T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

PARAMETRELİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Yusuf KARACAİLHAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2013

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

PARAMETRELİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Yusuf KARACAİLHAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2013

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111310005 numaralı öğrencisi Yusuf KARACAİLHAN'in hazırladığı **" Parametreli Lineer Diferansiyel Operatörlerin Green Fonksiyonunun İnşası Üzerine"** başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 28/05/2013 Salı günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ……/……/20…...tarih ve ……. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....../....../20......

Enstitü Müdürü
(Ünvanı, Adı Soyadı)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

PARAMETRELİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Yusuf KARACAİLHAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2013; Sayfa:150

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşası problemleri ele alındı, incelendi ve öğrenildi. Lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun genel ve özel tanımları verildi. Green fonksiyonunun özel tanımı esasında inşa yöntemi verildi ve örneklerle gösterildi. Özellikle not edelim ki parametre bulunduran lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun özel tanımı esasında inşa formülleri de verildi. Green fonksiyonunun kullanımı ile parametre bulunduran sınır değer problemlerinin integral denklemlere getirilmesi yöntemi gösterildi. İntegral denklemlerin çözüm metodunun uygulanması ile parametre bulunduran lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonlarının varlığı sonucu alındı. Parametre bulunduran diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa formülleri gösterildi.

$\delta-$fonksiyonunun uygulanması ile diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi verildi ve örneklerle gösterildi. Parametre bulunduran lineer diferansiyel operatörlerin analitik doğası incelendi ve kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisindeki rezidü formüllerinin uygulanması ile parametre bulunduran diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Green Fonksiyonu, $\delta-$Fonksiyonu, Lineer Diferansiyel Operatör, Parametre Bulunduran Lineer Diferansiyel Operatör, İntegral Denklemler

GREEN FUNCTIONS CONSTRUCTION OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS CONTAINING PARAMETER

Yusuf KARACAİLHAN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2013; Page:150

Thesis Advisor: Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, we studied the Green's function constructions of the linear differential operators. We gave the construction method in the contend of the special definition of the Green's functions. We explained it by examples. We used the Green's functions to derive integral equations from parameterized boundary value problems. We showed the existence of the Green's functions of the parameterized linear differential operators by solving integral equations. We derived the Green's function construction formulas for the parameterized differential operators.

We showed the Green's function construction methods of linear differential operators using the $\delta-$function. We examined the analytic nature of the parameterized linear differential operators. We showed the Green's function construction of the parameterized differential operators through the residue formulas of functions of complex variables.

Keywords: Green Function, $\delta-$Function, Linear Differential Operator, Linear Differential Operator Containing Parameter, Integral Equations

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e, bölüm başkanımız Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e, hocalarım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU ve Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN'a, sonsuz teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\Delta(\lambda)$	: λ Parametresine Bağlı Analitik Fonksiyon
$H(x,\xi,\lambda)$	: λ ve ξ Parametresine Bağlı Analitik Fonksiyon
D(F)	: F Operatörünün Tanım Bölgesi
R(F)	: F Operatörünün Değer Bölgesi
$[a,b]$	: Kapalı Reel Sayı Aralığı
$C_{[a,b]}$	: [a,b] Aralığında Tanımlanmış Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$C^n_{[a,b]}$	: [a,b] Aralığında Tanımlanmış n.Mertebeden Diferansiyellenebilen Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$\ell(y)$	: Lineer Diferansiyel İfade
$\ell^*(y)$	: Lineer Diferansiyel İfadenin Eşleniği
$U_\upsilon(y)=0$	: Homojen Lineer Sınır Şartları
Σ	: Toplam Sembolü
detU	: U Matrisinin Determinantı
L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: Lineer Operatörün Tersi Olan Operatör
$\overline{z(x)}$	: $z(x)$ Fonksiyonunun Kompleks Eşleniği
L^*	: L Operatörünün Eşlenik Operatörü
$G(x,\xi)$	: Green Fonksiyonu
$y^{(n)}(x)$	: $y(x)$ Fonksiyonunun x'e Göre n. Mertebeden Türevi
$G(x,\xi,\lambda)$	: λ Parametresine Bağlı Green Fonksiyonu
Sin	: Sinüs Fonksiyonu
Cos	: Kosinüs Fonksiyonu
Sh	: Hiperbolik Sinüs Fonksiyonu
Ch	: Hiperbolik Kosinüs Fonksiyonu
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	: x e Göre Kısmi Türev Operatörü
$\{\delta_n(x)\}$	: Fonksiyonel Dizi
$\delta(x-x_0)$	: Delta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Lineer diferansiyel denklemler teorisinde lineer diferansiyel denklemlerle bağlı sınır değer probleminin çözümünde ve lineer sistemlerin kontrolü teorisinde Green fonksiyonu metodu çok geniş uygulanmaktadır [1-12].

Green fonksiyonu metodunun önemini göstermek için burada diferansiyel denklemler teorisinde sık sık rastlanan lineer

$$\ell(y) = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x) \tag{1.1}$$

diferansiyel denkleminin $\alpha_0^{\upsilon}, \alpha_1^{\upsilon}, \ldots \alpha_{n-1}^{\upsilon}$ ve $\beta_0^{\upsilon}, \beta_1^{\upsilon}, \ldots, \beta_{n-1}^{\upsilon}$ verilmiş katsayıları ve $y_a^{(k)} = y^{(k)}(a),\ y_b^{(k)} = y^{(k)}(b)$ noktasındaki değerleri olmak üzere

$$U_{\upsilon}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{\upsilon} y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{\upsilon} y_b^{(k)} = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, m \leq n \tag{1.2}$$

homojen sınır şartlarını sağlayan problemi kısaca

$$Ly = f \tag{1.3}$$

operatör denklemi şeklinde yazalım [5].

L operatörünün veya $(1.1)-(1.2)$ probleminin Green fonksiyonu $G(x,\xi)$ aşağıdaki

$$Ly = \delta(x-\xi) \tag{1.4}$$

operatör denkleminin veya

$$\ell(y) = \delta(x-\xi),$$

$$U_{\upsilon}(y) = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, m \leq n \tag{1.5}$$

sınır değer probleminin çözümüne denir [5].

Burada $f(x)$ fonksiyonu yerine aldığımız $\delta(x-\xi)$ fonksiyonu $\delta-$fonksiyonudur [9-10]. $f(x)$ fonksiyonu $a \le x \le b$ aralığında sürekli fonksiyon olduğunda

$$f(x)=\int_a^b f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \tag{1.6}$$

eşitliği sağlanır. Matematikte (1.6) eşitliği $\delta-$fonksiyonunun tanımı olarak alınır [9]. L operatörünün Green fonksiyonu $G(x,\xi)$ belli olduğunda $(1.1)-(1.2)$ probleminin veya (1.3) operatör denkleminin çözümü

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \equiv L^{-1}f \tag{1.7}$$

formülü ile bulunur. (1.7) eşitliği aynı zamanda L^{-1} ters operatörünün tanımıdır [5].

Biz bu çalışmada lineer diferansiyel operatörün diferansiyel denklemler teorisinde verilen özel tanımını verdik [1-9]. Ve bu tanım esasında L diferansiyel operatörünün ve $L-\lambda I$ diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunun inşasını gösterdik [1-9].

Diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun kullanılması ile diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin uygun integral denkleme getirilmesi yöntemi gösterildi [1-8]. İntegral denklemlerin çözümünün inşası bu integral denklemin rezolventinin inşasının yardımı ile verilir [13]. Rezolventin inşası ise integral denklemin çekirdeğinin yardımı ile bulunur. Buradaki integral denklemin çekirdeği ele aldığımız fonksiyonun (1.1)–(1.2) tipli sınır değer probleminin Green fonksiyonu ile çakışır [13].

$\delta-$fonksiyonunun tam ortonormal sistem üzere Fourier serisine açılımının kullanılması ile L ve $L-\lambda I$ diferansiyel operatörlerinin Green fonksiyonunun inşası yöntemi gösterildi [1-9].

Parametreye bağlı $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonunun analitik doğası dikkate alındı [1-8] ve kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde rezidü formüllerinin kullanılması ile parametreye bağlı diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi gösterildi [1-8].

Bu tezde gösterilmiş teorem ve sonuçlar esasen [1-9] kaynaklarından alınıp incelenmiştir.

Bu tezde kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin teoremleri ve sonuçları [14-16] kaynaklarından alınmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Diferansiyel Operatörler, Esas Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Lineer Uzayın ve Lineer Operatörün Genel Tanımı

Tanım 2.1.1.1

$x, y, z, \ldots$ elemanlarının E kümesinde aşağıdaki iki işlemin tanımlandığını varsayalım:

I. Her bir iki $x, y \in E$ elemanlarına karşılık olarak bu elemanların toplamı olarak adlandırılan tamamen belirli $x + y \in E$ elemanı karşı getirilir.

II. Her bir $x \in E$ elemanına ve her bir λ skaler sayısına karşılık olarak bu skaler λ sayısının x elemanı ile çarpımı olarak adlandırılan tamamen belli $\lambda \cdot x \in E$ elemanı karşı getirilir.

