpha=\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad \beta=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

şeklinde gösterirsek,

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$$

olur.

Böylece,

$$\psi_1\left(\frac{y + \sqrt{1 + y^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right) = \psi_1(\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi_0\left(\frac{1 - \alpha^2}{2\alpha}\right) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{1}{2}\psi_1(x_0) - \frac{1}{2}\psi_2(x_0)$$

$$\psi_2\left(\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)\right) = \psi_2(\beta)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi_0\left(\frac{\beta^2 - 1}{2\beta}\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\frac{\beta^2-1}{2\beta}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{1}{2}\psi_1(x_0) + \frac{1}{2}\psi_2(x_0)$$

olur.

ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonlarının bu ifadelerini (4.9) eşitliğinde yerlerine yazdığımızda $(4.6) - (4.7)$ Cauchy probleminin çözümünü;

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0\left(\frac{1 - \alpha^2}{2\alpha}\right) + \varphi_0\left(\frac{\beta^2 - 1}{2\beta}\right)\right] + \int_{\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}}^{\frac{\beta^2-1}{2\beta}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{1 + t^2}} \qquad (4.12)$$

şeklinde bulmuş oluruz. Görüldüğü gibi Cauchy probleminin çözümü $\psi_1(x_0)$ ve $\psi_2(x_0)$ değerlerine bağlı değildir.

Örnek 4.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \ ,(y < 0) \qquad (4.13)$$

denkleminin,

$L_1: x - 2\sqrt{-y} = 0$ karakteristiğinde;

ve

$L_2: x + 2\sqrt{-y} = 0$ karakteristiğinde;

aşağıdaki Goursat;

$$\begin{cases} u(x,y)|_{L_1} = \varphi_1(x)\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u(x,y)|_{L_2} = \varphi_2(x)\ , & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (4.14)$$

koşullarını sağlayan Goursat problemini çözelim.

Burada,

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

uyum şartının sağlandığını varsayalım.

Burada ele aldığımız Goursat problemini çözmek için önce ele aldığımız (4.13) denklemini kanonik şekle getirmemiz gerekir. (4.13) denklemine uygun karakteristik denklem;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \mp\sqrt{y}$$

şeklinde yazılır.

Koşula göre $y < 0$ olduğundan $-y > 0$ eşitsizliği sağlanır ve

$A = 1,\ B = 0\ ,\ C = y$ olduğundan $B^2 - AC = -y > 0$ olur. Bu yüzden de ele aldığımız (4.13) denklemi hiperbolik diferansiyel denklemdir. Böylece, ele aldığımız (4.13) denkleminin karakteristikleri;

$$x - 2\sqrt{-y} = c_1\ ,\qquad x + 2\sqrt{-y} = c_2$$

olur.

Böylece, verilmiş denklemi kanonik şekle getirmek için,

$$\begin{cases} \xi = x - 2\sqrt{-y} \\ \eta = x + 2\sqrt{-y} \end{cases} \tag{4.15}$$

dönüşümünü yapmamız gerekir. Şimdi ele aldığımız (4.13) denkleminde bulunan kısmi türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$= -\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Bulduğumuz bu türevlerin ifadelerini verilmiş diferansiyel denklemde yerlerine yazıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

denklemini buluruz.

Bu sonuncu denklemin genel çözümü;

$$u(\xi,\eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta)$$

şeklinde bulunur. Burada ψ_1 ve ψ_2 keyfi fonksiyonlardır. ξ ve η-nın (4.15) ifadesini bu çözümde göz önünde bulundurarak (4.13) denkleminin genel çözümünü;

$$u(x,y) = \psi_1\left(x - 2\sqrt{-y}\right) + \psi_2\left(x + 2\sqrt{-y}\right) \tag{4.16}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

(4.14) Goursat şartlarını kullanarak ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonlarının seçimi için,

$$\begin{cases} \psi_1(0) + \psi_2(2x) = \varphi_1(x)\,, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \psi_1(2x-1) + \psi_2(2x) = \varphi_2(x)\,, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

sistemini elde ederiz.

Bu denklemler sisteminden;

$$\psi_1(2x-1) = \varphi_2(x) - \psi_2(1)$$

$$\psi_2(2x) = \varphi_1(x) - \psi_1(0)$$

veya

$$\psi_1\left(x - 2\sqrt{-y}\right) = \varphi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + 1}{2}\right) - \psi_2(1)$$

$$\psi_2\left(x + 2\sqrt{-y}\right) = \varphi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) - \psi_1(0)$$

bulunur.

Böylece. $(4.13) - (4.14)$ Goursat probleminin çözümünü;

$$u(x,y) = \varphi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + 1}{2}\right) - [\psi_1(0) + \psi_2(1)]$$

şeklinde elde ederiz.

Burada;

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

olduğundan,

$$\psi_1(0) + \psi_2(1) = \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

olur.

Bu yüzden $(4.13) - (4.14)$ Goursat probleminin çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x,y) = \varphi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + 1}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

5. CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

5.1. Cauchy Probleminin Eşdeğer İntegral Denklemler Sistemine Getirilmesi

Birinci kanonik şekli,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{5.1}$$

biçiminde olan hiperbolik diferansiyel denklemi ele alalım.

Bu denklemin karakteristikler denklemi,

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$$

şeklinde ve

$$A = 0 \ \ , \ \ C = 0$$

olduğundan,

$$dydx = 0$$

veya

$$dy = 0 \ \ , \ \ dx = 0$$

olur.

Buradan (5.1) denkleminin karakteristikleri

$$x = c_1 \ \ , \ \ y = c_2$$

olur[3].

Oxy koordinat düzleminde koordinat eksenlerine paralel olan doğrularla bir noktadan fazla noktada kesişmeyen l eğrisinin verildiğini ve bu eğrinin denkleminin

$$y = g(x) \ \ ve\ ya \ \ x = h(y)$$

şeklinde yazıldığını varsayalım. Buradaki $g(x)$ ve $h(y)$ fonksiyonlarının $g'(x)$ ve $h'(y)$ türevleri var ve sıfırdan farklı olduğunu farz edelim.

l eğrisi üzerinde u ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonlarının değerlerinin verildiğini varsayalım:

$$u|_{y=g(x)} = \varphi_0(x) \quad , \quad u_y|_{y=g(x)} = \varphi_1(x) \tag{5.2}$$

(5.2) şartlarına Cauchy şartları denir. (5.2) Cauchy verilerinin yardımıyla $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevinin $y = g(x)$ eğrisi üzerinde değeri bulunabilir. Gerçekten (5.2) koşullarının birincisinin her iki tarafını x değişkenine göre diferansiyelleyerek,

$$u_x|_{y=g(x)} + u_y|_{y=g(x)} \cdot g'(x) = \varphi_0'(x)$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitlikten,

$$u_x|_{y=g(x)} = \varphi_0'(x) - \varphi_1(x) \cdot g'(x) = W(x) \tag{5.3}$$

bulunur.

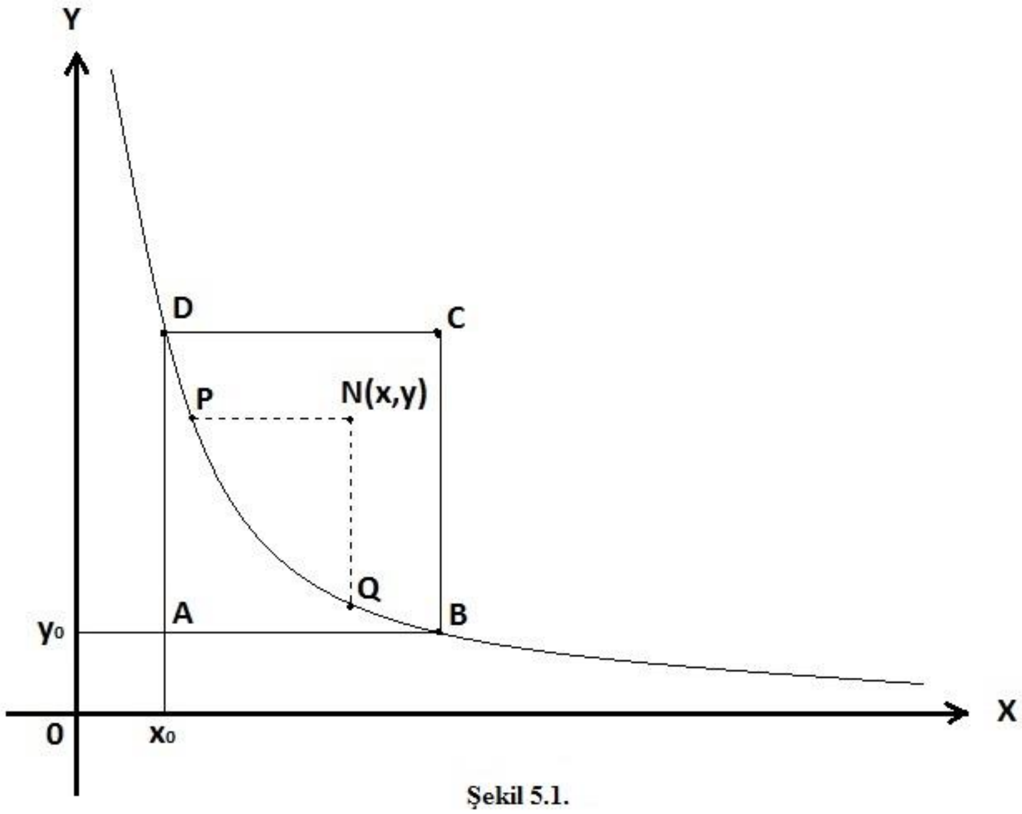
Böylece, Cauchy probleminde l eğrisinin bir komşuluğunda (5.1) denklemini sağlayan ve l eğrisi üzerinde ise (5.2) Cauchy şartlarını sağlayan çözümün bulunması istenir.

Aşağıdaki fonksiyonları dahil edelim:

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad w = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.4}$$

Bu durumda (5.1) denklemi kendisi ile eşdeğer olan üç denklemli aşağıdaki sistem denkleme getirilir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x,y) - av - bw - cu \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,y) - av - bw - cu \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = w \end{cases} \tag{5.5}$$



Şekil 5.1.

Bir $ABCD$ dikdörtgeninin içinde keyfi bir $N(x, y)$ noktasını ele alalım. Bu N noktasından NP ve NQ karakteristiklerini l eğrisini kesinceye kadar devam ettirelim. (5.5) sistemindeki birinci ve üçüncü denklemlerini QN doğrusu üzerinde integralleyelim. (5.5) sisteminin ikinci denklemini ise PN doğrusu üzerinde integralleyelim. O zaman (5.2) ve (5.3) koşulları ile (5.4) dönüşümlerini de göz önünde tutarak (5.5) denklemini onunla eşdeğer olan,

$$\begin{cases} v(x,y) = w(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} [f(x,y) - av - bw - cu]dy \\ w(x,y) = \varphi_1(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} [f(x,y) - av - bw - cu]dx \\ u(x,y) = \varphi_0(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} w(x,y)dy \end{cases} \tag{5.6}$$

integral denklemler sistemine getirmiş oluruz.

$u(x,y)$ fonksiyonu (5.1) denkleminin (5.2) Cauchy şartlarını sağlayan çözümü olduğunda, o zaman u,v ve w fonksiyonlarının (5.6) integral denklemler sisteminin çözümü oldukları açıktır. Tersine, (5.6) sisteminin sürekli (u,v,w) çözümü (5.5) denklemler sisteminin, $u(x,y)$ fonksiyonu ise (5.1) denkleminin (5.2) şartlarını sağlayan çözümü olur. Gerçekten, (5.6) denklemler sisteminin üçüncü denkleminden, $\frac{\partial u}{\partial y} = w$ olduğu bulunur. Bunlara ilave olarak $(5.3) - (5.4) - (5.5)$ ve (5.6) nın birinci denkleminden,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_0'(x) - w(x,y)|_{y=g(x)} \cdot g'(x) + \int_{g(x)}^{y} \frac{\partial w}{\partial x} dy$$

$$= \varphi_0'(x) - \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=g(x)} \cdot g'(x) + \int_{g(x)}^{y} [-av - bw - cu + f(x,y)]dy$$

$$= \varphi_0'(x) - \varphi_1(x)g'(x) + \int_{g(x)}^{y} [-av - bw - cu + f(x,y)]dy$$

$$= \varphi_0'(x) - \varphi_1(x)g'(x) + \int_{g(x)}^{y} [-av - bw - cu + f(x,y)]dy$$

$$= w(x) + \int_{g(x)}^{y} [-av - bw - cu + f(x,y)]dy = v$$

elde edilir.

Böylece (5.4) denkleminin her iki denklemi de sağlanır. Şimdi (5.4) eşitliklerini (5.5) denklemler sisteminin birinci denkleminde yerlerine yazarak $u(x,y)$ fonksiyonunun (5.1) denklemini sağladığı görülür. $u(x,y)$ fonksiyonunun (5.2) Cauchy şartlarını sağladığı da kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece $(5.1) - (5.2)$ Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği (5.6) integral denklemler sisteminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliği problemine dönüştürülmüş olur.

(5.6) sisteminin çözümünü ardışık yaklaşımlar metodu ile arayalım. Sıfırıncı yaklaşım olarak;

$$v_0(x) = w(x) \quad , \quad w_0(x) = \varphi_1(x) \;\; , \;\; u_0(x) = \varphi_0(x)$$

alalım.

Sonraki yaklaşımları ise aşağıdaki formüllerle hesaplayalım:

$$\begin{cases} v_n(x,y) = w(x) + \displaystyle\int_{g(x)}^{y} [f(x,y) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]dy \\ w_n(x,y) = \varphi_1(x) + \displaystyle\int_{h(y)}^{x} [f(x,y) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]dy \\ u_n(x,y) = \varphi_0(x) + \displaystyle\int_{g(x)}^{y} w_{n-1}(x,y)dy\,, \quad n = 1,2,3, \dots \end{cases} \tag{5.7}$$

Şimdi $\{u_n, v_n, w_n\}$ dizisinin BCD eğrisel üçgeninde düzgün yakınsak dizi olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla aşağıdaki eşitlikler sistemini yazalım:

$$\begin{cases} v_{n+1} - v_n = -\displaystyle\int_{g(x)}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]dy \\ w_{n+1} - w_n = -\displaystyle\int_{h(y)}^{x} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]dx \\ u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_{g(x)}^{y} (w_n - w_{n-1})dy \end{cases} \tag{5.8}$$

Burada $|v_n - v_{n-1}|$, $|w_n - w_{n-1}|, |u_n - u_{n-1}|$ farklarının aşağıdaki eşitsizlikleri sağladığını gösterelim:

$$\begin{cases} |v_n - v_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |w_n - w_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |u_n - u_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases} \tag{5.9}$$

Burada,

$$K = \max(1, M)\,,$$

$$M = \max_{BCD}[|a| + |b| + |c|]$$

dir. A ise yeterince büyük bir pozitif sabit sayıdır.

A sayısını yeterince büyük seçerek $n = 1$ durumunda (5.9) eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. (5.9) eşitsizliğinde n sayısını $n + 1$ ile değiştirdiğimizde (5.9) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Bunu göstermek için (5.8) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım:

$$|v_{n+1} - v_n| = |\int_{g(x)}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]dy$$

$$\leq \int_{g(x)}^{y} [|a| \cdot |v_n - v_{n-1}| + |b| \cdot |w_n - w_{n-1}| + |c| \cdot |u_n - u_{n-1}|]dy$$

$$\leq \int_{g(x)}^{y} (|a| + |b| + |c|) \cdot A \cdot K^{n-1} \frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

$$\leq K^n \cdot A \cdot \int_{y_0}^{y} \frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

$$= K^n \cdot A \cdot \left[\frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!} - \frac{(x - x_0)^n}{n!}\right]$$

$$\leq K^n \cdot A \cdot \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}\ , \quad (x_0 < x\,, y_0 \leq g(x) \leq b).$$

Aynı şekilde tümevarım yönteminin uygulanmasıyla $|w_{n+1} - w_n|\ ve\ |u_{n+1} - u_n|$ farkları da değerlendirilir. (5.9) eşitsizliklerinin yardımıyla aşağıdaki serilerin mutlak ve düzgün yakınsak oldukları gösterilir:

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n - u_{n-1}]$$

$$v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n - v_{n-1}]$$

$$w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [w_n - w_{n-1}]$$

Gerçekten, bu serilerin terimleri mutlak değerce aşağıdaki düzgün yakınsak olan serinin terimlerinden uygun olarak küçüktür.

$$A + A\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} = A\left(1 + e^{K(x+y-x_0-y_0)}\right)$$

Böylece ardışık u_n, v_n, w_n yaklaşımları eğrisel BCD üçgeninde düzgün olarak sırasıyla u, v, w limitlerine yakınsar. Burada tüm ardışık yaklaşımlar sürekli fonksiyonlar olduklarından limit fonksiyonları da sürekli fonksiyon olur. (5.7) eşitliklerinin her iki tarafından $n \to \infty$ iken limit aldığımızda $u(x,y), v(x,y)$ ve $w(x,y)$ limit fonksiyonlarının (5.6) sistemini sağladığı elde edilir.

Şimdi (5.6) sisteminin çözümünün tekliğini gösterelim:

(5.6) sisteminin iki farklı sürekli,

$$u_1, v_1, w_1 \ \ ve \ \ u_2, v_2, w_2$$

çözümlerinin olduklarını varsayalım. O zaman burada,

$$U = u_1 - u_2 \ , \qquad V = v_1 - v_2 \ , \qquad W = w_1 - w_2$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda U, V, W fonksiyonlarının aşağıdaki homojen integral denklemin sürekli olan çözümleri olur:

$$\begin{cases} V(x,y) = -\int\limits_{g(x)}^{y} (aV + bW + cU)dy \\ W(x,y) = -\int\limits_{h(y)}^{x} (aV + bW + cU)dx \\ U(x,y) = \int\limits_{g(x)}^{y} W(x,y)dy \end{cases} \tag{5.10}$$

Burada $U = V = W = 0$ olduğunu ispatlamamız gerekir. U, V ve W fonksiyonları eğrisel kapalı BCD üçgeninde iki sürekli fonksiyonların farkı gibi sürekli ve sınırlıdırlar. Bu yüzden öyle pozitif B sayısı bulunabilir ki,

$$|V(x,y)| \le B, \qquad |W(x,y)| \le B, \quad |U(x,y)| \le B$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikleri kullanarak (5.10) eşitliklerinin yardımıyla aşağıdaki değerlendirmeyi yapabiliriz:

$$|V(x,y)| \le \int\limits_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|)Bdy \le KB(y - y_0) \le KB\frac{(x + y - x_0 - y_0)}{1!}$$

Benzer şekilde,

$$|W(x,y)| \le KB\frac{(x + y - x_0 - y_0)}{1!}$$

$$|U(x,y)| \le KB\frac{(x + y - x_0 - y_0)}{1!}$$

değerlendirmeleri de gösterilebilir.

Burada matematiksel indüksiyon (tümevarım) yöntemini kullanarak aşağıdaki eşitsizliklerin her bir n doğal sayısı için sağlandığı ispatlanır:

$$|V| \le K^n B\frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}$$

$$|W| \le K^n B\frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}$$

$$|U| \le K^n B \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}, \quad n = 1,2,3, \dots$$

Bu eşitsizliklerden $n \to \infty$ iken limit alarak,

$$U = V = W = 0$$

olduğu, yani

$$v_1 \equiv v_2, \;\; w_1 \equiv w_2, \;\; u_1 \equiv u_2$$

eşitlikleri elde edilir.

5.2. Goursat Probleminin Eşdeğer İntegral Denklemler Sistemine Getirilmesi

Burada (5.1) denkleminin $x = x_0, \; y = y_0$ karakteristikleri üzerinde aşağıdaki

$$\begin{cases} u|_{x=x_0} = u(x_0, y) = \psi_1(y), & y_0 \le y \le b \\ u|_{y=y_0} = u(x, y_0) = \psi_2(x), & x_0 \le x \le a \end{cases} \tag{5.11}$$

Goursat şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. (5.1) denkleminin (5.11) şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Goursat problemi denir[3].

Burada $\psi_1(y)$ ve $\psi_2(x)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden sürekli türevleri oldukları ve

$$\psi_1(y_0) = \psi_2(x_0)$$

uyum şartının sağlandığını varsayarız.

Cauchy probleminde olduğu gibi burada da,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = w \tag{5.12}$$

değişkenlerini dahil edelim. O zaman (5.1) denklemi aşağıdaki üç denklemler sistemi ile eşdeğer olur:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x,y) - av - bw - cu \\
\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,y) - av - bw - cu \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} = w
\end{cases}
\tag{5.13}
$$

(5.11) ve (5.12) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki integral denklemler sistemini elde ederiz:

$$
\begin{cases}
v(x,y) = \psi_2'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} [f(x,y) - av - bw - cu]dy \\
w(x,y) = \psi_1'(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} [f(x,y) - av - bw - cu]dx \\
u(x,y) = \psi_2(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w(x,y)dy
\end{cases}
\tag{5.14}
$$

Cauchy probleminde olduğu gibi (5.1), (5.11) Goursat probleminin çözümünün varlığı ve tekliği (5.14) integral denklemler sisteminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliğinin gösterilmesine getirilmiş olur. (5.14) integral denklemler sisteminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliği yukarıdaki gibi ardışık yaklaşımlar yönteminin uygulanmasıyla gösterilebilir.

6. CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİNİN RIEMANN METODU İLE ÇÖZÜMÜ

6.1. Green Teoremi

İkinci mertebeden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin açık şekilde integrallenmesinde Green teoreminin çok büyük önemi vardır. Bu yüzden Green teoremini burada ifade edelim.

Oxy düzleminde kapalı C eğrisi ile sınırlanmış J bölgesinin verildiğini varsayalım. P ve Q fonksiyonlarının x ve y değişkenlerine bağlı fonksiyonlar olduklarını ve bu fonksiyonların kendilerinin ve kısmi türevlerinin (birinci mertebeden kısmi türevlerinin) J bölgesinin içinde ve C sınırında sürekli olduklarını varsayalım. J bölgesi üzerinde alınmış iki katlı,

$$\iint_J \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

integralini ele alalım. Burada bu iki katlı integralin bir katlı integrale dönüştürülebildiğini gösterelim. Bu amaçla C sınır eğrisinin noktalarının x apsisinin a_1 ve a_2 arasında değiştiğini $(a_2 > a_1)$ varsayalım.

Genelliği bozmadan, Oy koordinat eksenine paralel olan her bir doğru C eğrisini yalnız iki, koordinatları y_1 ve y_2 olan noktalarda kestiğini ve $y_2 > y_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\iint_J \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial Q}{\partial y}dy = \int_{a_1}^{a_2} [Q(x,y_2)-Q(x,y_1)]dx$$

olur.

C sınır eğrisi üzerinde pozitif yönde alınmış $\int_C Qdx$ integrali aşağıdaki,

$$\int_{a_1}^{a_2} [Q(x,y_1)-Q(x,y_2)]dx$$

integraline eşit olur. Gerçekten C eğrisi üzerinde pozitif yönde hareket ettiğimizde x apsisi (x, y_1) noktasında artar, ama (x, y_2) noktasında azalır. Böylece,

$$\iint_J \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy = -\int_C Qdx$$

eşitliğini buluruz.

Aynı yöntemle,

$$\iint_J \frac{\partial P}{\partial x} dxdy = \int_C Pdy$$

eşitliği bulunabilir[6].

Böylece aşağıdaki Green formülü elde edilir:

$$\iint_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (Pdy - Qdx) \tag{6.1}$$

Şimdi ikinci mertebeden aşağıdaki lineer diferansiyel ifadeyi ele alalım:

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu \tag{6.2}$$

Bu diferansiyel ifadenin katsayıları olan A, B, C, D, E, F fonksiyonlarının Oxy düzleminin verilmiş bir J bölgesinde tanımlanmış, kendileri ile birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım.

Şimdi (6.2) diferansiyel ifadesine uygun ikinci mertebeden aşağıdaki başka bir diferansiyel ifadeyi ele alalım:

$$M(v) = \frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv \tag{6.3}$$

Bu $M(v)$ diferansiyel ifadesine $L(u)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesi denir. Uygun olarak $M(v) = 0$ diferansiyel denklemine $L(u) = 0$ diferansiyel denklemine eşlenik olan diferansiyel denklem denir.

Aşağıdaki eşitlikleri ele alalım:

$$Av\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Av\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial (Av)}{\partial x}\right]$$

$$Bv\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u\frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[Bv\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial (Bv)}{\partial y}\right]$$

$$Bv\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u\frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Bv\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial (Bv)}{\partial x}\right]$$

$$Cv\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[Cv\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial (Cv)}{\partial y}\right]$$

$$Dv\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial (Dv)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[Duv]$$

$$Ev\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial (Ev)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[Euv]$$

$$Fvu - uFv = 0$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa topladığımızda aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$vL(u) - uM(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{6.4}$$

Burada,

$$\begin{cases} P = Av\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial (Av)}{\partial x} + Bv\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial (Bv)}{\partial y} + Duv \\ Q = Bv\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial (Bv)}{\partial x} + Cv\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial (Cv)}{\partial y} + Euv \end{cases} \tag{6.5}$$

dir.

Burada u, v fonksiyonlarının x, y değişkenlerine bağlı sürekli ve birinci, ikinci kısmi türevleri var hem de sürekli olan fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Ayrıca Oxy düzleminin kapalı C eğrisi ile sınırlanmış bir bağlantılı J bölgesi üzerinde alınan iki katlı aşağıdaki integrali ele alalım:

$$\iint_J [vL(u) - uM(v)]dxdy = \iint_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$$

Bu eşitliğin sağ tarafına (6.1) formülünü uygulayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\iint_J [vL(u) - uM(v)]dxdy = \int_C (Pdy - Qdx) \qquad (6.6)$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki integral J bölgesinin sınırı olan C eğrisinin pozitif yönde alınmış eğri boyunca integraldir. (6.6) formülüne Green formülü denir[6].

v fonksiyonu eşlenik diferansiyel denkleminin çözümü olduğunda, yani $M(v) = 0$ denklemini sağlayan fonksiyon olduğunda (6.6) eşitliği

$$\iint_J vL(u)dxdy = \int_C (Pdy - Qdx) \qquad (6.7)$$

şeklinde yazılır.

u fonksiyonu da $L(u) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü olduğunda,

$$\int_C (Pdy - Qdx) = 0 \qquad (6.8)$$

eşitliği sağlanır.

Böylece Green teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$M(v)$ diferansiyel ifadesi $L(u)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesi olduğunda ve P, Q ifadeleri (6.5) eşitlikleri ile tanımlandığında (6.6) eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte u ve v fonksiyonları x ve y değişkenlerine bağlı olup kapalı C eğrisi ile sınırlandırılmış bir bağlantılı J bölgesinde kendisi ile birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardır. $L(u)$ lineer diferansiyel ifadesinin katsayıları da J bölgesinde ve bu bölgenin C sınırında hem sürekli hem de sürekli birinci ve ikinci mertebeden türevleri olan fonksiyonlardır.

$M(u)$ diferansiyel ifadesi $L(u)$ diferansiyel ifadesi ile çakıştığında $L(u)$ diferansiyel ifadesine öz eşlenik diferansiyel ifade denir.