E kümesinde elemanların burada tanımlanan toplamı ve elemanların skaler sayıyla çarpımı işlemlerinin aşağıdaki özellikleri(aksiyomları) her bir $x, y, z \in E$ elemanları ve her bir λ, μ skalerleri için sağlandığını var sayalım:

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) Öyle "sıfır" elemanı olarak adlandırılan $0 \in E$ elemanı bulunur ki, $x + 0 = x$ eşitliği sağlanır.

4) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$

5) $1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0$ (soldaki 0 skaler sayıdır ama sağdaki 0 ise E kümesinin sıfır elemanıdır.)

6) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

7) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$

$x, y, z, \ldots$ elemanlarının E kümesinde elemanların toplamı ve skaler sayıyla çarpımı işlemleri bu yedi özelliği sağladığında E kümesine *lineer uzay* denir.

Burada sayısal çarpanlar olarak ya reel sayılar yada kompleks sayılar alınır. $\lambda, \mu, \gamma, \ldots$ sayıları reel sayılar alındığında lineer uzay *reel lineer uzay*, ama λ, μ, γ sayıları kompleks sayılar olarak alındığında lineer uzay *kompleks lineer uzay* olarak adlandırılır.

Her bir lineer E uzayında her bir $x \in E$ elemanı için $(-1)\cdot x=-x$ eşitliği ile x elemanının tersi "–x" elemanı olarak tanımlanır ve böylece keyfi alınmış $x, y \in E$ elemanlarının $x-y$ farkı işlemi tanımlanır.

x ve –x elemanları için $x-x=(1)\cdot x+(-1)\cdot x=(1-1)\cdot x=0\cdot x=0$ eşitliği sağlanır. $x-y$ farkı $x-y=x+(-1)\cdot y$ eşitliği ile tanımlanır.

Burada lineer uzayın sıfır elemanının tek olduğu kolaylıkla gösterilir. Şimdi lineer uzaylara örnekler gösterelim.

Örnek 2.1.1.1

Derecesi n doğal sayısını aşmayan tüm $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n$ şekilli polinomların $\mathcal{P}_n$ kümesini ele alalım. Burada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ keyfi alınmış reel sayılardır ve $t \in (-\infty,+\infty)$ olsun. Polinomun reel sayı ile çarpımı ve iki polinomun toplamı polinom olduğundan ve bu işlemlerde polinomların derecesi artmadığından biz polinomların lineer $\mathcal{P}_n$ uzayını almış oluruz.

Örnek 2.1.1.2

[a,b] aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli olan tüm $x(t), y(t), z(t), \ldots$ fonksiyonlarının kümesini $C_{[a,b]}$ ile gösterelim. $x(t)+y(t)$ toplamı [a,b] kapalı aralığında sürekli fonksiyonların toplamı gibi [a,b] aralığında süreklidir. $\lambda\cdot x(t)$ çarpımı da [a,b] aralığında süreklidir. Bu yüzden de $C_{[a,b]}$ kümesi lineer uzaydır.

Örnek 2.1.1.3

k doğal sayı olmak üzere, [a,b] aralığında tanımlanmış k kez sürekli diferansiyellenebilen $x(t), y(t), z(t), \ldots$ fonksiyonlarının hepsinin kümesini $C^k_{[a,b]}$ ile gösterelim. Burada $x(t) \in C^k_{[a,b]}$ olduğunda $\lambda \cdot x(t) \in C^k_{[a,b]}$ olduğundan ve $x(t), y(t) \in C^k_{[a,b]}$ için $x(t) + y(t) \in C^k_{[a,b]}$ olduğundan $C^k_{[a,b]}$ lineer uzaydır.

Lineer uzaylarda elemanların *lineer bağımlılığı* ve *lineer bağımsızlığı* da esas anlamlardandır. Lineer E uzayından $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarını ve skaler $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sayılarını alalım. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$ şekilli her bir toplama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarının *lineer kombinasyonu* denir.

Tümü sıfıra eşit olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sayıları için $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliği sağlandığında $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanları *lineer bağımlıdır* denir. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliği yalnız ve yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ halinde sağlandığında $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanları *lineer bağımsızdır* denir.

Lineer E uzayında n tane lineer bağımsız eleman var olduğunda ve bu uzayda her bir $n+1$ tane eleman lineer bağımlı olduğunda lineer E uzayı *n-boyutludur* denir.

Tanım 2.1.1.2

n boyutlu lineer E uzayında n tane lineer bağımsız olan her bir vektörler sistemine bu uzayda *baz* denir.

Tanım 2.1.1.3

Lineer E uzayında her bir n doğal sayısı için bu uzayda n tane lineer bağımsız elemanlar sistemi bulunduğunda lineer E uzayına *sonsuz boyutlu lineer uzay* denir. Sonlu n sayısı için n–boyutlu lineer uzaylara *sonlu boyutlu lineer uzay* denir. $C_{[a,b]}$ ve $C^k_{[a,b]}$ uzayları sonsuz boyutlu lineer uzaylardır. Bu uzaylarda $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ fonksiyonlar dizisini ele alalım. Her bir n doğal sayısı için $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ sisteminin lineer bağımsız olduğu kolaylıkla gösterilir.

E lineer uzay $\tilde{E}$ ise lineer E uzayından alınmış bir alt küme olsun. Her bir $x, y \in \tilde{E}$ elemanları ve her bir α, β skaler sayıları için $\alpha.x + \beta.y \in \tilde{E}$ şartı sağlandığında $\tilde{E}$ kümesine lineer E uzayında *lineer manifold* veya *alt uzay* denir.

$C^k_{[a,b]}$, $k \geq 1$ uzayı $C_{[a,b]}$ uzayında lineer manifolddur. Gerçekten de, [a,b] aralığında k kez sürekli diferansiyellenen her bir fonksiyon [a,b] aralığında sürekli fonksiyon olur. $C^k_{[a,b]}$ lineer uzayından alınmış fonksiyonların lineer kombinasyonu da $C^k_{[a,b]}$ uzayının elemanı olur.

Şimdi biz burada önce operatörün genel tanımını verelim. Burada X ve Y kümelerinin keyfi alınmış kümeler olduklarını varsayalım. D ise X kümesinden alınmış bir alt küme olsun. Burada her bir $x \in D$ elemanına uygun olarak tek bir tane belirli $y \in Y$ elemanı karşı getirildiğinde D kümesinde bir $y = F(x)$ operatörü verilmiştir denir. D kümesine *F operatörünün tanım bölgesi* denir ve $D(F)$ şeklinde gösterilir. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$R = R(F) = \{ y \in Y : y = F(x),\ x \in D \}$$

kümesine *F operatörünün değerler bölgesi* denir. F operatörünün bu dönüştürme işlemini şematik olarak

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subseteq Y$$

gibi gösterebiliriz. Bunu ise kısaca

$$F : X \longrightarrow Y$$

gibi gösterebiliriz. Bu sonuncu yazıdan $D(F) = X$ veya $R(F) = Y$ eşitlikleri alınmıyor.

Bu tanımda özel halde $X \equiv Y$ de alınabilir.

Şimdi bize iki tane $F : X \longrightarrow Y$ ve $\Phi : X \longrightarrow Y$ operatörlerinin verildiğini varsayalım. Bu operatörler için

$$D(F) = D(\Phi) = D$$

ve her bir $x \in D$ için

$$\Phi(x) = F(x)$$

eşitlikleri sağlandığında F ve Φ operatörleri *eşittir* denir.

Ama $D(F) \subset D(\Phi)$ ve her bir $x \in D(F)$ için $\Phi(x) = F(x)$ şartları sağlandığında F operatörüne Φ operatörünün $D(F)$ kümesine *kısıtlanması*, Φ operatörüne ise F operatörünün $D(\Phi)$ kümesine *devamı* veya *genişlendirilmesi* denir.

Şimdi X ve Y kümelerinin her ikisinin de reel veya her ikisinin de kompleks lineer uzaylar olduklarını varsayalım.

Tanım 2.1.1.4

$A : X \longrightarrow Y$ operatörü için aşağıdaki şartlar sağlandığında, yani

1) $D(A) \subseteq X$ tanım bölgesi lineer manifolddur,

2) Her bir $x_1, x_2 \in D(A)$ elemanları ve her bir skaler λ_1, λ_2 sayıları için

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$$

şartları sağlandığında A operatörüne $D(A) \subseteq X$ kümesinde tanımlanmış *lineer operatördür* denir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.1.1.1

Her bir lineer operatörün değerler bölgesi lineer manifolddur.

İspat:

$y_1, y_2 \in R(A)$ ve λ_1, λ_2 skaler sayılar olduklarını varsayalım. $Ax_1 = y_1$ ve $Ax_2 = y_2$ eşitliklerini sağlayan $x_1, x_2 \in D(A)$ alalım. O zaman A operatörünün lineer olmasını kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Bu eşitlikten $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(A)$ elemanının $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ elemanına dönüştüğü görülür. Böylece, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in R(A)$ olur. Bununla da $R(A)$ bölgesinin lineer manifold olduğu ispatlandı. Bununla da teorem ispatlanmış olur.

Bizim burada ele alacağımız operatörler yalnız lineer operatörler olacaktır.