Öz eşlenik diferansiyel ifadenin genel şeklini bulmak için $M(u)$ diferansiyel ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$M(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(2\frac{\partial A}{\partial x} + 2\frac{\partial B}{\partial y} - D\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\left(2\frac{\partial B}{\partial x} + 2\frac{\partial C}{\partial y} - E\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} + F\right)u$$

Buradan ve (6.2) eşitliğinden,

$$M(u) = L(u)$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart,

$$D = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$E = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

O zaman öz eşlenik diferansiyel ifadenin en genel şekli aşağıdaki şekilde bulunur:

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Fu \qquad (6.9)$$

Aşağıdaki,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Au\frac{\partial v}{\partial x} + Bu\frac{\partial v}{\partial y}\right) - u\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(Bu\frac{\partial v}{\partial x} + Cu\frac{\partial v}{\partial y}\right) - u\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$-Fuv = -uFv$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayarak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-Fuv=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}-uL(v) \tag{6.10}$$

Burada,

$$\begin{cases} p=u\left(A\dfrac{\partial v}{\partial x}+B\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ q=u\left(B\dfrac{\partial v}{\partial x}+C\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{6.11}$$

dir.

Şimdi burada J bölgesinin Oxy düzleminde bir bölge, C'nin ise J bölgesinin sınırı olduğunu varsayalım. O zaman (6.1) formülünü uygulayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\iint_J \left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy=\int_C (pdy-qdx)$$

Öz eşlenik $L(u)$ diferansiyel ifadesi (6.9) eşitliği ile ve p, q ise (6.11) eşitlikleri ile tanımlandığında bulduğumuz sonuncu eşitliği (6.10) ifadesine uygulayarak aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\iint_J \left[A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-Fuv\right]dxdy$$

$$=\int_C (pdy-qdx)-\iint_J uL(v)dxdy \tag{6.12}$$

Bu (6.12) formülünde u ve v fonksiyonlarının yerlerini değiştirdiğimizde aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\iint_J \left[A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-Fuv\right]dxdy$$

$$=\int_C (p'dy-q'dx)-\iint_J vL(u)dxdy \tag{6.13}$$

Burada,

$$\begin{cases} p' = v\left(A\dfrac{\partial u}{\partial x} + B\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ q' = v\left(B\dfrac{\partial u}{\partial x} + C\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{6.14}$$

dir.

(6.12) ve (6.13) formüllerini birleştirerek,

$$\iint_J [vL(u) - uL(v)]dxdy = \int_C (Pdy - Qdx) \tag{6.15}$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada,

$$\begin{cases} P = p' - p = A\left(v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ Q = q' - q = B\left(v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{6.16}$$

dir.

Böylece $L(u)$ özeşlenik diferansiyel ifade olduğunda, yani $M(v) = L(v)$ eşitliği sağlandığında (6.6) Green formülü (6.15) Green formülüne dönüşür.

6.2. Riemann Metodu

Aşağıdaki hiperbolik,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{6.17}$$

diferansiyel denkleminin verildiğini varsayalım. O zaman $(6.2), (6.3)$ ve (6.5) formülleri aşağıdaki şekilde yazılır:

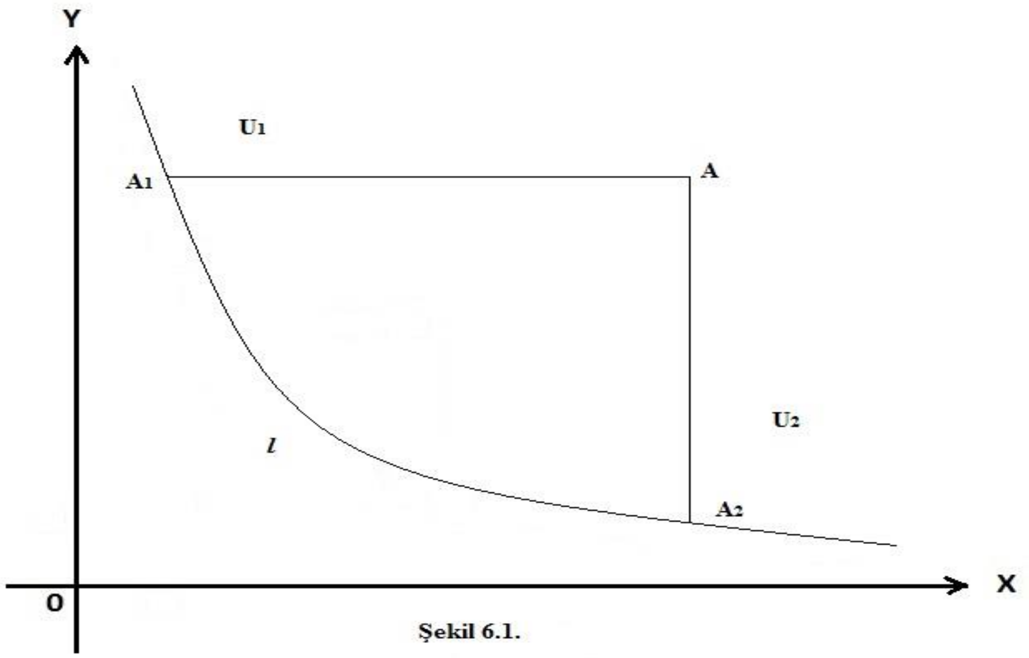
$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu \tag{6.18}$$

$$M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+\left(c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)v \tag{6.19}$$

$$\begin{cases} P=auv+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial y}-u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right) \\ \qquad =-\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial y}+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right) \\ Q=buv+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x}-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right) \\ \qquad =-\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x}+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right) \end{cases} \tag{6.20}$$

Şimdi Oxy düzleminde Ox ve Oy koordinat eksenlerine paralel doğrularla yalnız bir ortak noktası olan l eğrisinin verildiğini varsayalım.



Şekil 6.1.

ξ ve η koordinatlı bir A noktasından her iki karakteristikleri, yani $y=\eta,\ x=\xi$ doğrularını geçirelim. Bu karakteristik doğrular l eğrisini A_1 ve A_2 noktalarında keser. u fonksiyonunun $L(u)=0$ diferansiyel denkleminin çözümü olduğunu, v fonksiyonunun ise eşlenik $M(v)=0$ diferansiyel denkleminin çözümü olduğunu varsayalım. l eğrisi ve A noktasından geçirilen $y=\eta,\ x=\xi$ karakteristikleri ile sınırlandırılmış J bölgesinde u,v fonksiyonlarının ve diferansiyel (6.17) denkleminin a,b,c katsayıları ile bu katsayıların ve u,v fonksiyonlarının birinci mertebeden türevlerinin sürekli olduklarını varsayalım. O zaman (6.8) eşitliği sağlanacaktır:

$$\int_C (Pdy - Qdx) = 0$$

Burada C eğrisi J bölgesinin sınırını gösteren eğridir. O zaman bu sonuncu eşitliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_{A_2}^{A} Pdy + \int_{A_1}^{A} Qdx + \int_{A_1}^{A_2} (Pdy - Qdx) = 0$$

Burada bu eşitliğin sol yanındaki integral l eğrisi üzerinde A_1 noktasından A_2 noktasına kadar alınmıştır.

Burada P ve Q fonksiyonlarının (6.20) formülleri ile gösterilen değerlerini göz önünde bulundurarak,

$$\int_{A_2}^{A} Pdy = \int_{A_2}^{A} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[(uv)_A - (uv)_{A_2}\right] - \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right) dy$$

$$\int_{A_1}^{A} Qdx = \int_{A_1}^{A} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(uv)_A - (uv)_{A_1}\right] - \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right) dx$$

eşitliklerini yazabiliriz[7].

Burada $(\varphi)_A$ sembolü φ fonksiyonunun A noktasındaki değerini gösterir. Böylece yukarıdaki eşitliklerin yardımıyla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$(uv)_A = \frac{1}{2}\left[(uv)_{A_1} + (uv)_{A_2}\right] - \int_{A_1}^{A_2} (Pdy - Qdx)$$

$$+ \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right) dx + \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right) dy \qquad (6.21)$$

Şimdi x, y ile ξ, η değişkenlerine bağlı ve aşağıdaki şartları sağlayan $v(x, y; \xi, \eta)$ Riemann fonksiyonunu tanımlayalım:

1. J bölgesinde $v(x, y; \xi, \eta)$ fonksiyonunun kendisi ile x ve y değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli fonksiyondur ve eşlenik $M(v) = 0$ denkleminin çözümüdür.

2. $y = \eta$ karakteristiği üzerinde yani AA_1 doğrusu üzerinde

$$\frac{\partial v}{\partial x} - bv = 0$$

eşitliği sağlanır, ama $x = \xi$ karakteristiği üzerinde yani AA_2 doğrusu üzerinde

$$\frac{\partial v}{\partial y} - av = 0$$

eşitliği sağlanır.

3. (x, y) noktası $A(\xi, \eta)$ noktası ile çakıştığında $v = 1$ eşitliği sağlanır.

Şimdi dikkate alalım ki y değişkenine sabit η değerini verip, yani $y=\eta$ alarak yalnız x değişkeni değiştirildiğinde, o zaman $v(x,y;\xi,\eta)$ fonksiyonu aşağıdaki,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=bv$$

diferansiyel denklemini sağlayacaktır.

Bu diferansiyel denklemi $x=\xi$ noktasında

$$v|_{\substack{y=\eta \\ x=\xi}}$$

koşulunu sağlayan çözümü,

$$e^{\int_{\xi}^{x} bdx}$$

fonksiyonu olur.

Böylece $y=\eta$ alındığında v fonksiyonunun,

$$e^{\int_{\xi}^{x} bdx}$$

fonksiyonu ile çakışması gerekir.

Benzer şekilde v fonksiyonunun $x=\xi$ alındığında,

$$e^{\int_{\eta}^{y} ady}$$

fonksiyonu ile çakışması gerekir.

Böylece $v(x,y;\xi,\eta)$ Riemann fonksiyonu $M(v)=0$ diferansiyel denkleminin $y=\eta$ olduğunda;

$$v|_{y=\eta}=e^{\int_{\xi}^{x} bdx}$$

şartını sağlayan ve $x=\xi$ olduğunda,

$$v|_{x=\xi}=e^{\int_{\eta}^{y} ady}$$

şartını sağlayan çözümü gibi tanımlanabilir. Bu şekildeki çözümün varlığı ve tekliği Bölüm 5'te ardışık yaklaşımlar metodu ile ispatlanmıştır. Böyle bir çözüm yine Bölüm 5'te gösterilen sonsuz seri şeklinde inşa edilir.

(6.21) eşitliğindeki v fonksiyonunu yukarıda tanımladığımız $v(x,y;\xi,\eta)$ Riemann fonksiyonu ile değiştirdiğimizde,

$$(uv)_A = (u)_A = u(\xi,\eta)$$

olduğundan ve son iki integral sıfıra eşit olduğundan aşağıdaki formül bulunur:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[(uv)_{A_1} + (uv)_{A_2}\right] - \int_{A_1}^{A_2} (Pdy - Qdx) \tag{6.22}$$

Burada,

$$\begin{cases} P = auv + \dfrac{1}{2}\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ Q = buv + \dfrac{1}{2}\left(v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{6.23}$$

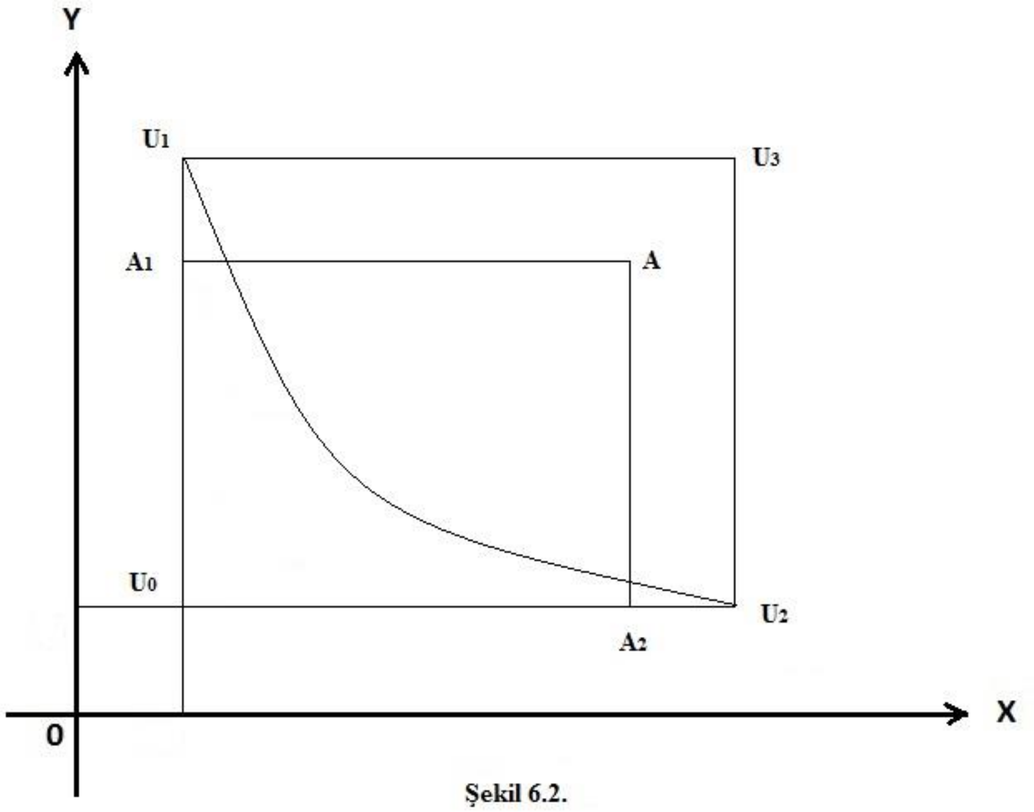
dir.

Şimdi, l eğrisinin A_1A_2 eğri yayı üzerinde $u(x,y)$ fonksiyonunun ve onun $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ kısmi türevlerinin sürekli fonksiyon gibi değerlerinin verildiğini varsayalım.

Burada

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

olduğundan ve burada dx, dy, du diferansiyelleri l eğrisi üzerinde alındıklarından, l eğrisi üzerinde u ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ fonksiyonlarının değerleri verildiğinde $\frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonunun değeri de belli olur. v fonksiyonunu belli olarak alabildiğimizi kabul ederek P ve Q fonksiyonlarını (6.23) eşitliklerine dayanarak l eğrisi üzerinde hesaplayabildiğimizden (6.22) eşitliğinin sağ tarafındaki integral belli olur.



Şekil 6.2.

Şimdi, U_1U_2 eğri yayı üzerinde $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonlarının değerlerinin verildiğini varsayalım. U_1 ve U_2 noktalarından Oy ve Ox eksenlerine uygun olarak paralel olan karakteristiklerin geçirildiğini varsayalım. Bu karakteristikler bir $U_0U_2U_3U_1$ dikdörtgenini oluşturur. Bu $U_0U_2U_3U_1$ dikdörtgeninin içinde yer alan keyfi bir $A(\xi, \eta)$ noktasını ele alalım. O zaman $u(\xi, \eta)$ değerini (6.22) formülü ile hesaplayabiliriz. Bununla biz u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonları l eğrisi üzerinde verildiğinde, (6.17) denklemini sağlayan yalnız bir tane u fonksiyonunun olduğunu ispatlamış oluruz.

Şimdi l eğrisinin Oy eksenine paralel olan U_1U_0 doğrusundan ve Ox eksenine paralel olan U_0U_2 doğrusundan oluştuğunu varsayalım. O zaman (6.22) formülü ile, u fonksiyonunun değeri U_1U_0 ve U_0U_2 karakteristikleri üzerinde verildiklerinde, u fonksiyonu ((6.22) formülü ile) tüm $U_0U_2U_3U_1$ dikdörtgeninde bir değerli olarak bulunur.

Gerçekten de $A(\xi,\eta)$ noktasının $R(U_0U_2U_3U_1)$ dikdörtgeninden alınmış keyfi bir nokta olduğunu varsayalım. $A_1(x_0,\eta)$ ve $A_2(\xi,y_0)$ noktalarının A noktasından geçen karakteristiklerin ele aldığımız dikdörtgenin U_1U_0 ve U_0U_2 tarafları ile kesiştiği noktalar olduğunu varsayalım. $A_0(x_0,y_0)$ noktası U_0 noktası olsun.

Bu durum için (6.22) formülündeki

$$\int_{A_1}^{A_2}(Pdy-Qdx)$$

integrali aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int_{A_1}^{A_2}(Pdy-Qdx)=\int_{A_1}^{A_0}Pdy+\int_{A_2}^{A_0}Qdx$$

Diğer yandan;

$$\int_{A_2}^{A_0}Qdx=\int_{A_2}^{A_0}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x}+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(uv)_{A_2}-(uv)_{A_0}\right]+\int_{A_2}^{A_0}v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\int_{A_1}^{A_0}Pdy=\frac{1}{2}\left[(uv)_{A_1}-(uv)_{A_0}\right]+\int_{A_1}^{A_0}v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+au\right)dy$$

eşitliği yazılabilir.

Böylece, bu durum içim (6.22) formülü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(\xi,\eta) = (uv)_{A_0} - \int_{A_2}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right)dx - \int_{A_1}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right)dy \qquad (6.24)$$

Şimdi, A_2A_0 karakteristiği üzerinde u fonksiyonunun değeri belli olduğundan bu doğru üzerinde $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevinin değeri belli olur.

Uygun olarak A_1A_0 karakteristiği üzerinde u fonksiyonunun değeri belli olduğundan bu karakteristik üzerinde $\frac{\partial u}{\partial y}$ türevinin değeri de belli olur.

Buradan görüyoruz ki, u fonksiyonunun değerleri her iki A_1A_0 ve A_0A_2 karakteristikleri üzerinde verildiğinde $u(\xi,\eta)$ fonksiyonunun değerini (6.24) formülü ile hesaplanabilir.

Böylece (6.17) denkleminin U_1U_0 ve U_0U_2 karakteristikleri üzerinde verilmiş değerleri alan tek bir tane çözümü vardır.

Buradan da özel durumda, $M(v) = 0$ denkleminin $x = \xi$ ve $y = \eta$ karakteristikleri üzerinde verilmiş sınır şartlarını sağlayan çözümü olan $v(x,y;\xi,\eta)$ Riemann fonksiyonu bir değerli olarak bulunur.

(6.17) denkleminin $R = (U_1U_0U_2U_3)$ dikdörtgeninde birinci mertebeden kısmi türevleri ile sürekli olan sürekli çözümünün U_1U_0 ve U_0U_2 karakteristikleri üzerinde önceden verilmiş değerleri alan çözümü tektir ve R dikdörtgeninin keyfi alınmış $A(\xi,\eta)$ noktasında $v(x,y;\xi,\eta)$ Riemann fonksiyonunun yardımıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$u(\xi,\eta) = (uv)_{A_0} + \int_{A_0}^{A_2} v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right)dx + \int_{A_0}^{A_1} v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right)dy$$

Bölüm 5' te elde edilen sonuca aşağıdaki sonuç eklenebilir:

(6.17) denkleminin R dikdörtgeninde kendisi ve birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan ve l eğrisi üzerinde kendisi u ve $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ türevlerinin önceden verilmiş değerleri alan çözümü R dikdörtgeninin içinden alınmış keyfi (ξ, η) noktasındaki çözümü aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[(uv)_{A_1} + (uv)_{A_2}\right] - \int_{A_1}^{A_2} (Pdy - Qdx)$$

Bu formüldeki P ve Q fonksiyonları (6.23) formülleri ile tanımlanır.

Şimdi x, y ve ξ', η' değişkenlerine bağlı $u(x, y;\ \xi', \eta')$ fonksiyonunu dahil edelim. Bu $u(x, y;\ \xi', \eta')$ fonksiyonunu $L(u) = 0$ denkleminin x, y değişkenine göre,

$y = \eta'$ olduğunda;

$$u|_{y=\eta'} = e^{-\int_{\xi'}^{x} bdx}$$

değerini alan,

$x = \xi'$ olduğunda ise;

$$u|_{x=\xi'} = e^{-\int_{\eta'}^{y} ady}$$

değerini alan çözümü olarak tanımlayalım.

(Dikkate alalım ki $L(y)$ diferansiyel ifadesinden eşlenik $M(v)$ diferansiyel ifadesine geçildiğinde a, b katsayıları $-a, -b$ katsayılarına geçilir.)

Şimdi burada ξ' ve η' parametrelerinin A_0 noktasının koordinatları olduklarını varsayalım. ξ' ve η' parametrelerinin A_0 noktasının koordinatları olarak alalım ve (6.24) formülünde yerlerine yazalım. Burada yeni dahil ettiğimiz $u(x, y;\ \xi', \eta')$ fonksiyonunu da (6.24) formülünde u fonksiyonunun yerine yazalım. O zaman A_0A_2 doğrusu üzerinde, yani $y = \eta'$ olduğunda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0$$

eşitliği sağlanacak, ama A_0A_1 doğrusu üzerinde ise, yani $x = \xi'$ olduğunda

$$\frac{\partial u}{\partial y} + au = 0$$

eşitliği sağlanacaktır. Yani (6.24) formülündeki integraller sıfır olacaktır.

$(u)_{A_0} = 1$ eşitliği sağlandığından,

$$u(\xi, \eta) = v(\xi', \eta')$$

eşitliğini

veya açık şekilde,

$$u(\xi, \eta; \xi', \eta') = v(\xi', \eta'; \xi, \eta) \tag{6.25}$$

formülünü bulmuş oluruz.

6.3. Riemann Metodunun Bazı Özel Uygulamaları

Örnek 6.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{6.26}$$

denklemini ele alalım.

$v(x, y; \xi, \eta)$ Riemann fonksiyonu eşlenik

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar. Verilen (6.26) denkleminde a ve b katsayıları sıfıra eşit olduklarından $v(x, y; \xi, \eta)$ Riemann fonksiyonu $x = \xi$ ve $y = \eta$ olduğunda da yani bu iki durumda da

$$v|_{x=\xi} = 1, \;\; v|_{y=\eta} = 1$$

koşullarını sağlar.

Şimdi (6.26) diferansiyel denkleminin $y = x$ doğrusu üzerinde $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonlarının değerleri verildiğinde $u(x, y)$ çözümünü bulalım.

Böylece (6.26) denkleminin

$$u|_{y=x} = f(x), \quad (u_y - u_x)|_{y=x} = F(x) \tag{6.27}$$

şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Burada $f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları verilmiş fonksiyonlardır.

A_1 noktası ise $y = x$ doğrusu ile $x = \xi$ doğrusunun kesiştiği noktadır. A_1 noktasının koordinatları $x = \xi$ ve $y = \xi$ olur. A_2 noktası $y = x$ doğrusu ile $y = \eta$ doğrusunun kesiştiği noktadır. A_2 noktasının koordinatları $x = \eta$ ve $y = \eta$ olur.

(6.23) eşitliğinde

$$a = b = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

olduklarını dikkate alarak,

$$P = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

olduğunu buluruz.

(6.22) eşitliğinde A_1A_2 üzerinde alınmış integralde $y = x$ olduğundan $dy = dx$ olur. Bu yüzden de ele aldığımız denklemde (6.22) formülü (6.27) koşullarının kullanılması ile aşağıdaki şekli alır:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}[f(\xi) + f(\eta)] - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} F(x)dx \tag{6.28}$$

Örnek 6.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = 0 \tag{6.29}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde c katsayısı verilmiş sabit bir sayıdır.

Riemann fonksiyonu $v(x, y; \xi, \eta)$ aşağıdaki eşlenik,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + cv = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar. Riemann fonksiyonu

$$v(x, y; \xi, \eta)|_{x=\xi} = 1, \quad v(x, y; \xi, \eta)|_{y=\eta} = 1$$

şartlarını sağlar.

$v(x, y; \xi, \eta)$ Riemann fonksiyonunu $z = (x - \xi)(y - \eta)$ ifadesinin fonksiyonu gibi arayalım. Dikkate alalım ki,

$$z|_{x=\xi} = 0, \quad z|_{y=\eta} = 0$$

şartları sağlanır.

$v(z) = v\big((x - \xi)(y - \eta)\big)$ fonksiyonunun türevlerini hesaplayalım:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = (y - \eta)\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = (x - \xi)\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x - \xi)\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial v}{\partial z} + (x - \xi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= (x - \xi)(y - \eta)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Böylece (6.29) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olur.

$$z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} + cv = 0$$

Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$\phi(z) = 1 - \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{1^2 2^2} - \frac{z^3}{1^2 2^2 3^2} + \cdots \tag{6.30}$$

Böylece,

$$\phi(z) = J_0\left(2\sqrt{z}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$J_0(z) = 1 - \frac{z}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

dır.

Buradaki $J_0(z)$ fonksiyonu sıfır indisli birinci mertebeden Bessel fonksiyonudur. O zaman,

$$v = \phi(cz)$$

fonksiyonu (6.29) denkleminin $z = 0$ olduğunda $\phi|_{z=0} = 1$ sınır koşulunu sağlayan tek çözümü olur. Böylece, Riemann fonksiyonunu aşağıdaki şekilde bulmuş oluruz:

$$v(x, y; \xi, \eta) = \phi\big(c(x - \xi)(y - \eta)\big) \tag{6.31}$$

Şimdi (6.29) denkleminin,

$$u|_{y=x} = f(x), \quad \left(u_y - u_x\right)|_{y=x} = F(x) \tag{6.32}$$

şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Örnek 6.2 de olduğu gibi A_1 noktası koordinatları $x = \xi,\ y = \eta$ ve A_2 noktası koordinatları $x = \eta,\ y = \eta$ olan noktalar olsun. (6.22) eşitliğindeki integralin A_1A_2 üzerinde alındığından ve A_1A_2 üzerinde $y = x$ olduğunu dikkate alalım ve bu doğru üzerinde (6.23) eşitliklerine göre;

$$P - Q = \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}(\eta - \xi)u\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{2}\phi\big(c(x - \xi)(y - \eta)\big)F(x) - \frac{c}{2}(\eta - \xi)\phi'\big(c(x - \xi)(y - \eta)\big)f(x)$$

A_1 ve A_2 noktalarında $v = 1$ olduğundan (6.22) formülünü kullanarak,

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(f(\xi)+f(\eta))-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta}\phi\big(c(x-\xi)(y-\eta)\big)F(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}c(\eta-\xi)\int_{\xi}^{\eta}\phi'\big(c(x-\xi)(y-\eta)\big)f(x)dx \tag{6.33}$$

eşitliğini elde ederiz.

Örnek 6.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{6.34}$$

diferansiyel denkleminin Riemann fonksiyonunu bulalım.

(6.34) diferansiyel denkleminin eşlenik diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\beta+\beta'}{(x-y)^2}=0$$

Bu eşlenik diferansiyel denklemde,

$$v=(x-y)^{\beta+\beta'}w$$

dönüşümü yaparak aşağıdaki,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

diferansiyel denklemini elde ederiz:

Bu denklemim aşağıdaki şekilde çözümü vardır:

$$w=x^{\lambda}F\left(-\lambda,\beta,1-\beta'-\lambda,\frac{y}{x}\right)$$

Burada λ keyfi sabit sayıdır. $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ fonksiyonu ise Gauss'un hipergeometrik fonksiyonudur. Bu fonksiyon hipergeometrik seri ile tanımlanır.

Özel durumda w-ya göre diferansiyel denklemin bir $\varphi(x, y)$ çözümü bulunduğunda, bu diferansiyel denklemin,

$$(x-\xi)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta}\varphi\left(\frac{x-\eta}{x-\xi}, \frac{y-\eta}{y-\xi}\right)$$

şeklinde de çözümü olur. Burada ξ ve η keyfi sabitlerdir.

Böylece yukarıda yazılmış çözümden aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$w = (\eta - x)^{\lambda}(x-\xi)^{-\beta'-\lambda}(y-\xi)^{\beta}F(-\lambda, \beta, 1-\beta'-\lambda, \sigma)$$

Burada,

$$\sigma = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} \tag{6.35}$$

dır.