2.1.2. Lineer Diferansiyel İfade

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$\ell(y) = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y \tag{2.1}$$

ifadesine *lineer diferansiyel ifade* denir. Bu ifadedeki $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin *katsayıları* denir. Bu fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında tanımlanmış verilmiş fonksiyonlardır. Burada $\frac{1}{P_0(x)}, P_1(x), P_2(x)\ldots, P_n(x)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar oldukları varsayılır.

Diferansiyel ifade de $y(x)$ fonksiyonunun n mertebeden türevini gösteren n sayısına *diferansiyel ifadenin tertibi* veya *mertebesi* denir.

Dikkate alalım ki, her bir $y \in C^n_{[a,b]}$ için $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin tanımlanmış olduğu ve $\ell(y)$ ifadesinin her bir $y \in C^n_{[a,b]}$ değerlerinin $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olduğunu, yani her bir $y \in C^n_{[a,b]}$ için $\ell(y) \in C_{[a,b]}$ olduğu görülür. Böylece, $\ell(y)$ ifadesinin $C^n_{[a,b]}$ de tanımlanmış ve değerleri $C_{[a,b]}$ de olan bir lineer operatör olduğu görülür. Bu operatörü ilerde L_1 ile göstereceğiz.

2.1.3. Sınır Şartları

Burada biz $y(x)$ fonksiyonunun ve onun $n-1$ mertebeye kadar türevlerinin a ve b noktalarındaki değerlerini uygun olarak

$$y(a)=y_a,\, y'(a)=y'_a,\ldots, y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)}$$
$$y(b)=y_b,\, y'(b)=y'_b,\ldots, y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)} \tag{2.2}$$

gibi gösterelim. (2.2) eşitlikleri ile tanımladığımız

$$y_a, y'_a,\ldots, y^{(n-1)}{}_a, y_b, y'_b,\ldots, y^{(n-1)}{}_b$$

değişkenlerinin lineer kombinasyonunu (lineer formunu) $U(y)$ ile gösterelim. $U(y)$ lineer formunu

$$U(y)=\alpha_0 y_a+\alpha_1 y'_a+\ldots+\alpha_{n-1}y_a^{(n-1)}+\beta_0 y_b+\beta_1 y'_b+\ldots+\beta_{n-1}y_b^{(n-1)} \tag{2.3}$$

şeklinde yazalım. Burada $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ sayıları $U(y)$ lineer formunun katsayılarıdır. (2.3) şekilli $U(y)$ lineer formundan m tanesinin, yani $U_1(y),\ldots,U_m(y)$ lineer formlarının verildiğini varsayalım. Böylece,

$$U_\upsilon(y)=\alpha_0^\upsilon y_a+\alpha_1^\upsilon y'_a+\ldots+\alpha_{n-1}^\upsilon y_a^{(n-1)}+\beta_0^\upsilon y_b+\beta_1^\upsilon y'_b+\ldots+\beta_{n-1}^\upsilon y_b^{(n-1)},\ \upsilon=1,2,\ldots,m \tag{2.4}$$

lineer formlarının verildiğini varsayalım. Burada $\alpha_0^\upsilon,\alpha_1^\upsilon,\ldots,\alpha_{n-1}^\upsilon,\beta_0^\upsilon,\beta_1^\upsilon,\ldots,\beta_{n-1}^\upsilon$ sayıları uygun olarak $U_\upsilon(y)$ lineer formunun katsayılarıdır. (1.5) eşitlikleri ile verilen şartlara *sınır şartları* denir. (1.5) sınır şartları açık şekilde aşağıdaki eşitliklerle yazılır:

$$\begin{aligned}
&U_1(y)\equiv\alpha_0^1 y_a+\alpha_1^1 y'_a+\ldots+\alpha_{n-1}^1 y_a^{(n-1)}+\beta_0^1 y_b+\beta_1^1 y'_b+\ldots+\beta_{n-1}^1 y_b^{(n-1)}=0\\
&U_2(y)\equiv\alpha_0^2 y_a+\alpha_1^2 y'_a+\ldots+\alpha_{n-1}^2 y_a^{(n-1)}+\beta_0^2 y_b+\beta_1^2 y'_b+\ldots+\beta_{n-1}^2 y_b^{(n-1)}=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&U_m(y)\equiv\alpha_0^m y_a+\alpha_1^m y'_a+\ldots+\alpha_{n-1}^m y_a^{(n-1)}+\beta_0^m y_b+\beta_1^m y'_b+\ldots+\beta_{n-1}^m y_b^{(n-1)}=0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(1.5) sınır şartlarını (açık şekilde yazılmış (2.5) sınır şartlarını) sağlayan tüm $y\in C_{[a,b]}^n$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim. Böylece, D kümesi $C_{[a,b]}^n$ uzayının alt kümesi olup aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$D=\left\{y\in C_{[a,b]}^n : U_\upsilon(y)=0,\ \upsilon=1,2,\ldots,m\right\} \tag{2.6}$$

D kümesinin $C^n_{[a,b]}$ uzayında lineer manifold oluşturduğu açıktır. (1.5) şartları olmadığında ise D kümesi $C^n_{[a,b]}$ uzayı ile çakışır.

Şimdi (2.1) şekilli eşitlikle tanımlanan bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (1.5) şekilli şartlarla tanımlanan, yani (2.6) eşitliği ile tanımlanan bir D manifoldunun verildiğini varsayalım. D manifoldundan alınmış her bir $y \in D$ fonksiyonuna karşı

$$\ell(y) = u$$

formülü ile $u \in C_{[a,b]}$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu yöntemle her bir $y \in D$ elemanına karşı tek bir $u \in C_{[a,b]}$ elemanı karşılık getirilmiş olur. Böylece, tanım bölgesi D olan değerler bölgesi

$$R = \left\{ u \in C_{[a,b]} : u = \ell(y),\ \ y \in D \right\}$$

eşitliği ile tanımlanan bir operatör tanımlamış oluruz. Bu operatörü L ile gösterelim. Bu $L : C^n_{[a,b]} \longrightarrow C_{[a,b]}$ operatörünün lineer operatör olduğu kolaylıkla gösterilir. Bu operatörü şematik olarak aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$C^n_{[a,b]} \supseteq D(L) \xrightarrow{L} R(L) \subseteq C_{[a,b]}$$

Böylece, $y \in D$ için $\ell(y) = u$ olduğunda L operatörünün tanımına esasen aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$Ly = u$$

Bu yöntemle tanımlanmış L operatörüne (2.1) eşitliği ile tanımlanan $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (1.5) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel operatör denir.

Böylece burada çok önemli olan bir özelliği dikkate almamız gerekir ki, aynı bir diferansiyel $\ell(y)$ ifadesini (1.5) (uygun olarak (2.5)) sınır şartlarının farklı farklı seçimine bağlı olarak farklı farklı lineer diferansiyel L operatörleri doğurabilir.

Özel halde (1.5) sınır şartlarının hiç birini almadığımızda biz tanım bölgesi

$$D = C^n_{[a,b]}$$

olan diferansiyel operatör tanımlamış oluruz. Bu operatörü L_1 ile gösterelim. L_1 operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (1.5) sınır şartlarının farklı farklı seçimleri ile doğrulan farklı farklı tüm L operatörlerinin uygun olarak D(L) tanım bölgelerinden $C^n_{[a,b]}$ uzayına devamıdır(genişletilmesidir). $D(L) \subset D(L_1) = C^n_{[a,b]}$ ve her bir $y \in D(L)$ için $L(y) = L_1(y)$ eşitliği sağlanır.

Ama L_1 operatörünün uygun D(L) bölgesine kısıtlanmaları olan L operatörlerinin ele alınıp incelenmelerinin pratik problemlerin çözümünde çok büyük önemi ve faydaları vardır. Bu yüzden de, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (1.5) şartlarının doğurdukları farklı farklı L operatörlerini ayrı ayrı ele alıp incelememiz gerekir.

Burada dikkate alalım ki, $U_1(y), U_2(y), \ldots, U_m(y)$ lineer formlarından bazıları diğerlerinin lineer kombinasyonları şeklinde gösterilebilen haller olabilir. Böyle formlara uygun yazılmış

$$U_\upsilon(y) = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, m$$

sınır şartları, diğer formlara uygun yazılmış sınır şartlarının sonucu olurlar. Bu yüzden de verilmiş sınır şartlarının bazılarının atılması gerekir.

Bu söylediklerimizi dikkate alarak $U_\upsilon(y)$ formlarının önceden lineer bağımsız olduklarına inanmamız gerekir. Lineer $U_1(y), U_2(y), \ldots, U_m(y)$ formlarının lineer bağımsız olması için lineer formların katsayılarından yapılmış $(A \vdots B)$ matrisinin rankının m sayısına eşit olması gerekir, yani lineer formların m sayısına eşit olması gerekir.

$$\operatorname{rank}(A \vdots B) = m$$

Burada lineer $U_\upsilon(y), \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, m$ formlarının katsayılarının matrisi aşağıdaki eşitlikle yazılır:

$$
\left(A \vdots B\right)=\begin{pmatrix}
\alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_{n-1}^1 & \beta_0^1 & \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_{n-1}^1 \\
\alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 & \beta_0^2 & \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_{n-1}^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_0^m & \alpha_1^m & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_{n-1}^m & \beta_0^m & \beta_1^m & \beta_2^m & \ldots & \beta_{n-1}^m
\end{pmatrix} \tag{2.7}
$$

Özel halde $m = 2n$ olduğunda, yani sınır şartlarının sayısı $m = 2n$ olduğunda ve $\operatorname{rank}\left(A \vdots B\right) = 2n$ şartı sağlandığında uygun olarak (2.5) sınır şartları aşağıdaki şekilde yazılır:

$$
y_a = y'_a = \ldots = y_a^{(n-1)} = y_b = y'_b = \ldots = y_b^{(n-1)} = 0 \tag{2.8}
$$

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.8) sınır şartlarının doğurduğu lineer operatörü L_0 ile gösterelim.