Burada w fonksiyonunu $(x-y)^{\beta+\beta'}$ ifadesi ile çarparak eşlenik diferansiyel denklemin aşağıdaki çözümünü buluruz:

$$v = (\eta - x)^{\lambda}(\xi - x)^{-\beta'-\lambda}(y-\xi)^{-\beta}(y-x)^{\beta+\beta'}F(-\lambda, \beta, 1-\beta'-\lambda, \sigma)$$

Bu çözüm $x = \xi$ aldığımızda

$$v|_{x=\xi} = e^{-\int_{\eta}^{y}\frac{\beta'}{\xi - y}dy} = \left(\frac{y-\xi}{\eta-\xi}\right)^{\beta'}$$

koşulunu sağlarsa ve $y = \eta$ olduğunda,

$$v|_{y=\eta} = e^{-\int_{\xi}^{x}\frac{\beta}{x-\eta}dx} = \left(\frac{\eta - x}{\eta - \xi}\right)^{\beta}$$

şartlarını sağladığında burada bulduğumuz çözüm Riemann fonksiyonu olur.

$x = \xi$ olduğunda $\sigma = 0$ ve $F|_{x=\xi} = 1$ olur.$(\xi - x)^{-\beta'-\lambda}$ çarpanı ya sıfıra ya da sonsuza eşit olur (bunun için $\lambda \neq \beta'$ olması gerekir). $\lambda = \beta'$ olduğunda ise

$$v = (\eta - x)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta}(y-x)^{\beta+\beta'}F(\beta', \beta, 1, \sigma) \tag{6.36}$$

olur.

Buradan,

$$v|_{x=\xi} = \left(\frac{y-\xi}{\eta-\xi}\right)^{\beta'}$$

$$v|_{y=\eta} = \left(\frac{\eta-x}{\eta-\xi}\right)^{\beta}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (6.36) formülü ile bulunan fonksiyon verilmiş denklemin Riemann fonksiyonudur.

7. HİPERBOLİK LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN RIEMANN METODU İLE ÇÖZÜMÜ

7.1. Eşlenik Diferansiyel Operatörler

Sınır değer problemlerini integral şeklinde gösterebilmemiz için bazı yardımcı formüller belirleyelim. Bu amaçla hiperbolik lineer diferansiyel denklemlere uygun aşağıdaki lineer diferansiyel operatörü ele alalım:

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u \qquad (7.1)$$

Buradaki Lu ifadesini bir v fonksiyonu ile çarparak Lu ifadesinin ayrı ayrı terimlerini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$vu_{xx} = (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}$$

$$vu_{yy} = \left(vu_y\right)_y - \left(v_y u\right)_y + uv_{yy}$$

$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x$$

$$vbu_y = (bvu)_y - u(bv)_y$$

$$vcu = ucv$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$vL[u] = uM[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \qquad (7.2)$$

Burada;

$$M[v] = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv \qquad (7.3)$$

$$H = vu_x - v_x + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = -(vu)_x + (2u_x + au)v \quad (7.4)$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + \left(2v_y + bv\right)u = (uv)_y - \left(2u_y + bu\right)v \quad (7.5)$$

dir.

Buradaki M operatörüne L operatörünün eşlenik operatörü denir[7].

İki diferansiyel operatör için,

$$vL[u]-uM[v]$$

farkı, iki H ve K ifadelerinin uygun olarak birinin x değişkenine göre türevinin diğerinin y değişkenine göre türevinin toplamına eşit olursa, yani

$$vL[u]-uM[v]=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}$$

şeklinde gösterilebilirse bu diferansiyel operatörlere eşlenik diferansiyel operatörler denir.

u ve v fonksiyonları bir G bölgesinde iki kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduklarında, C ise G bölgesinin parça parça (regüler) diferansiyellenebilen sınırı olduğunda yani G bölgesi parça parça diferansiyellenebilen eğri ile sınırlandırıldığında aşağıdaki eşitlik doğru olur:

$$\iint_G (vL[u]-uM[v])d\xi d\eta=\int_C (Hd\eta-Kd\xi) \tag{7.6}$$

Özel durumda,

$$L[u]=M[u]$$

eşitliği sağlandığında $L[u]$ diferansiyel operatörüne özeşlenik operatör denir[8].

7.2. Çözümün İntegral Şekli

Aşağıdaki problemi çözmek için (7.6) eşitliğini kullanalım. Böylece,

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y) \tag{7.7}$$

diferansiyel denkleminin C eğrisi üzerinde,

$$u|_C=\varphi(x)$$

$$u_n|_C=\psi(x)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

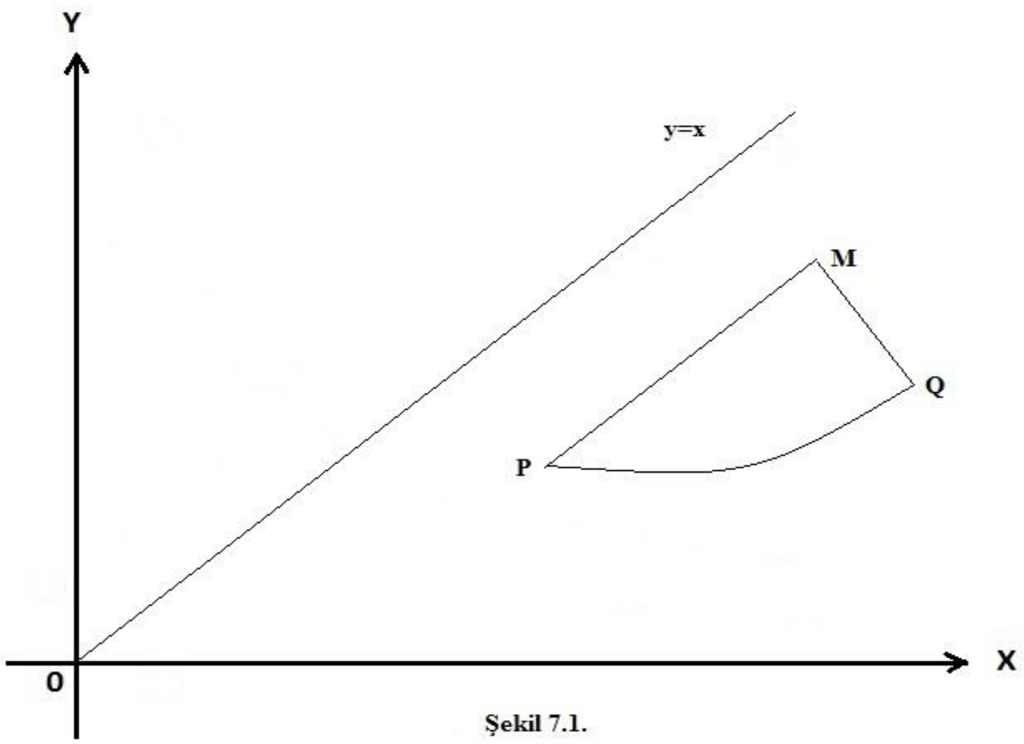
Burada $\frac{\partial u}{\partial n} = u_n$ ifadesi u fonksiyonunun C eğrisinin $\vec{n}$ normali yönündeki türevidir. C eğrisinin,

$$y = f(x)$$

denklemi ile verildiğini ve $f(x)$'in diferansiyellenebilen fonksiyon olup $|f'(x)| < 1$ eşitsizliğini sağladığını varsayarız.

C eğrisi üzerinde konulan bu şartlardan, $y - x = c_1$ ve $y + x = c_2$ karakteristiklerinden her birinin C eğrisini birden fazla noktada kesmediği elde edilir.

Şekildeki MPQ eğrisel üçgenini ele alalım:



Şekil 7.1.

(7.6) eşitliğini MPQ eğrisel üçgeni üzere yazarak;

$$\iint_{MPQ} (vL[u] - uM[v])d\xi d\eta = \int_Q^M (Hd\eta - Kd\xi) + \int_M^P (Hd\eta - Kd\xi)$$

$$+ \int_P^Q (Hd\eta - Kd\xi)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci ve ikinci integraller MQ ve MP karakteristikleri üzere alınmıştır. Burada $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ olmak üzere QM eğri elemanı olsun. O zaman;

QM üzerinde;

$$d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}}$$

MP üzerinde;

$$d\xi = d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}}$$

olur.

(7.4) ve (7.5) formüllerini kullanarak,

$$\int_Q^M (Hd\eta - Kd\xi) = -\int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right) uds$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right) uds$$

eşitliğini elde ederiz.

Benzer şekilde,

$$\int_M^P (Hd\eta - Kd\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v\right) uds$$

yazabiliriz.

Buradan ve (7.6) eşitliğinden aşağıdaki formülü buluruz:

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v\right) u ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} v\right) u ds$$

$$\frac{1}{2}\int_P^Q (Hd\eta - Kd\xi) - \frac{1}{2}\iint_{MPQ} (vL[u] - uM[v]) d\xi d\eta \tag{7.8}$$

Bu eşitlik yeterince diferansiyellenebilen u ve v fonksiyonları için sağlanır. Başka bir deyişle, bu formül iki kez sürekli diferansiyellenebilen u ve v fonksiyonları için sağlanır.

Şimdi (7.8) eşitliğindeki u fonksiyonu olarak ele aldığımız başlangıç değer probleminin çözümünü, ama v fonksiyonu olarak M noktasına parametrik olarak bağlı olan ve MPQ üçgeninin içinde;

$$M[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \tag{7.9}$$

diferansiyel denklemini sağlayan ve MP karakteristiği üzerinde,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \tag{7.9'}$$

eşitliğini, ama MQ karakteristiği üzerinde ise,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} v \tag{7.9''}$$

eşitliğini sağlayan ve

$$v(M) = 0 \tag{7.9'''}$$

şartını sağlayan fonksiyon olarak alalım.

Buradaki karakteristikler üzerindeki $(7.9')$, $(7.9'')$ ve $(7.9''')$ şartlarından aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

MP karakteristiği üzerinde;

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds}$$

MQ karakteristiği üzerinde;

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds}$$

olur.

Burada s_0 ve s değişkeninin M noktasındaki değeridir.

(7.9) denkleminin MP ve MQ karakteristikleri üzerinde $(7.9')$, $(7.9'')$ ve $(7.9''')$ şartlarını sağlayan problemin çözümünün bulunması problemi Goursat problemidir. Goursat probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Böylece $(7.9')$, $(7.9'')$ ve $(7.9''')$ probleminin MPQ bölgesinde çözümü var ve tektir.

(7.9) denkleminin $(7.9')$, $(7.9'')$ ve $(7.9''')$ şartlarını sağlayan v fonksiyonuna Riemann fonksiyonu denir[8].

Böylece (7.7) denklemini sağlayan u fonksiyonu için (7.8) formülü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q \left[v\left(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi\right) - u\left(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi\right)\right]$$

$$+uv(ad\eta - bd\xi) + \iint_{MPQ} v(M, M')f(M')d\sigma_{M'} \ , \qquad (d\sigma_{M'} = d\xi d\boldsymbol{\eta}) \quad (4.10)$$

ele aldığımız problem (7.10) formülü ile çözülür. PQ eğrisi üzere alınan integral altındaki fonksiyonlar C eğrisi üzerinde belli verilmiş fonksiyonlardır. Gerçekten, v fonksiyonu yukarıda belirlenmiş fonksiyondur ve

$$u|_C = \varphi(x)$$

$$u_x|_C = u_S \cos(xs) + u_n \cos(xn) = \frac{\varphi'(x) + \psi(x)f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

$$u_y|_C = u_S \cos(ys) + u_n \cos(yn) = \frac{\varphi'(x)f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

formülleri ile hesaplanıp bulunurlar.

7.3. Riemann Fonksiyonunun Fiziksel Anlamı

$v(M, M')$ Riemann fonksiyonunun fiziksel anlamını açıklayalım. Bu amaçla homojen olmayan,

$$L[u] = f$$

denkleminin homojen

$$u|_C = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. (7.10) formülüne dikkat ettiğimizde ele aldığımız bu problemin çözümünün,

$$u(M) = \iint\limits_{MPQ} v(M, M')f(M')\, d\sigma_{M'} \qquad (7.11)$$

şeklinde bulduğumuzu görüyoruz.

Şimdi (7.11) formülündeki $f(M)$ fonksiyonunun bir M_1 noktasının lokal fonksiyonu olduğunu varsayalım. Yani $f(M)$ fonksiyonunun M_1 noktasının bir küçük S_ε komşuluğu dışında sıfıra eşit bir fonksiyon olduğunu ve,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f(M')\, d\sigma_{M'} = 1 \qquad (7.12)$$

normalleştirme şartını sağladığını varsayalım.

Bu durum için (7.11) formülü aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u_\varepsilon(M) = \iint\limits_{S_\varepsilon} v(M, M')f(M')\, d\sigma_{M'} \tag{7.13}$$

(7.13) formülünün sağ yanındaki integrale ortalama değer teoremini uygulayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \iint\limits_{S_\varepsilon} f(M')\, d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*)$$

Burada M_1^* noktası S_ε komşuluğunda bir noktadır. M_1 noktasının S_ε komşuluğunun $\varepsilon > 0$ yarıçapını sıfıra yaklaştırdığımızda M_1^* noktası M_1 noktasına yakınsar. Böylece,

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M') \tag{7.14}$$

eşitliğini buluruz.

Adeta y değişkeni zamanı, f fonksiyonu ise fiziksel olarak kuvvet yoğunluğunu gösterir[4].

Aşağıdaki,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f(M')\, d\sigma_{M'} = \iint\limits_{S_\varepsilon} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{7.15}$$

ifadesi kuvvet impulsunu gösterir.

Buradan (7.11) formülüne dayanarak $v(M, M')$ fonksiyonunun M_1 noktasına etki eden birim impuls fonksiyonu olduğu görülür.

$v(M, M') = v(x, y; \xi, \eta)$ fonksiyonu $M(x, y)$ parametrelerinin fonksiyonu olarak M_1 noktasının ξ ve η koordinatlarına göre,

$$M_{(\xi,\eta)}[v] = 0 \tag{7.16}$$

denkleminin $(7.9')$, $(7.9'')$ ve $(7.9''')$ şartlarını sağlayan çözümü gibi tanımlanmıştı.