2.1.4. Homojen Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki

$$
\ell(y) = 0 \tag{2.9}
$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin (1.5) homojen lineer sınır şartlarını sağlayan $C_{[a,b]}^n$ uzayından olan $y(x)$ çözümünün bulunması problemine *homojen sınır değer problemi* denir.

$(2.9)-(1.5)$ homojen sınır değer problemi açık şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$
P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0 \tag{2.10}
$$

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (1.5) homojen lineer sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatörü L ile gösterelim. Bu durumda $(2.9)-(1.5)$ homojen sınır değer problemini çözmek burada tanımladığımız L operatörünün $D(L)$ tanım bölgesinden öyle $y(x) \in D(L)$ fonksiyonunun bulunmasıdır ki, bu fonksiyon L operatörünü sıfıra dönüştürür, yani $Ly \equiv 0$ olur. Böylece, $(2.9)-(1.5)$ homojen sınır değer problemini çözmek $Ly = 0$ şartını sağlayan $y \in D(L)$ fonksiyonunun bulunmasına getirilmiş olur.

Dikkate alalım ki, her bir lineer homojen sınır değer probleminin en azından bir tane aynen sıfıra eşit olan $y \equiv 0$ çözümünün olduğu açıktır. Lineer homojen $(2.9)-(1.5)$ sınır değer probleminin aynen sıfıra eşit olan $y(x) \equiv 0$ çözümüne bu problemin "trivial" çözümü denir. Ama bu $(2.9)-(1.5)$ homojen lineer sınır değer probleminin trivial olmayan, yani aynen sıfıra eşit olmayan $y(x) \not\equiv 0$ çözümü de olabilir.

Şimdi biz burada lineer homojen $(2.9)-(1.5)$ sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün varlığı şartlarını belirleyelim.

Bu amaçla n mertebeli lineer homojen (2.10) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemini

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

ile gösterelim. O zaman (2.9) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x) \tag{2.11}$$

şeklinde bulunur. Bu formülde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayıları keyfi sabit sayılardır. (1.5) şartları lineer şartlar olduklarından dolayı $(2.9)-(1.5)$ lineer homojen sınır değer probleminin çözümü de (2.11) şeklinde olacaktır. (2.9) denkleminin (2.11) formülü ile bulunan genel çözümünü (1.5) sınır şartlarında y fonksiyonunun yerine yazarak (2.11) formülündeki $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayılarının aşağıdaki şartları sağlaması gerektiğini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} c_1U_1(y_1) + c_2U_1(y_2) + \ldots + c_nU_1(y_n) = 0, \\ c_1U_2(y_1) + c_2U_2(y_2) + \ldots + c_nU_2(y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1U_m(y_1) + c_2U_m(y_2) + \ldots + c_nU_m(y_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

Böylece, (2.11) formülü ile bulunan $y(x)$ fonksiyonunun (2.9) denklemini sağlamasıyla birlikte bu fonksiyonun (1.5) sınır şartlarını da sağlaması için (2.11) formülündeki $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayıları (2.12) lineer homojen cebirsel denklemler sisteminin çözümü olması gerekir. (2.12) sisteminin matrisini U ile gösterelim. O zaman (2.12) sisteminin U matrisi için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

(2.12) sisteminin (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisinin rankını r ile gösterelim. O zaman (2.12) sisteminin $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerine nazaran $n-r$ sayıda bağımsız çözümleri sistemi olur. Bu yüzden de $(2.9)-(1.5)$ homojen lineer sınır değer probleminin (2.11) şeklinde $n-r$ sayıda trivial olmayan lineer bağımsız çözümleri olur.

Böylece, uygun olarak biz $(2.9)-(1.5)$ lineer homojen sınır değer probleminin çözümünün varlığı ile bağlı aşağıdaki lemmaları ispatladık:

Lemma 2.1.4.1

(2.13) matrisinin rankı r olduğunda $(2.9)-(1.5)$ lineer homojen sınır değer probleminin $n-r$ sayıda (2.11) şeklinde lineer bağımsız çözümleri vardır.

Lemma 2.1.4.2

Özel halde;

a) $(2.9)-(1.5)$ homojen sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart (2.13) matrisinin rankının $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin n mertebesinden küçük olmasıdır.

b) (1.5) sınır şartlarındaki, şartların m sayısı $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin mertebesini gösteren n sayısından küçük olduğunda, yani $m<n$ şartı sağlandığında $(2.9)-(1.5)$ probleminin trivial olmayan çözümü vardır.

c) (1.5) homojen sınır şartlarındaki şartların m sayısı $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin n mertebesine eşit olduğunda, yani $m=n$ şartı sağlandığında $(2.9)-(1.5)$ homojen lineer sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart (2.13) quadratik matrisinin (bu halde U matrisi quadratik matris olur) determinantının sıfıra eşit olmasıdır.

Burada dikkate alalım ki, (2.13) matrisinin rankı $\ell(y)=0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız (fundamental) çözümlerinin $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ sisteminin seçimine bağlı değildir. Gerçektende, $\ell(y)=0$ denkleminin lineer bağımsız $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ çözümleri sistemini $\ell(y)=0$ denkleminin başka bir lineer bağımsız $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x),\ldots, \tilde{y}_n(x)$ çözümleri sistemi ile değiştirdiğimizde bu değişim aşağıdaki lineer dönüşümle gerçekleştirilir:

$$\tilde{y}_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(x), \quad i=1,2,\ldots,n \tag{2.14}$$

Bu lineer dönüşümün matrisinin determinantı sıfırdan farklı olur.

Böylece, bu dönüşümde (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisi (2.14) dönüşümünün $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ matrisi ile çarpıldığından ve $\det A \neq 0$ şartı sağlandığından (2.14) dönüşümünde U matrisinin rankı sabit kalır.

(2.13) matrisinin rankına $(2.9)-(1.5)$ *sınır değer probleminin rankı* denir.

Burada dikkate alalım ki, ele aldığımız $(2.9)-(1.5)$ homojen sınır değer problemi aşağıdaki şekilde genelleştirilir:

$U_1(y), U_2(y),\ldots, U_n(y)$ ifadeleri $C^n_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış lineer bağımsız sürekli lineer fonksiyoneller sisteminin olduklarını varsayalım. $\ell(y)$ ise (2.1) eşitliği ile tanımlanan n mertebeli lineer diferansiyel ifade olduğunu varsayalım. O zaman homojen lineer (2.9) diferansiyel denkleminin

$$U_\upsilon(y)=0, \quad \upsilon=1,2,\ldots,n \tag{2.15}$$

lineer homojen sınır şartlarını sağlayan $y \in C^n_{[a,b]}$ çözümünün bulunması problemine *genelleştirilmiş homojen sınır değer problemi* denir. Bu kısımda $(2.9)-(1.5)$ homojen lineer sınır değer problemi için alınmış sonuçlar genelleştirilmiş homojen $(2.9)-(2.15)$ sınır değer problemi için geçerlidir.

2.1.5. Lagrange Formülü ve Eşlenik (Dual, Adjoint, Koşma, İkili) Diferansiyel İfade

Şimdi burada (2.1) diferansiyel ifadesinin $P_k(x),\ k=0,1,2,\ldots,n$ katsayılarının uygun olarak, $(n-k)$ mertebeli türevi de dahil olmakla beraber $[a,b]$ aralığında $P_k(x)$ fonksiyonunun $(n-k)$ mertebeye kadar tüm türevleri var ve her birinin $[a,b]$ aralığında sürekli olduklarını varsayalım.

$y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları $C^n_{[a,b]}$ uzayından alınmış keyfi fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Aşağıdaki integrali ele alalım:

$$\int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k)}(x)dx$$

Bu integraldaki $\overline{z(x)}$ fonksiyonu $z(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğini gösterir. Ele aldığımız üstteki integralde k kez kısmi integrasyon formülünü uygulayarak aşağıdaki formülü bulmuş oluruz:

$$\int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k)}(x)dx = \int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}dy^{(k-1)}(x) =$$

$$= \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k-1)}(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)' y^{(k-1)}(x)dx =$$

$$= \left[P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k-1)}(x) - \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)' y^{(k-2)}(x)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)'' y^{(k-2)}dx =$$

$$= \left[P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k-1)}(x) - \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)' y^{(k-2)}(x) + \ldots + (-1)^{(k-1)}\left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)^{(k-1)} y(x)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b} +$$

$$+(-1)^k \int_a^b y(x)\left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)^{(k)} dx$$

veya

$$\int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k)}(x)dx=$$

$$\left[P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k-1)}(x)-\left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)'y^{(k-2)}(x)+\ldots+(-1)^{k-1}\left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)^{(k-1)}y(x)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}+$$

$$+(-1)^k\int_a^b y(x)\left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)^{(k)}dx \qquad (2.16)$$

Bu (2.16) eşitliğinde $k=n,\ k=n-1,\ldots,k=0$ alarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\int_a^b P_0(x)y^{(n)}(x)\overline{z(x)}dx=$$

$$=\left[P_0(x)\overline{z(x)}y^{(n-1)}(x)-\left(P_0(x)\overline{z(x)}\right)'y^{(n-2)}(x)+\ldots+(-1)^{n-1}\left(P_0(x)\overline{z(x)}\right)^{(n-1)}y(x)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}+$$

$$+(-1)^n\int_a^b y(x)\left(P_0(x)\overline{z(x)}\right)^{(n)}dx,$$

$$\int_a^b P_1(x)y^{(n-1)}(x)\overline{z(x)}dx=$$

$$=\left[P_1(x)\overline{z(x)}y^{(n-2)}(x)-\left(P_1(x)\overline{z(x)}\right)'y^{(n-3)}(x)+\ldots+(-1)^{(n-2)}\left(P_1(x)\overline{z(x)}\right)^{(n-2)}y(x)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}+$$

$$+(-1)^{n-1}\int_a^b y(x)\left(P_1(x)\overline{z(x)}\right)^{(n-1)}dx,$$

....

$$\int_a^b P_{n-1}(x)y'(x)\overline{z(x)}dx=\left[P_{n-1}(x)\overline{z(x)}y(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b y(x)\left(P_{n-1}(x)\overline{z(x)}\right)'dx$$

$$\int_a^b P_n(x)y(x)\overline{z(x)}dx=\int_a^b y(x)\left(P_n(x)\overline{z(x)}\right)dx$$

Bulduğumuz $n+1$ sayıdaki bu eşitlikleri taraf tarafa toplayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_a^b \ell(y)\overline{z(x)}dx=P(\eta,\zeta)+\int_a^b y(x)\overline{\ell^*(z)}dx \qquad (2.17)$$

Bu (2.17) formülünde (2.1) denklemi ile

$$\ell^*(z) = (-1)^n \left(\overline{P_0(x)}z(x)\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{P_1(x)}z(x)\right)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}\left(\overline{P_2(x)}z(x)\right)^{(n-2)} + \ldots + \overline{P_n(x)}z(x) \quad (2.18)$$

ve

$$\eta = \left(y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}\right),$$
$$\zeta = \left(z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}\right)$$

olmak üzere $P(\eta, \zeta)$ fonksiyonu uygun olarak

$$y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$$

ve

$$z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$$

değişkenlerinin bilineer formudur.

(2.18) formülü ile tanımlanan $\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesine (2.1) formülü ile tanımlanan diferansiyel ifadesinin *eşlenik (koşma, dual) diferansiyel* ifadesi denir. (2.17) formülüne *Lagrange formülü* denir. Üstte

$$\int_a^b \ell\left(y(x)\right)\overline{z(x)}dx$$

integrali için yaptığımız işlemleri uygun olarak

$$\int_a^b \ell^*\left(z(x)\right)\overline{y(x)}dx$$

integrali için benzer şekilde uygulayarak aşağıdaki formülü buluruz:

$$\int_a^b \ell^*\left(z(x)\right)\overline{y(x)}dx = Q(\eta, \zeta) + \int_a^b z(x)\overline{\ell\left(y(x)\right)}dx \quad (2.19)$$

Bu formülde $Q(\eta,\zeta)$ ifadesi η ve ζ vektörlerinin uygun olarak koordinatlarının bilineer formudur.

(2.19) formülünden $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin de uygun olarak $\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesine eşlenik diferansiyel ifade olduğu bulunur. Başka bir deyişle $\ell(y)$ ve $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadeleri biri–birine eşleniktirler, yani

$$\left(\ell^*(y)\right)^* = \ell^{**}(y) = \ell(y)$$

Böylece (2.1) ve (2.18) eşitlikleri ile tanımlanan $\ell(y)$ ve $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadeleri biri-birine eşleniktirler (dualdirler).

Eşlenik diferansiyel $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadesinin (2.18) formülünün uygulanmasıyla eşlenik diferansiyel ifadesinin aşağıdaki özellikleri bulunur:

$$\left(\ell_1 + \ell_2\right)^* = \ell_1^* + \ell_2^* \tag{2.20}$$

ve

$$\left(\lambda\ell\right)^* = \bar{\lambda}\ell^* \tag{2.21}$$

Özel halde burada

$$\ell^*(y) \equiv \ell(y)$$

eşitliği sağlandığında $\ell(y)$ diferansiyel ifadesine özeşlenik (kendi kendisine eşlenik) diferansiyel ifade denir.

(2.20) ve (2.21) formüllerini kullanarak aşağıdaki Lemma kolaylıkla ispatlanır:

Lemma 2.1.5.1

a) Özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da özeşlenik diferansiyel ifade olur;

b) Özeşlenik diferansiyel ifadenin reel λ skaler sayısı ile çarpılması sonucu elde edilen diferansiyel ifade özeşlenik diferansiyel ifade olur.

Şimdi burada tüm özeşlenik diferansiyel ifadelerin genel şeklini bulalım.

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.1.5.2

Her bir özeşlenik diferansiyel ifade aşağıdaki şekildeki

$$\ell_{2\upsilon}(y) = \left(P(x)y^{(\upsilon)}(x)\right)^{(\upsilon)};$$

$$\ell_{2\upsilon-1}(y) = \frac{1}{2}\left[\left(iP(x)y^{(\upsilon-1)}\right)^{(\upsilon)} + \left(iP(x)y^{(\upsilon)}(x)\right)^{(\upsilon-1)}\right], \ \left(\sqrt{-1} = i\right)$$

diferansiyel ifadelerin toplamı şeklinde gösterilir. Bu diferansiyel ifadelerdeki $P(x)$ fonksiyonu yalnız reel değerler alan ve gereken mertebeden diferansiyellenen fonksiyondur $\left(i = \sqrt{-1}\right)$.

İspat:

Bu lemmayı ispatlamak için önce aşağıdaki integralleri ele alalım:

$$\int_a^b \ell_{2\upsilon}\left(y(x)\right)\overline{z(x)}dx, \quad \int_a^b \ell_{2\upsilon-1}\left(y(x)\right)\overline{z(x)}dx$$

Burada $y(x), z(x) \in C^n_{[a,b]}$ olduğunu var sayarız.

Bu integrallerin her birine kısmi integrasyon formüllerini uygulayarak $\ell_{2\upsilon}(y)$ ve $\ell_{2\upsilon-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin her birinin özeşlenik diferansiyel ifadeler olduğu kolaylıkla görülür. Bu yüzden de, lemma 2.1.5.1 e dayanarak $\ell_{2\upsilon}(y)$ ve $\ell_{2\upsilon-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin toplamlarının özeşlenik diferansiyel ifade olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi tersine (2.1) diferansiyel ifadesinin özeşlenik diferansiyel ifade olduğunu varsayalım. Özeşlenik $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin $\ell_{2\upsilon}(y)$ ve $\ell_{2\upsilon-1}(y)$ şekilli özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı şeklinde gösterildiğini ispatlayalım. Böylece, şarta göre

$$\ell(y) \equiv \ell^*(y)$$

eşitliği sağlanır. Ama $\ell^*(y)$ ifadesi aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\ell^*(y) = (-1)^n \left(\overline{P_0(x)y}\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{P_1(x)y}\right)^{(n-1)} + \ldots + \overline{P_n(x)}y$$
$$= (-1)^n \overline{P_0(x)}y^{(n)} + \left[(-1)^n.n.\overline{P_0'}(x) + (-1)^{n-1}\overline{P_1(x)}\right]y^{(n-1)} + \ldots$$

Buradan $\ell(y) = \ell^*(y)$ eşitliğini kullanarak

$$P_0(x) = (-1)^n \overline{P_0(x)} \tag{2.22}$$

eşitliğini buluruz. Şimdi biz burada n sayısının önce çift sayı olduğunu varsayalım. Yani $n = 2\mu$ şeklinde doğal sayı olduğunu varsayalım. O zaman (2.22) eşitliğinden

$$P_0(x) = \overline{P_0(x)}$$

eşitliği bulunur. Böylece, n sayısı çift sayı olduğunda ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin özeşlenik olması durumunda $P_0(x)$ katsayısının yalnız reel değerler alan fonksiyon olması gerekir. Şimdi biz burada (2.1) diferansiyel ifadesinden özeşlenik diferansiyel

$$\ell_{2\mu}(y) = \left(P_0(x)y^{(\mu)}\right)^{(\mu)} = P_0(x)y^{(n)} + \mu P_0'(x)y^{(n-1)} + \ldots$$

ifadesini çıkaralım. O zaman biz $(n-1)$ dereceli özeşlenik $\ell(y) - \ell_{2\mu}(y)$ diferansiyel ifadesini buluruz. Şimdi n sayısının tek sayı olduğunu varsayalım, yani $n = 2\mu - 1$ şeklinde doğal sayı olsun. O zaman bu hal için (2.22) eşitliğinden

$$P_0(x) = -\overline{P_0(x)}$$

eşitliği bulunur. Bulduğumuz bu eşitliğin sağlanması için $P_0(x)$ fonksiyonu $P(x)$ yalnız reel değerler almak üzere burada

$$P_0(x) = iP(x)$$

şekilli fonksiyon olması gerekir. Şimdi biz (2.1) diferansiyel ifadesinden

$$\begin{aligned}\ell_{2\mu-1}(y) &= \frac{1}{2}\left[\left(iP(x)y^{(\mu-1)}\right)^{(\mu)} + \left(iP(x)y^{(\mu)}\right)^{(\mu-1)}\right] \\ &= iP(x)y^{(2\mu-1)} + \frac{1}{2}niP'(x)y^{(2\mu-2)} + \ldots \\ &= P_0(x)y^{(n)} + \frac{1}{2}nP_0'(x)y^{(n-1)} + \ldots\end{aligned}$$

özeşlenik diferansiyel ifadesini çıkarırsak derecesi $(n-1)$ sayısına eşit olan $\ell(y)-\ell_{2\mu-1}(y)$ şekilli özeşlenik diferansiyel ifadesini bulmuş oluruz.