Şimdi,

$$u = u(M, M_1)$$

fonksiyonunu ele alalım.

$u = u(M, M_1)$ fonksiyonu $M_1(\xi, \eta)$ parametrelerinin fonksiyonu olup x ve y değişkenlerinin yani M noktasının koordinatlarının fonksiyonu olarak,

$$L_{(x,y)}[u] = 0 \tag{7.17}$$

denkleminin aşağıdaki

$$\begin{cases} M_1Q_1 \ karakteristiği \ üzerinde \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{2}} u \ , \\ M_1P_1 \ karakteristiği \ üzerinde \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{b+a}{2\sqrt{2}} u \ , \\ ve \\ u(M, M_1) = 1 \end{cases} \tag{7.18}$$

şartlarını sağlayan çözümüdür.

(7.18) şartlarından,

M_1Q_1 karakteristiği üzerinde,

$$u(M, M_1) = e^{\int_{S_0}^{S} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \tag{4.19}$$

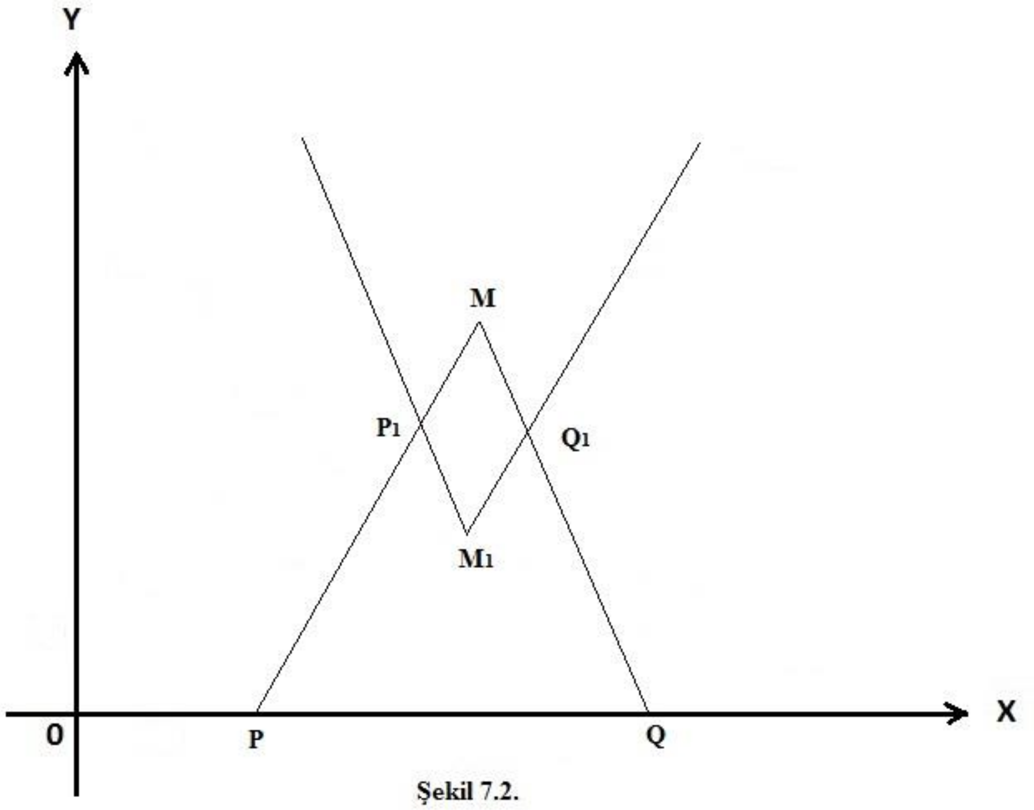
M_1P_1 karakteristiği üzerinde,

$$u(M, M_1) = e^{\int_{S_0}^{S} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \tag{4.19'}$$

ve

$$u(M, M_1) = 1$$

olduğunu buluruz. (7.17) denklemi ve (7.18) şartları $u(M, M_1)$ fonksiyonunu oluşan $MP_1M_1Q_1$ dörtgeninde tam olarak belirliyor.



Şekil 7.2.

(7.6) formülünü $MP_1M_1Q_1$ dörtgenine uygulayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\iint\limits_{MP_1M_1Q_1} (vL[u] - uL[v])d\xi d\eta = \int_M^{P_1} (Hd\eta - Kd\xi) + \int_{Q_1}^{M} + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

(7.10) formülünün bulunmasında kullanılan yöntemleri ve $(7.4) - (7.5)$ eşitlikleri ile tanımlanan K ve H fonksiyonlarının ifadelerini dikkate alarak ve v fonksiyonunun (7.9) şartlarını karakteristikler üzerinde dikkate alarak yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki ilk iki integral için aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\int_M^{P_1} (Hd\eta - Kd\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1}$$

$$\int_{Q_1}^{M} (Hd\eta - Kd\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1}$$

$u(M, M_1)$ fonksiyonu için karakteristikler üzerindeki (7.19) ve $(7.19')$ şartlarını ve $(7.4')$-(7.5) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\int_{P_1}^{M_1} (Hd\eta - Kd\xi) = \int_{P_1}^{M_1} \left[-(vu)_\xi d\eta - (uv)_\eta d\xi\right]$$

$$+ \int_{P_1}^{M_1} \left[\left(2u_\xi d\eta + 2u_\eta d\xi\right) + (aud\eta - bud\xi)\right]$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u\right) vds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1}$$

$$\left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (Hd\eta - Kd\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \quad , \qquad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right)$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayarak;

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

veya

$$u(M, M_1) = v(M, M_1)$$

ifadelerini elde ederiz.

Burada,

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1$$

eşitliği kullanıldı.

Böylece buradan görüyoruz ki $v(M, M_1)$ Riemann fonksiyonunu bulmak için

$$L_{(x,y)}[v(M, M_1)] = 0$$

denkleminin (7.18) şartlarını sağlayan çözümünü bulmakla da bulabiliriz.

7.4. Sabit Katsayılı Denklemler

Burada sabit katsayılı,

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{7.21}$$

(a, b, c sabitlerdir) denklemi için,

$$u|_{y=0} = \varphi(x) \tag{7.22}$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x) \tag{7.23}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

(7.21) denkleminde $u(x, y)$ değişkenini yeni,

$$u(x, y) = ue^{\lambda x + \mu y} \tag{7.24}$$

değişkenini dahil ederek (7.21) denklemi yeni aranan $u(x, y)$ fonksiyonu için aşağıdaki şekilde,

$$u_{xx} - u_{yy} + c_1 u = 0 \ \ , \ \ c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2) \tag{7.25}$$

denklemi için,

$$u|_{y=0} = \varphi(x)e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x) \tag{7.22'}$$

$$u_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right)e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x) \tag{7.23'}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine getirilmiş olur. Bunun için (7.24) dönüşümünde;

$$\lambda = \frac{a}{2} \ \ , \ \ \mu = -\frac{b}{2} \tag{7.26}$$

almamız gerekir.

(7.25) denkleminin $(7.22')$- $(7.23')$ başlangıç şartlarını sağlayan $u(x,y)$ çözümünü bulmamız için bu probleme uygun $v(x,y,\xi,\eta)$ Riemann fonksiyonunu inşa etmemiz gerekir.

(7.25) denkleminin $(7.22')$- $(7.23')$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasına uygun Riemann fonksiyonu,

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0 \tag{7.27}$$

denkleminin,

$$\begin{cases} MP\ karakteristiği\ üzerinde \\ \qquad v = 1, \\ MQ\ karakteristiği\ üzerinde \\ \qquad v = 1 \end{cases} \tag{7.28}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin çözümü olur.

(7.27) denkleminin (7.28) şartını sağlayan çözümünü,

$$v = v(z) \tag{7.29}$$

şeklinde arayalım.

Burada,

$$z = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\ \ ve\ ya\ \ z^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \tag{7.30}$$

şeklindedir.

z^2 için ifadeyi iki kez x ve y değişkenlerine göre diferansiyelleyerek,

$$zz_x = x - \xi$$

$$zz_y = -(y-\eta)$$

$$zz_{xx} + z_x^2 = 1$$

$$zz_{yy} + z_y^2 = -1$$

Buradan da,

$$z_x^2 - z_y^2 = 1 \quad , \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Böylece v fonksiyonunun bulunması problemi,

$$v'' + \frac{1}{z}v' + c_1 v = 0$$

denkleminin,

$$v(0) = 1$$

şartını sağlayan çözümünün bulunmasına getirilmiş olur. Bu denklemin çözümü sıfırıncı mertebeden Bessel denklemi olup,

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1}z)$$

ve ya

$$v(x, y, \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}\right) \tag{7.31}$$

şeklindedir.

Şimdi $u(x, y)$ fonksiyonunu bulmak için (7.10) formülünü kullanalım. Bizim burada ele aldığımız problem için (7.10) formülü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(M) = \frac{v(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q \left(v u_\eta d\xi - u v_\eta d\xi\right) \quad , \qquad (d\eta = 0) \tag{7.32}$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki integrali PQ parçası üzere önce integralleyelim:

$$\int_{P}^{Q} (vu_\eta - uv_\eta) d\xi =$$

$$\int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2 - y^2]}\right) u_\eta(\xi, 0) - \frac{u(\xi, 0)\sqrt{c_1} y J_0'\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{c_1[(x-\xi)^2 - y^2]}} \right\} d\xi$$

$$(7.33)$$

Burada $(7.22')$ ve $(7.23')$ başlangıç şartlarını kullanarak aranan $u(x, y)$ fonksiyonu için aşağıdaki formülü buluruz:

$$u(x, y) = \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) \psi_1(\xi) d\xi$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{c_1}} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)\psi_1(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} d\xi \qquad (7.34)$$

Bu (7.34) formülünde (7.24) dönüşümü ile $(7.22')$ ve $(7.23')$ eşitliklerini kullanarak (7.21) denkleminin $(7.22) - (7.23)$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması için aşağıdaki formülü buluruz:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) e^{-\frac{a-b}{2} y} + \varphi(x+y) e^{\frac{a+b}{2} y}}{2}$$

$$- \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2} y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) \right.$$

$$\left. - \sqrt{c_1} y \frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \right\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2} y} \int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi \qquad (7.35)$$

Şimdi biz (7.21) denkleminde $a = 0\,, b = 0$ durumunu ele alalım. O zaman (7.25) eşitliklerinde $c_1 = c^2$ olur ve bu durum için,

$$u_{xx} - u_{yy} + cu = 0$$

denkleminin (7.22) $-$ (7.23) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü uygun olarak,

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(c\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)\psi(\xi)d\xi$$

$$-\frac{1}{2}cy\int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1\left(c\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}\varphi(\xi)d\xi \qquad (7.36)$$

şeklindeki formül ile hesaplanır.

Burada $c = 0$ ve $y = at$ aldığımızda,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

titreşim denkleminin,

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümü için,

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi \qquad (7.37)$$

formülünü buluruz ki bu formüle D'alambert formülü denir.

8. RIEMANN METODUNUN ELEKTRİK HATLARINDAKİ TİTREŞİMLERİN İNCELENMESİNE UYGULANMASI

8.1. Serbest Elektrik Titreşimlerinin Diferansiyel Denklemleri

Elektrik hatlarında elektrik akımı geçtiğinde bu elektrik hatlarının etrafında elektromanyetik alan oluşur. Bu elektromanyetik alan, elektrik hatlarındaki elektrik akımının gücünün ve gerginliğinin titreşimlerinin oluşmasına sebep olur. Burada bu titreşimler denkleminin elde edilmesini ele alacağız. Bu amaçla Ox eksenini elektrik hattı gibi düşünelim. Koordinat başlangıcını ise elektrik hattının uçlarından birinde yerleştirelim. Elektrik hattının uzunluğunu l ile gösterelim. Elektrik hattının x koordinatlı noktada zamanın t anındaki akımın gücünün değerini $i = i(x,t)$ ile, geriliminin değerini ise $v = v(x,t)$ ile gösterelim. i ve v fonksiyonlarının değerleri birer birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem şeklindedir. Bu denklemleri yazabilmek için elektrik hattının C sığayı (kapasitans), R aktif direnci, L kendi kendisinin indüksiyonu (kendi kendini etkilemesiyle oluşan indüksiyon akımı) ve elektrik hattından dışarıya sızan G sızıntısının sabit olduklarını ve C, R, L ve G karakteristiklerinin (parametrelerinin) elektrik hattının birim uzunluklarına göre hesaplandıklarını varsayalım.

Elektrik hattının $x = x_1$ ve $x = x_2$ koordinatlı noktaları arasında kalan kısmını $(x_1 < x_2)$ ele alalım. Elektrik hattının bu kısmına Ohm kanunu uygulayarak aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = R\int_{x_1}^{x_2} i(x,t)dx + L\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}dx \qquad (8.1)$$

Ama diğer yandan,

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx$$

olduğundan aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right) dx = 0$$

Burada x_1 ve x_2 noktaları keyfi noktalar olduğundan,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \tag{8.2}$$

denklemini buluruz.

Ele aldığımız elektrik hattının (x_1, x_2) kısmından birim zaman aralığında geçen elektrik miktarı,

$$i(x_1, t) - i(x_2 t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i}{\partial x} dx$$

(x_1, x_2) kısmının yüklenmesi için gereken elektrik miktarı ile bu kısmın kötü izole edilmesinden kaynaklanarak kayıp olan elektrik miktarının toplamına, yani

$$C\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t} dx + G\int_{x_1}^{x_2} v dx$$

toplamına eşit olur.

Böylece,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv\right) dx = 0$$

eşitliği yazılabilir.

Buradan x_1 ve x_2 noktaları keyfi alındığından,

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0 \tag{8.3}$$

denklemini elde ederiz.

Burada bulduğumuz $(8.2) - (8.3)$ denklemler sistemine telgraf denklemler sistemi denir.

Şimdi burada $v(x,t)$ ve $i(x,t)$ fonksiyonlarının bulunması için bir denklem bulalım.

8.2. Telgraf Denklemi

Burada $v(x,t)$ fonksiyonunu bulmak için bir denklem bulmak amacıyla (8.2) denklemini x değişkenine göre, ve uygun olarak (8.3) denklemini ise t değişkenine göre diferansiyelleyelim. Bulduğumuz bu denklemlerden $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ ifadesini yok ederek sonuçta v fonksiyonu için aşağıdaki,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv \tag{8.4}$$

denklemini elde ederiz.

Benzer şekilde $i(x,t)$ fonksiyonu için,

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi \tag{8.5}$$

eşitliği yazılabilir.

(8.4) ve (8.5) denklemlerine telgraf denklemi denir. Bu denklemlerde $G \approx R \approx 0$ olduğunu yani elektrik hattında sızıntının çok çok küçük olduğunu ve direncin hemen hemen olmadığını varsayarsak $(G = R = 0)$ o zaman v ve i fonksiyonlarının bulunması için (8.4) ve (8.5) denklemlerinden uygun olarak aşağıdaki titreşim denklemlerini buluruz:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ , \qquad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right) \tag{8.4'}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \tag{8.5'}$$

Böylece $(8.4) - (8.5)$ ve $(8.4')$- $(8.5')$ denklemlerinden görüyoruz ki, gerilim fonksiyonu v ve akım şiddeti fonksiyonu i aynı,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w \tag{8.6}$$

denklemini sağlar.

Burada,

$$a_0 = LC \ , \qquad 2b_0 = RC + GL \ , \qquad c_0 = GR \tag{8.7}$$

dir.

(8.6) denklemine telgraf denklemi denir[9].

Telgraf denkleminde,

$$w = e^{-\frac{b_0}{a_0}} u(x,t) \tag{8.8}$$

dönüşümü yaptığımızda (8.6) denklemi $u(x,t)$ fonksiyonuna göre daha sade hale getirilmiş olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u \tag{8.9}$$

Burada,

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ , \qquad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0} \tag{8.10}$$

dır.

8.3. Telgraf Denkleminin Riemann Metodu İle Çözümü

Riemann metodunun uygulanmasıyla (8.9) denkleminin,

$$u|_{t=0} = f(x) \, , \qquad u_t|_{t=0} = F(x) \tag{8.11}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Bu amaçla ilk önce (8.9) denklemini yeni,

$$\xi = \frac{b}{a}(x + at) \ , \qquad \eta = \frac{b}{a}(x - at) \tag{8.12}$$

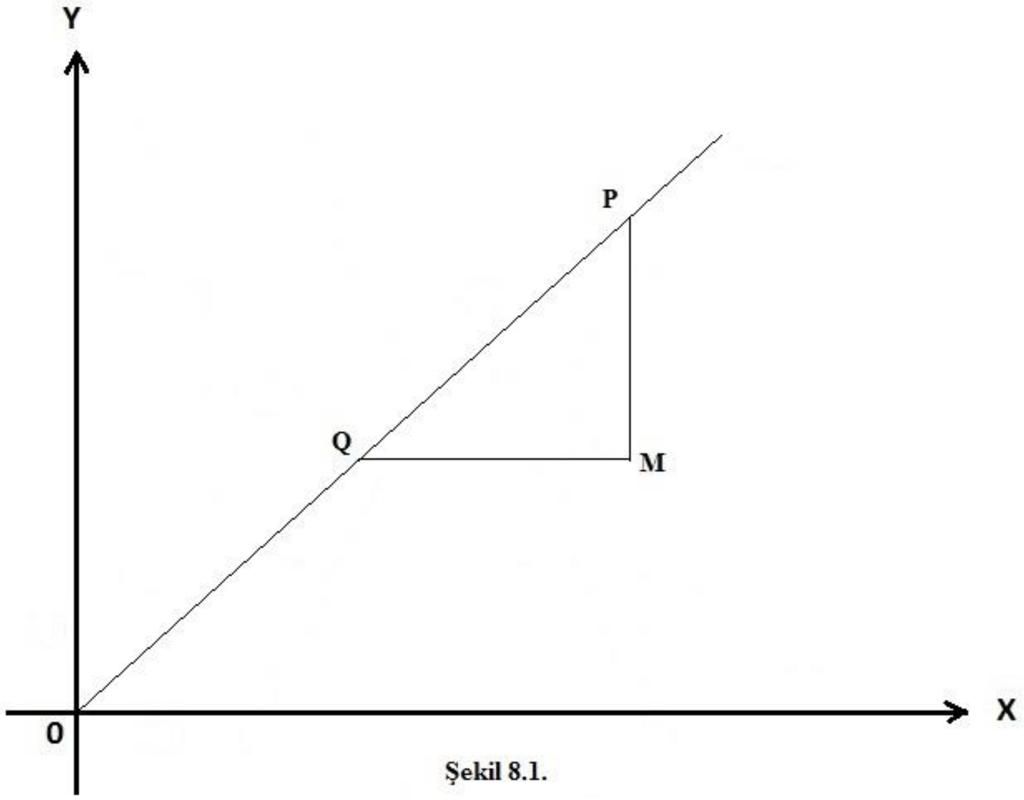
değişkenleri ile kanonik hale getirelim. (8.12) dönüşümlerine uygun olarak (8.9) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0 \tag{8.13}$$

Yeni değişkenlerde $t = 0$ doğrusu,

$$\xi = \eta \tag{8.14}$$

bissektrisasına (açıortay) dönüşür.



Şekil 8.1.

(8.12) formüllerinden,

$$x = \frac{a}{b}\frac{\xi + \eta}{2} \ , \qquad t = \frac{1}{b}\frac{\xi - \eta}{2}$$

eşitlikleri bulunur.

Bu eşitlikleri kullanarak,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}$$

eşitliği bulunur.

Bu eşitlikte (8.11) başlangıç şartını kullanarak,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\xi}=\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{b}F(x)=\frac{1}{b}F\left(\frac{a}{b}\xi\right) \tag{8.15}$$

ve

$$u|_{\eta=\xi}=f\left(\frac{a}{b}\xi\right) \tag{8.16}$$

eşitliğini elde ederiz.

4. Bölümde verilen Riemann formülünde $a=0,\ b=0$ ve $f=0$ alıp ve burada (8.14) bağlantısını göz önüne alarak aşağıdaki,

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{QP} v\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{QP} u\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)d\xi \tag{8.17}$$

eşitliği yazabiliriz.

Şimdi burada,

$$v=v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$$

Riemann fonksiyonunu bulalım.

$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ Riemann fonksiyonu eşlenik;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{4}v=0 \tag{8.18}$$

denkleminin çözümü olmalı ve MP ve MQ karakteristikleri üzerinde 1'e eşit olmalıdır.

(8.18) denkleminin çözümünü,

$$v = G\left(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right) = G(\lambda)$$

şeklinde arayalım. Burada,

$$\lambda = \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}$$

dır.

O zaman $G(\lambda)$ fonksiyonunun bulunması için,

$$G''(\lambda) + \frac{1}{\lambda}G'(\lambda) + G(\lambda) = 0 \qquad (8.19)$$

denklemi bulunur. Bu denklem sıfırıncı mertebeden Bessel denklemi olup bu denklemin bir özel çözümü sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonudur:

$$J_0(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2^2} + \frac{\lambda^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{\lambda^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \cdots \qquad (8.20)$$

Burada biz,

$$v = J_0(\lambda)$$

aldığımızda (8.18) denkleminin $\xi = \xi_0$ ve $\eta = \eta_0$ karakteristikleri üzerinde 1'e eşit olan çözümünü bulmuş oluruz (burada $\xi = \xi_0$ ve $\eta = \eta_0$ olduğunda $\lambda = 0$ ve $J_0(0) = 1$ olur).

Böylece Riemann fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunmuş olur:

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = J_0\left(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right) \qquad (8.21)$$

Bu (8.21) eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}|_{\eta=\xi} = \frac{dJ_0}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}|_{\eta=\xi} = \frac{1}{2}\frac{\xi - \eta_0}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}}J_0'(\lambda)|_{\eta=\xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=\xi} = \frac{dJ_0}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}|_{\eta=\xi} = \frac{1}{2}\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}}J_0'(\lambda)|_{\eta=\xi}$$

Bu sonuncu bulduğumuz eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=\xi}=\frac{\xi_0-\eta_0}{2\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}J_0'(\lambda)|_{\eta=\xi} \tag{8.22}$$

Sonra ise,

$$u(P)=f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right)\ ,\qquad u(Q)=f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)$$

olduğunda dikkate alarak (8.15), (8.16) ve (8.22) değerlerini de (8.17) formülünde uygun olarak yerlerine yazarak $u(\xi_0,\eta_0)$ çözümü için,

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right)+f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)}{2}$$

$$+\frac{1}{2b}\int_{\eta_0}^{\xi_0}J_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right)F\left(\frac{a}{b}\xi\right)d\xi$$

$$-\frac{\xi_0-\eta_0}{4}\int_{\eta_0}^{\xi_0}f\left(\frac{a}{b}\xi\right)\frac{J_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right)}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}d\xi$$

eşitliğini elde ederiz.

Sıfır indisini atıp x ve t değişkenlerine dönerek ve yeni $z=\frac{a}{b}\xi$ integralleme değişkeni dahil ederek aranan $u(x,t)$ çözümü için aşağıdaki formülü buluruz:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\phi(x,t,z)dz \tag{8.23}$$

Burada,

$$\phi(x,t,z)=\frac{1}{a}F(z)J_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}\right)++btf(z)\frac{J_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}} \tag{8.24}$$

dir.

8.4. Riemann Metodu İle İlgili Örnekler

Örnek 8.1.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (8.25)$$

denkleminin

$$u|_{y=1} = f(x)\ ,\ \ u_y|_{y=1} = F(x) \qquad (8.26)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Çözüm: (8.25) denkleminde x ve y değişkenleri için

$$\xi = xy\ \ ,\ \ \eta = \frac{y}{x} \qquad (8.27)$$

dönüşümlerini yaparak (8.25) denklemi,

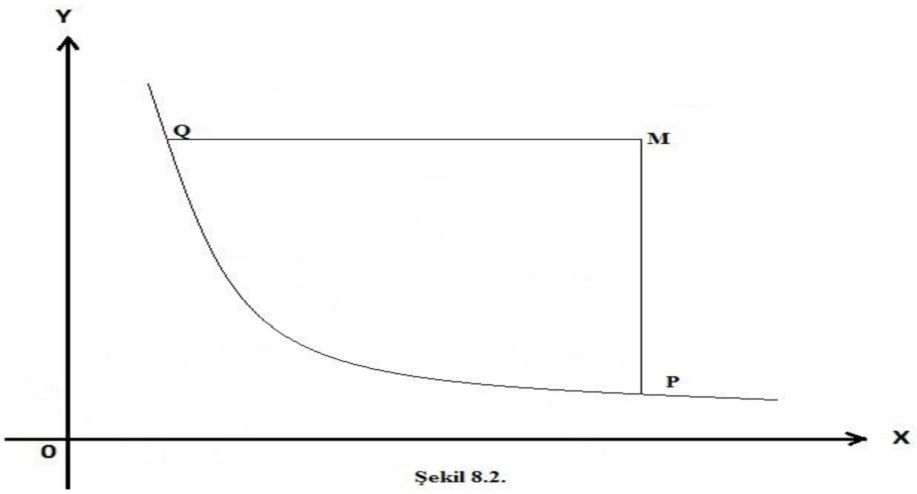
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \qquad (8.28)$$

şeklinde kanonik hale getirilir.

(8.27) dönüşümünde $y = 1$ doğrusu eşit yanlı hiperboliğe dönüşmüş olur.

$$\xi\eta = 1 \qquad (8.29)$$

yazılabilir.



Şekil 8.2.

(8.27) eşitliklerinden,

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \quad , \quad y = \sqrt{\xi\eta} \tag{8.30}$$

eşitlikleri bulunur.

(8.30) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki hesaplamaları yapabiliriz:

$$u_\xi|_{\xi\eta=1} \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2\xi} u_y|_{\xi\eta=1}$$

$$u_\eta|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2} u_x + \frac{\xi}{2} u_y|_{\xi\eta=1}$$

Böylece (8.26) şartlarını da kullanarak,

$$u_\xi|_{\xi\eta=1} \frac{1}{2} f'(\xi) + \frac{1}{2\xi} F(\xi) \tag{8.31}$$

$$u_\eta|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2} f'(\xi) + \frac{\xi}{2} F(\xi) \tag{8.32}$$

ve

$$u|_{\xi\eta=1} = f(\xi) \tag{8.33}$$

olur. Riemann formülünde,

$$a = 0 \quad , \qquad b = -\frac{1}{2\xi} \quad , \quad f = 0$$

alarak çözüm için aşağıdaki Riemann formülünü elde ederiz:

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{QP} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{uv}{\xi} \right) d\xi - \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta$$

(8.34)

Şimdi $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ Riemann fonksiyonunu inşa edelim. Bu durumda Riemann fonksiyonu,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}=0 \tag{8.35}$$

denkleminin çözümü olmalı ve karakteristikler üzerinde aşağıdaki,

MQ karakteristiği üzerinde,

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=e^{\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{2\xi}}=\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \tag{8.36}$$

ve

MP karakteristiği üzerinde ise,

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=e^{\int_{\eta_0}^{\eta}0d\eta}=1 \tag{8.37}$$

şartlarını sağlamalıdır.

Riemann fonksiyonunun,

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \tag{8.38}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Gerçekten, (8.38) fonksiyonu (8.35) denklemini sağlar. (8.38) fonksiyonu (8.36) ve (8.37) şartlarını da sağlar.

Böylece, Riemann fonksiyonu (8.38) eşitliği ile bulunmuş olur.