Burada kullandığımız işlemleri bu şekilde devam ettirirsek, yani $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinden ardışık olarak özeşlenik

$$\ell_{2\mu}(y) \text{ ve } \ell_{2\mu-1}(y)$$

şeklindeki özeşlenik ifadelerini çıkararak sonuçta sıfır dereceli(mertebeli) özeşlenik

$$\ell_0(y) = P(x)y$$

ifadesini buluruz. Böylece, bu işlemler sonucunda sıfır mertebeli özeşlenik ifade bulmuş oluruz. Bu ifade üstte gösterdiğimiz $\ell_0(y) = P(x)y$ diferansiyel ifadesi ile çakışır. Bu ifade de $P(x)$ fonksiyonu reel değerli fonksiyon olur. Bununla da lemma 2.1.5.2 ispatlanmış olur.

Özel halde, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi reel katsayılı özeşlenik diferansiyel ifade olduğunda, o zaman $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinde $\ell_{2\mu-1}(y)$ şeklindeki diferansiyel ifadeler bulunamazlar. Bu yüzden de reel katsayılı $\ell(y)$ özeşlenik diferansiyel ifadeleri için aşağıdaki lemma doğrudur:

Lemma 2.1.5.3

Her bir reel katsayılı özeşlenik diferansiyel ifade mutlaka çift mertebeli diferansiyel ifadedir ve bu diferansiyel ifade aşağıdaki

$$\ell(y)=\left(P_0(x)y^{(\mu)}\right)^{(\mu)}+\left(P_1(x)y^{(\mu\text{-}1)}\right)^{(\mu\text{-}1)}+\ldots+\left(P_{\mu-1}(x)y'\right)'+P_\mu(x)y$$

şeklinde gösterilir. Bu açılımdaki $P_0(x),P_1(x),P_2(x),\ldots,P_\mu(x)$ fonksiyonları reel değerli reel değişkenli fonksiyonlardır.

2.1.6. Eşlenik Sınır Şartları ve Eşlenik Operatör

Burada $U_1,U_2,\ldots,U_m$ lineer formlarının $y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin lineer bağımsız formları olduklarını varsayalım. Burada $m<2n$ halinde $U_1,U_2,\ldots,U_m$ formlarına öyle yeni $U_{m+1},U_{m+2},\ldots,U_{2n}$ lineer formlarını ilave ederek 2n tane

$$U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$$

lineer formlar sistemine tamlaştıralım ki, bu $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ sistemi lineer bağımsız sistem olsun. $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ formları lineer bağımsız olduklarından

$$y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$$

değişkenlerini $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ formlarının lineer kombinasyonları şeklimde ifade edebiliriz.

$$y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$$

değişkenlerinin $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ formları ile ifade edilmiş lineer kombinasyonlarını

$$\int_a^b \ell(y)\overline{z(x)}dx=P(\eta,\zeta)+\int_a^b y(x)\overline{\ell^*(z)}dx$$

Lagrange formülündeki $P(\eta,\zeta)$ bilineer formunda $y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$ değişkenlerini uygun olarak yerlerine yazalım. O zaman $P(\eta,\zeta)$ ifadesi $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ değişkenlerinin lineer homojen formu olur. $P(\eta,\zeta)$ için bulunmuş olan bu ifadede $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ değişkenlerinin katsayılarına uygun olarak

$z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin lineer homojen formları olurlar. Bu formları uygun olarak

$$V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$$

şeklinde gösterelim. O zaman Lagrange formülünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_a^b \ell\left[y(x)\right].\overline{z(x)}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \ldots + U_{2n}V_1 + \int_a^b y(x).\overline{\ell^*\left[z(x)\right]}dx \tag{2.23}$$

Bu formüldeki $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ formlarının da uygun olarak lineer bağımsız oldukları ispatlanır [5]. Aşağıdaki

$$V_1 = 0, V_2 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0 \tag{2.24}$$

sınır şartlarına (ve bu şartlara equivalent olan sınır şartlarına)

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0 \tag{2.25}$$

sınır şartlarının *eşlenik sınır şartları* denir.

Sınır şartları kendi eşleniğine eşdeğer (equivalent) olduğunda bu sınır şartlarına *özeşlenik sınır şartları(kendi kendisine eşlenik olan sınır şartları)* denir.

$\ell^*(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.24) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel operatöre, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel L operatörünün *eşlenik operatörü* denir ve L^* gibi gösterilir.

(2.23) formülünden ve (2.24), (2.25) sınır şartlarından L ve L^* operatörleri için aşağıdaki bağlantı bulunur:

$$\int_a^b Ly(x).\overline{z(x)}.dx = \int_a^b y(x)\overline{L^*z(x)}dx \tag{2.26}$$

Aşağıdaki skaler çarpım gösterimini

$$(y,z)=\int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx$$

kullandığımızda (2.26) eşitliğini kısaca olarak

$$(Ly,z)=(y,L^*z) \tag{2.27}$$

şeklinde yazabiliriz. L^* operatörünün tanımından aşağıdaki sonuç bulunur:

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25) sınır şartlarının doğurduğu L operatörünün özeşlenik operatör olması için gerek ve yeter şart $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25) sınır şartlarının uygun olarak özeşlenik olmalarıdır.

L operatörü özeşlenik operatör olduğunda (2.27) formülü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$(Ly,z)=(y,Lz) \tag{2.28}$$

2.1.7. Eşlenik Sınır Değer Problemi

L^* operatörünün L operatörüne eşlenik operatör olduğunu varsayalım. O zaman

$$L^*z=0 \tag{2.29}$$

homojen sınır değer problemine

$$Ly=0 \tag{2.30}$$

homojen sınır değer probleminin eşlenik sınır değer problemi denir.

(2.29) sınır değer problemini detaylı bir şekilde

$$\ell^*(z)=0 \tag{2.31}$$

homojen diferansiyel denkleminin

$$V_\upsilon(z)=0,\ \ \upsilon=1,2,\ldots,2n-m \tag{2.32}$$

homojen sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümünün bulunması problemidir. Burada $\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesi L operatörünü doğuran $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesidir. (2.32) şartları ise L operatörünü doğuran $U_1(y)=0, U_2(y)=0, \ldots, U_m(y)=0$ sınır şartlarına eşlenik olan şartlardır.

Şimdi biz burada (2.30) probleminin r rankı ile (2.30) problemine eşlenik olan (2.29) probleminin r' rankı arasında bağlantı bulalım.

Bu amaçla n mertebeli adi türevli lineer homojen (2.18) denkleminin lineer bağımsız

$$z_1 = z_1(x), z_2 = z_2(x), \ldots, z_n = z_n(x)$$

çözümleri olduklarını varsayalım. O zaman $(2.31)-(2.32)$ sınır değer problemlerinin matrisi uygun olarak

$$V = \begin{pmatrix} V_1(z_1) & V_1(z_2) & \ldots & V_1(z_n) \\ V_2(z_1) & V_2(z_2) & \ldots & V_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_{2n-m}(z_1) & V_{2n-m}(z_2) & \ldots & V_{2n-m}(z_n) \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde yazılır. V matrisinin rankını r' ile gösterelim: $r' = \text{rank}V$.

O zaman burada uygun olarak $r' < n$ şartı sağlandığında $(2.31)-(2.32)$ sınır değer probleminin $n - r'$ sayıda lineer bağımsız çözümleri olur.