(8.31), (8.32) ve (8.33) eşitliklerini ve (8.38) eşitliğini (8.34) formülünde yerlerine yazarak ve,

$$u(P)=f(\xi_0)$$

$$u(Q)=f\left(\frac{1}{\eta_0}\right)$$

$$v(P)=v\left(\xi_0,\frac{1}{\xi_0};\xi_0,\eta_0\right)=1$$

$$v(Q) = v\left(\frac{1}{\eta_0}, \eta_0; \xi_0, \eta_0\right) = \sqrt{\xi_0 \eta_0}$$

eşitliklerini de dikkate alarak,

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{f(\xi_0)}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0 \eta_0}}{2} f\left(\frac{1}{\eta_0}\right) + \frac{\sqrt{\xi_0}}{4} \int_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}} \frac{f(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi - \frac{\sqrt{\xi_0}}{2} \int_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}} \frac{F(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte eski x ve y değişkenlerine dönerek verilmiş $(1) - (2)$ Cauchy probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{y}{2} f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{f(z)}{z^{\frac{3}{2}}} dz - \frac{\sqrt{xy}}{2} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{F(z)}{z^{\frac{3}{2}}} dz \quad (8.39)$$

Örnek 8.2.

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.40)$$

denkleminin

$$u|_{y=0} = f(x) \ , \ u_y|_{y=0} = F(x) \quad (8.41)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Çözüm: $(8.40) - (8.41)$ problemini Riemann metodu ile çözmek için (8.40) denklemini kanonik şekle getirelim. Bu amaçla (8.40) denkleminin karakteristik denklemini yazalım:

$$x dy^2 - dx^2 = 0 \quad (8.42)$$

Bu karakteristik denklemin iki farklı integrali vardır:

$$\frac{y}{2} + \sqrt{x} = c_1 \ , \ \frac{y}{2} - \sqrt{x} = c_2 \quad (8.43)$$

Böylece yeni ξ ve η değişkenlerini aşağıdaki eşitliklerle dahil etmemiz gerekir:

$$\xi = \frac{y}{2} + \sqrt{x} \quad , \quad \eta = \frac{y}{2} - \sqrt{x} \tag{8.44}$$

Aşağıdaki eşitlikle yeni aranan $w(\xi,\eta)$ fonksiyonunu dahil edelim:

$$w = u\sqrt{\xi - \eta} \tag{8.45}$$

(8.44) ve (8.45) dönüşümleri ile (8.40) denklemi aşağıdaki şekilde denkleme dönüşür:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{4}\frac{w}{(\xi-\eta)^2} = 0 \tag{8.46}$$

Şimdi (8.41) şartlarını ve (8.44) formüllerini ele alalım. Bu eşitliklerden görüyoruz ki, AB eğrisi olarak Riemann metodunda,

$$\eta = -\xi \tag{8.47}$$

bissektrisini elde etmemiz gerekir.

Ele aldığımız problemi çözmek için Riemann metoduna dayanarak eşlenik,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{4}\frac{v}{(\xi-\eta)^2} = 0 \tag{8.48}$$

denkleminin,

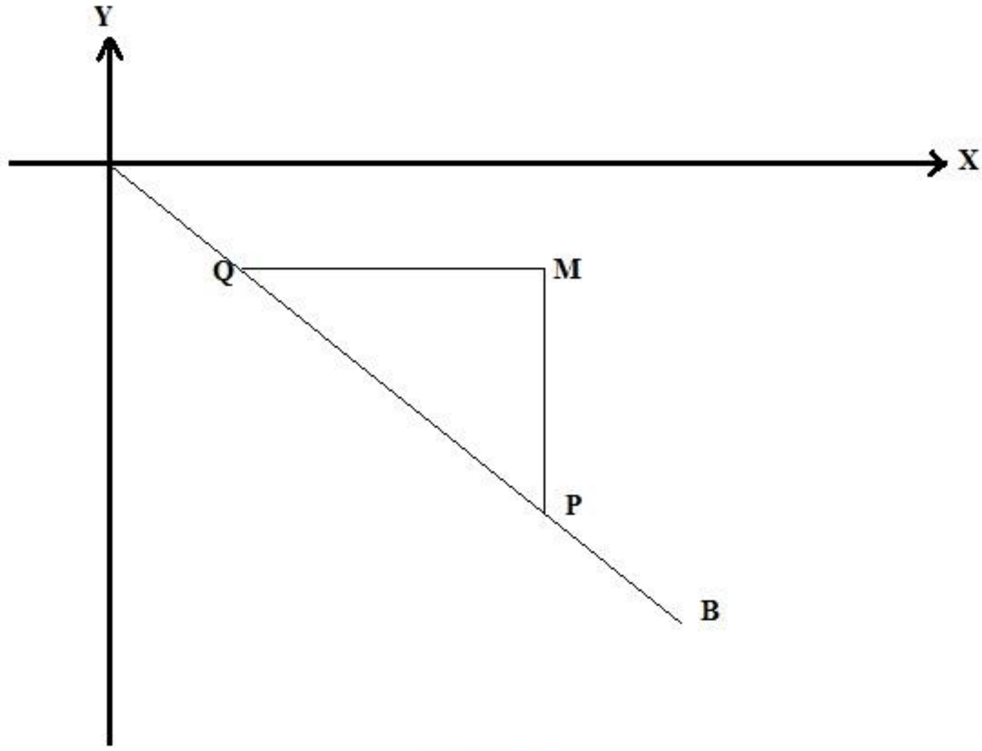
MP karakteristiği üzerinde,

$$v(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = 1 \tag{8.49}$$

MQ karakteristiği üzerinde,

$$v(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = 1 \tag{8.50}$$

şartlarını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir.



Şekil 8.3.

(8.48) eşlenik denkleminin çözümünü,

$$v = G(\sigma) \tag{8.51}$$

şeklinde arayalım.

Burada,

$$\sigma = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi_0 - \eta_0)(\xi - \eta)} \tag{8.52}$$

dır.

Aranan $G(\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sigma(1-\sigma)G''(\sigma) + (1-2\sigma)G'(\sigma) - \frac{1}{4}G(\sigma) = 0 \tag{8.53}$$

Bu denklem aşağıdaki hipergeometrik Gauss denklemi olarak isimlendirilen,

$$\sigma(1-\sigma)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)\sigma]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{8.54}$$

denkleminin

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \;\;,\;\; \gamma = 1$$

olacak şekilde özel bir halidir.

(8.54) Gauss denkleminin aşağıdaki hipergeometrik seri şeklinde özel bir çözümü vardır:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\sigma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}\sigma + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}\sigma^2 + \cdots \tag{8.55}$$

Bu çözüm $|\sigma| < 1$ bölgesinde mutlak yakınsaktır.

(8.55) çözümünde $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$ aldığımızda,

$$v = G(\sigma) = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\sigma\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sigma + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sigma^2 + \cdots \tag{8.56}$$

elde ederiz.

Bu çözüm (8.46) denklemi (8.49), (8.50) şartlarını ((8.52) eşitliğinin sağlanmasıyla) sağlar.

Böylece,

$$v = G\left(\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}\right) \tag{8.57}$$

fonksiyonu aranan Riemann fonksiyonudur.

Şimdi (8.40) denkleminin (8.41) şartlarındaki çözümünü bulmak için Riemann formülünde,

$$a = b = 0 \;\;,\;\; f = 0$$

alalım.

O zaman,

$$w(\xi_0, \eta_0) = \frac{w(P) + w(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{QP} \left(v \frac{\partial w}{\partial \xi} - w \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi - \left(v \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta$$

eşitliğini elde ederiz. Burada v fonksiyonu (8.57) eşitliği ile tanımlanan fonksiyondur. Burada (8.47) eşitliğini dikkate alırsak w fonksiyonu için aşağıdaki,

$$w(\xi_0, \eta_0) = \frac{w(P) + w(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0} \left(v \frac{\partial w}{\partial \xi} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) d\xi - \frac{1}{2} \int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0} \left(w \frac{\partial v}{\partial \xi} + w \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi$$

(8.58)

eşitliğini yazabiliriz.

Burada (8.58) formülündeki türevleri hesaplayalım.

Aşağıdaki,

$$x = \frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 \quad , \quad y = \xi + \eta$$

formüllerini kullanarak,

$$u_\xi|_{\eta=-\xi} = \xi u_x + u_y|_{y=0}$$

$$u_\eta|_{\eta=-\xi} = -\xi u_x + u_y|_{y=0}$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece (8.41) şartlarını kullanarak,

$$u_\xi + u_\eta|_{\eta=-\xi} = 2u_y|_{y=0} = 2F(\xi^2) \qquad (8.59)$$

(8.45) eşitliğinin her iki tarafını ξ ve η değişkenlerine göre diferansiyelleyerek ve sonra elde edilmiş eşitliklerde $\eta = -\xi$ alarak aşağıdaki,

$$w_\xi|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{2\sqrt{2\xi}}$$

$$w_\eta|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2\sqrt{2\xi}}$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan (8.59) eşitliğinin kullanılmasıyla,

$$w_\xi + w_\eta|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi}\left(u_\xi + u_\eta\right)|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi}F(\xi^2) \tag{8.60}$$

bulunur.

Sonra ise aşağıdaki,

$$v_\xi|_{\eta=-\xi} = G_\sigma \sigma_\xi|_{\eta=-\xi} = -\frac{1}{4}\frac{(\xi+\eta_0)(\xi+\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}G_\sigma|_{\eta=\xi}$$

$$v_\eta|_{\eta=-\xi} = G_\sigma \sigma_\eta|_{\eta=-\xi} = \frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta_0)(\xi-\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}G_\sigma|_{\eta=-\xi}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$v_\xi + v_\eta|_{\eta=-\xi} = -\frac{\xi_0+\eta_0}{2(\xi_0-\eta_0)\xi}G_\sigma|_{\eta=-\xi} \tag{8.61}$$

(8.58) eşitliğini kullanabilmemiz için w fonksiyonunun $\eta = -\xi$ bissektrisası üzerindeki değerini ve P, Q noktalarındaki değerlerini hesaplamamız gerekir.

Dolayısıyla,

$$w|_{\eta=-\xi} = w(\xi, -\xi) = \sqrt{2\xi}$$

$$u(x, 0) = \sqrt{2\xi}f(\xi^2)$$

eşitlikleri bulunur.

Buradan,

$$\begin{cases} w(P) = w(\xi_0, -\xi_0) = \sqrt{2\xi_0} f(\xi_0^2) \\ w(Q) = w(-\eta_0, \eta_0) = \sqrt{-2\eta_0} f(\eta_0^2) \end{cases} \tag{8.62}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Burada,

$$u(x_0, y_0) = \frac{w(\xi_0, \eta_0)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{x_0}}$$

eşitliğini kullanarak (8.58), (8.60), (8.62) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$u(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{\xi_0} f(\xi_0^2) + \sqrt{-\eta_0} f(\eta_0^2)}{2\sqrt[4]{x_0}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} G\left(\frac{(\xi_0 - \xi)(\xi + \eta_0)}{2\xi(\xi_0 - \eta_0)}\right) F(\xi^2)\sqrt{\xi}\, d\xi$$

$$+ \frac{\xi_0 + \eta_0}{4(\xi_0 - \eta_0)\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} G_\sigma|_{\eta=-\xi} f(\xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

Şimdi bu sonuncu eşitlikte x ve y değişkenlerine dönersek ve bu değişkenlerde olan sıfır indislerini atarsak ele aldığımız Cauchy probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde bulmuş oluruz:

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \frac{y}{2}}\, f\left(x + \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right) + \sqrt{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}\, f\left(x - \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{x}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \int_{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}^{\sqrt{x} + \frac{y}{2}} \phi(x, y, z) dz$$

SONUÇ

Bu tezde ikinci mertebeden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin karakteristikler metodu ile çözüm yöntemi anlatılmıştır. İkinci mertebeden hiperbolik lineer diferansiyel denklemler için Riemann metodu açıklanmıştır. Ayrıca Riemann metodunun temelini oluşturan Riemann fonksiyonu tanımlanmış ve bazı örneklerle Riemann fonksiyonunun inşası açıklanarak söz konusu Riemann fonksiyonunun belirttiği fiziksel anlam açık şekilde ifade edilmiştir. Bunlara ek olarak Riemann metodunun, elektrik hatlarındaki titreşimlerin incelenmesinde de kullanıldığı belirtilmiştir. Telgraf denkleminin Riemann metodu ile çözümü de burada örnek olarak sunulmuştur. Bunların yanı sıra Cauchy ve Goursat problemleri eşdeğer Volterra integral denklemler sisteminin çözümüne getirilerek bu problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği ardışık yaklaşımlar metodu ile ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Mamedov, R., Caferov, G., Riyazi Fizika Denklemleri, Maarif Neşriyat, Bakü, 1971.
2. Duffy, D.G. (1956) Partial Differential Equations, Chapman and Hall, Toronto, pp. 78-226.
3. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1964) Partial Differential Equations of Mathematical Physics, vol. 1, San Francisco, pp. 100-250.
4. Sobolev, S.L., Uravneniya Matematiçeskoy Fiziki, izd. ''Nauka'', Moskova, 1966.
5. Koşlyakov, N.S., Uravneniya Çastnıh Proizvodnix Matematiçeskoy Fiziki, ''Vısşaya Şkola'', Moskova, 1970.
6. Duffy, D.G. (2001) Green's Functions with Applications, Chapman and Hall, New York, pp. 1-59.
7. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1963) Equations of Mathematical Physics, Dover Publications, New York, pp. 1-75.
8. Çağlıyan, M., Çelebi, O., Kısmi Diferansiyel Denklemler, Dora Basım, Bursa, 2010.
9. Rubinstein, Z., A Course in Ordinary and Partial Differantial Equations, Academic Press, New York and London, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Yozgat'ta doğan Buğra BAĞCI, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Müzeyyen Çokdeğerli İlköğretim Okulu ve Yozgat Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2006 yılında kazandığı Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir.

2012 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Riemann Metodu" başlıklı teziyle 2014 yılında mezun olmuştur.

İletişim Bilgileri

Adres : Karatepe mah. Susam Sitesi Kat:1 No:8

66100 YOZGAT

Telefon: (507) 448 27 29

E-posta: bugra_bagci66@hotmail.com