Şimdi (2.23) Lagrange formülünde (2.30) denkleminin trivial olmayan herhangi bir $y = y(x)$ çözümünü ve (2.31) homojen lineer diferansiyel denkleminin lineer bağımsız $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ çözümlerinden birini, mesela $z_\upsilon = z_\upsilon(x)$ çözümünü $z = z(x)$ fonksiyonu olarak alalım. O zaman (2.23) Lagrange formülündeki integraller sıfıra dönüşürler ve (2.30) denkleminin trivial olmayan çözümü olan $y = y(x)$ fonksiyonu da $U_1(y)=0, U_2(y)=0, \ldots, U_m(y)=0$ sınır şartlarını sağladığından dolayı (2.23) Lagrange formülü bu şartlarda aşağıdaki şekli alır:

$$U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_\upsilon)+U_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_\upsilon)+\ldots+U_{2n}(y)V_1(z_\upsilon)=0$$

Bu eşitlikte sırası ile $\upsilon=1,2,\ldots,n$ aldığımızda, $U_{m+1}(y),U_{m+2}(y),\ldots,U_{2n}(y)$ lineer formlarının bulunması için aşağıdaki lineer homojen cebirsel denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_1)+U_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_1)+\ldots+U_{2n}(y)V_1(z_1)=0, \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_2)+U_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_2)+\ldots+U_{2n}(y)V_1(z_2)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_n)+U_{(m+2)}(y)V_{2n-(m+1)}(z_n)+\ldots+U_{2n}(y)V_1(z_n)=0 \end{array}\right\} \quad (2.34)$$

Bu (2.34) sisteminin en azından $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümleri vardır. Bunlar, mesela

$$U_{m+1}(y_j),U_{m+2}(y_j),\ldots,U_{2n}(y_j),\ j=1,2,\ldots,n-r$$

çözümleri olabilir. Buradaki $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_{n-r}(x)$ fonksiyonları (2.30) denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemidir.

Böylece, (2.34) sisteminin matrisinin rankı

$$2n-m-(n-r)=n-m+r$$

sayısını aşamaz. Ama (2.34) sisteminin matrisi (2.33) eşitliği ile tanımlanmış V matrisinin satır ve sütunlarının yerlerinin değiştirilmesinden alınan matristir. Bu yüzden de (2.34) matrisinin rankı V matrisinin r' rankı ile çakışır. Bu yüzden de

$$r'\le n-m+r \quad (2.35)$$

eşitsizliğini buluruz.

(2.35) eşitsizliğinde yalnız eşitlik olduğunu ispatlayalım.

Burada ele aldığımız $L(y)=0$ ve $L^*(z)=0$ sınır değer problemleri birbirleri ile karşılıklı eşlenik olduklarından, buradaki işlemlerde sınır değer problemlerinin rollerini değiştirebiliriz. Bu yüzdende, bu değişimi yaptığımızda r' ve r parametreleri de rollerini değiştirmiş olacaktır. m sayısı uygun olarak $2n-m$ sayısı ile rollerini değiştirir. Böylece, bu durumda

$$r \leq n-(2n-m)+r'$$

eşitsizliği yazılmış olur. Bu eşitlikten de

$$r \leq m-n+r' \tag{2.36}$$

eşitliğini buluruz. (2.35) ve (2.36) eşitsizliklerinden ise

$$r' = n-m+r \tag{2.37}$$

eşitliğini buluruz. Böylece biz aşağıdaki lemmaları ispatlamış olduk.

Lemma 2.1.7.1

(2.30) sınır değer probleminin rankı r uygun olarak eşlenik (2.29) sınır değer probleminin rankı olan r' sayısı ile (2.37) bağlantısındadır. Özel halde burada $m=n$ olduğunda (2.37) formülünden $r'=r$ eşitliği bulunur.

Buradan da aşağıdaki lemma bulunur.

Lemma 2.1.7.2

Lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı diferansiyel ifadenin derecesine eşit olduğunda sınır değer probleminin rankı eşlenik sınır değer probleminin rankı ile çakışır.

Buradan da özel halde aşağıdaki lemma bulunur.

Lemma 2.1.7.3

Lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı diferansiyel ifadenin derecesine eşit olduğunda uygun homojen sınır değer probleminin yalnız trivial çözümü olursa, o zaman bu problemin eşlenik sınır değer probleminin de yalnız trivial çözümü olur.

2.2. Diferansiyel Operatörün Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Fonksiyonları

2.2.1. Karakteristik Değerlerin ve Karakteristik Fonksiyonların Tanımı

Aşağıdaki

$$Ly = \lambda y \tag{2.38}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde L lineer operatör, λ ise skaler değerli parametredir. λ parametresinin bir $\lambda = \lambda_0$ değerinde L operatörünün tanım bölgesi $D(L)$ kümesinde en az bir tane $y_0(x) \not\equiv 0$ fonksiyonu için,

$$Ly_0 = \lambda_0 y_0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman λ parametresinin $\lambda = \lambda_0$ değerine L operatörünün karakteristik değeri ve uygun olarak $y_0(x)$ fonksiyonuna ise L operatörünün $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu veya karakteristik vektörü denir. Şimdi biz L operatörünün (2.1) diferansiyel ifadesinin ve

$$\left.\begin{array}{l} U_1(y) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k^1 y_a^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k^1 y_b^{(k)} = 0, \\ U_2(y) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 y_a^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k^2 y_b^{(k)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_m(y) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k^m y_a^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k^m y_b^{(k)} = 0 \end{array}\right\} \tag{2.39}$$

sınır şartlarının lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım.

L operatörünün her bir karakteristik $y(x)$ fonksiyonu uygun olarak L operatörünün

$$D(L) = \left\{ y(x) \in C_{[a,b]}^n : U_\upsilon(y) = 0, \upsilon = 1, 2, \dots, m \right\}$$

tanım bölgesine dahil olduğundan bu operatörün karakteristik fonksiyonları (2.39) sınır şartlarını sağlaması gerekir. Buna ek olarak L operatörünün tanımından

$Ly = \ell(y)$ eşitliğinin de sağlanması gerektiğinden (2.38) eşitliği L diferansiyel operatörü için

$$\ell(y) = \lambda y \tag{2.40}$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece, L diferansiyel ifadesinin karakteristik değerleri λ parametresinin öyle değerleridir ki, λ parametresinin bu değerlerinde homojen

$$\left.\begin{array}{l} \ell(y) = \lambda y, \\ U_\upsilon(y) = 0, \ \ \upsilon = 1, 2, \ldots, m \end{array}\right\} \tag{2.41}$$

sınır değer probleminin trivial olmayan çözümü vardır. Bu trivial olmayan çözümler λ parametresinin bu değerlerine uygun karakteristik fonksiyonlardır.

Dikkate alalım ki, aynı bir λ karakteristik değerine uygun farklı karakteristik fonksiyonların lineer kombinasyonu da λ parametresinin bu değerine uygun karakteristik fonksiyon olur.

Gerçektende, aynen sıfıra eşit olmayan $y_1(x), y_2(x) \in D(L)$ fonksiyonları için λ parametresinin $\lambda = \lambda_0$ değerinde

$$Ly_1 = \lambda_0 y_1,$$

ve

$$Ly_2 = \lambda_0 y_2$$

eşitlikleri sağlandığında, o zaman keyfi alınmış c_1 ve c_2 sabit sayıları için

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda_0 (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

eşitliği sağlanır. Bu üstte söylediğimiz fikrin ispatıdır.

Burada verilmiş λ sayısında (2.1) diferansiyel ifadesinin $P_0(x) \neq 0, P_1(x), \dots, P_n(x)$ katsayıları $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarında (2.40) denkleminin n sayıda lineer bağımsız çözümü olduğundan, buradan görülür ki, aynı bir karakteristik λ sayısına uygun olan karakteristik fonksiyonların (karakteristik vektörlerin) kümesi sonlu boyutlu lineer uzay olmakla beraber bu uzayın boyutu $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin n mertebesini aşamaz. Verilmiş λ karakteristik sayısında bu karakteristik sayıya uygun olan karakteristik fonksiyonların lineer uzayının boyutu (2.41) sınır değer probleminin verilmiş karakteristik λ sayısına uygun lineer bağımsız çözümlerinin sayısına eşittir. Bu sayıya λ karakteristik sayısının *tekrarlanma* ya da *katlanma mertebesi* denir.

Şimdi biz burada L diferansiyel operatörünün karakteristik değerlerinin varlığı için şart belirleyelim. Gereken şartı bulmak için (2.40) diferansiyel denkleminin

$$y_j^{(\upsilon-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq \upsilon \\ 1, & j = \upsilon \end{cases} \qquad j,\upsilon = 1,2,3,\dots,n \tag{2.42}$$

başlangıç şartlarını sağlayan lineer bağımsız(fundamental) çözümler sistemini

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \dots, y_n(x,\lambda) \tag{2.43}$$

ele alalım.

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkındaki genel teoremlerden görülür ki, x serbest değişkeni $[a,b]$ aralığından alınmış her bir değerinde (2.43) çözümlerinin her biri λ parametresinin (tüm kompleks değerlerinde) *tam analitik fonksiyonları* olurlar.

Lemma 2.1.4.2 deki sonuçlara dayanarak (1.5) sınır değer probleminin yalnız ve yalnız bu problemin (2.13) matrisinin rankı $r = \text{rank}U$ rankının $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin derecesi(mertebesi) olan n sayısından küçük olduğu hal için trivial olmayan çözümünün olduğunu görüyoruz.

Dikkate alalım ki, $m < n$ şartı sağlandığında $r < n$ şartı da sağlanır. Böylece, $r < n$ şartı sağlandığında λ parametresinin her bir değerinde (1.5) sınır değer probleminin trivial olmayan çözümü olur. Buradan da $m < n$ şartı sağlandığında λ parametresinin her bir değerinin L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri olduğu görülür.

$m \geq n$ olduğunda, yani böyle bir şart sağlandığında (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisinin $r = \text{rank}U$ rankının n sayısından küçük olması için gerek ve yeter şart U matrisinin n mertebeli tüm determinantlarının her birinin sıfıra eşit olmalarıdır. Ama dikkate alalım ki, bu determinantların her biri λ parametresinin tam analitik fonksiyonlarıdır. Bu yüzden de yalnız aşağıdaki haller mümkündür:

1. U matrisinin n mertebeli tüm determinantlarının her biri aynen sıfıra eşittir. Bu halde λ parametresinin her bir değeri, önce ki gösterdiğimiz hale uygun olarak karakteristik değer olur.

2. U matrisinin n mertebeli determinantlarından en azından bir tanesi aynen sıfıra eşit değildir. Bu şart sağlandığında bu determinantın yalnız sıfırları karakteristik değerler olur ki, bu değerlerde U matrisinin n mertebeli determinantlarının her biri sıfıra dönüşmüş olsun.

Burada dikkate alalım ki, aynen sıfıra eşit olmayan tam analitik fonksiyon ya hiçbir noktada sıfıra dönüşmüyor, yani tam fonksiyonun ya sıfırı yok yada tam fonksiyonun sayılabilir sayıda sıfırları olur ve tam fonksiyonun sıfırlarının sonlu limit noktası olamaz.

Tüm bu hallerin her birini toplayarak aşağıdaki alternatifi yazalım:

Lemma 2.2.1.1

Her bir diferansiyel L operatörü için yalnız aşağıdaki hal mümkün olur.

1) Her bir λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeridir;

2) L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri kümesi sayılabilirden fazla değildir ve bu operatörün karakteristik değerler dizisinin sonlu limit noktası yoktur

(Özel halde L diferansiyel operatörünün karakteristik değerler kümesi boş küme de olabilir).

Dikkate alalım ki, $m = n$ hali en önemli ve en ilginç bir haldir. Bu yüzden bundan sonra da, genelde, bu hali ele alacağız.

$m = n$ halinde (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisi nxn boyutlu quadratik(kare) matris olur. Bu halde U matrisinin determinantını $\Delta(\lambda)$ ile gösterirsek

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{2.44}$$

olur. $\Delta(\lambda)$ determinantı λ parametresinin tam analitik fonksiyonudur. $\Delta(\lambda)$ determinantına L diferansiyel operatörünün (aynı zamanda (1.5) sınır değer probleminin) karakteristik determinantı denir.

Üstte yapılmış araştırmaların sonuçları $m = n$ hali için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Lemma 2.2.1.2

L diferansiyel operatörünün $m = n$ halinde karakteristik değerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu aynen sıfıra eşit olduğunda, her bir λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu aynen sıfıra dönüşmediğinde L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri sayılabilirden fazla değildir ve bu karakteristik değerler dizisinin sonlu limit noktası yoktur.

Özel halde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olmadığında, L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri yoktur.

L diferansiyel operatörünün λ karakteristik değeri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun tekrarlanan (katlı) kökü de olabilir. Bu hal için aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.2.1.3

$\lambda = \lambda_0$ sayısı $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının υ mertebeden tekrarlanan kökü olduğunda, o zaman bu halde λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma mertebesi υ sayısını aşmıyor.

İspat:

r sayısı $\Delta(\lambda_0)$ determinantına uygun U matrisinin rankı olduğunda λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma katsayısı(mertebesi) $n-r$ sayısına eşit olur. Diğer yandan determinantın diferansiyellenmesi kuralına esasen, $\lambda = \lambda_0$ noktasında $\Delta(\lambda)$ determinantının $(n-r-1)$ mertebeye kadar tüm türevleri ($(n-r-1)$ türevi de dahil olmakla) sıfıra dönüşürler. λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun υ tekrarlanma katsayılı kökü olduğunda

$$(n-r-1) \le \upsilon - 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikten

$$(n-r) \le \upsilon$$

eşitsizliği bulunur.

Özel halde $\upsilon = 1$ olduğunda $n-r \le 1$ olur. Diğer yandan $n-r \ge 1$ eşitsizliği de sağlandığından ve $\Delta(\lambda_0) = 0$ olduğundan $\upsilon = 1$ hali için $n-r=1$ eşitliğini buluruz.

Böylece, aşağıdaki sonuç doğrudur.

Lemma 2.2.1.4

λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının sade sıfırı olduğunda, o zaman L diferansiyel operatörünün λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma sayısı bir sayısına eşit olur. L operatörünün karakteristik $\lambda = \lambda_0$ değeri $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının sade sıfırı olduğunda, bu λ_0 karakteristik değerine L diferansiyel operatörünün sade karakteristik değeri denir.

2.2.2. Eşlenik Operatörlerin Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Fonksiyonları Arasındaki Bağıntı

Burada $m = n$ olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki teorem doğru olur.

Teorem 2.2.2.1

λ_0 sayısı L operatörünün υ_0 mertebeden tekrarlanan(katlı) karakteristik değeri olduğunda, uygun olarak $\overline{\lambda_0}$ sayısı eşlenik L^* operatörünün υ_0 mertebeden tekrarlanan karakteristik değeri olur.

İspat:

L operatörünün $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.15) sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. L^* operatörünün ise $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadesinin ve $V_\upsilon(y) = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, n$ sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Burada biz

$$\ell_1(y) = \ell(y) - \lambda_0 y$$

alırsak o zaman $\ell_1(y)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesi

$$\ell_1^*(y) = \ell^*(y) - \overline{\lambda_0} y$$

eşitliği ile tanımlanmış olacaktır.

Şimdi $\lambda = \lambda_0$ sayısının L operatörünün υ_0 mertebeden tekrarlanan karakteristik değeri olduğunu varsayalım. O zaman bu şartlarda

$$\begin{aligned} &\ell_1(y) = 0, \\ &U_\upsilon(y) = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

sınır değer probleminin υ_0 sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. O zaman lemma2.1.7.2 ye esasen $m = n$ şartında verilmiş sınır değer probleminin r rankı ile eşlenik sınır değer probleminin r' rankı çakıştığından dolayı eşlenik

$$\ell_1^*(y)=0,$$
$$V_\upsilon(y)=0,\quad \upsilon=1,2,\ldots,n$$

sınır değer probleminin de υ_0 sayıda lineer bağımsız çözümü olacaktır. Bu ise $\overline{\lambda_0}$ sayısının L^* operatörünün υ_0 mertebeden tekrarlanan karakteristik değeri olduğunu gösterir.

Hatırlatalım ki $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları için $(y,z)=0$ şartı sağlandığında, yani

$$(y,z)=\int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx=0$$

şartı sağlandığında $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında ortogonaldir denir ve $y\perp z$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.2.2

λ sayısının L operatörünün karakteristik değeri $y=y(x)$ fonksiyonu ise L operatörünün λ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu ve μ sayısının ise eşlenik L^* operatörünün karakteristik değeri olduğunu $z=z(x)$ fonksiyonu ise L^* operatörünün bu μ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu varsayalım. Burada $\lambda\neq\overline{\mu}$ şartının da sağlandığını varsaydığımızda, o zaman $(y,z)=0$ şartı sağlanır.

İspat:

Teoremin şartını dikkate alırsak aşağıdaki

$$Ly=\lambda y,\quad L^*z=\mu z$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu eşitlikleri dikkate alarak uygun olarak aşağıdaki

$$(Ly,z)=(\lambda y,z)=\lambda(y,z)$$
$$(y,L^*z)=(y,\mu z)=\overline{\mu}(y,z)$$

eşitliklerini buluruz. Burada L ve L^* eşlenik operatörler olduklarından

$$(Ly,z)=(y,L^*z)$$

eşitliği sağlanır. Üstteki eşitlikleri taraf tarafa çıkararak ve sonuncu eşitliği de kullanırsak

$$(\lambda-\overline{\mu})(y,z)=0$$

eşitliğini buluruz. Şarta göre $\lambda\neq\overline{\mu}$ olduğundan bu sonuncu eşitlikten $(y,z)=0$ eşitliği bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2.2.3. Özeşlenik Operatörlerin Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Fonksiyonları

Teorem 2.2.3.1

Özeşlenik operatörün tüm karakteristik değerleri reel sayılardır.

İspat:

L özeşlenik operatör olduğundan

$$(Ly,z)=(y,Lz)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten de $z=y$ aldığımızda

$$(Ly,y)=(y,Ly)$$

eşitliğini buluruz. Diğer yandan

$$(y,Ly)=\overline{(Ly,y)}\Rightarrow(Ly,y)=\overline{(Ly,y)}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikten de (Ly,y) sayısının kendi eşleniğine eşit olduğu görülür. Buradan da (Ly,y) sayısının reel sayı olduğu bulunmuş olur.

Şimdi λ sayısı L operatörünün karakteristik sayısı $y = y(x)$ ise bu λ karakteristik değerine uygun L operatörünün karakteristik fonksiyonu olduğunu varsayalım. O zaman

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini kullanarak

$$(Ly, y) = \lambda (y, y)$$

eşitliğini buluruz.

Burada $(y, y) > 0$ ve (Ly, y) reel sayı olduğundan

$$\lambda = \frac{(Ly, y)}{(y, y)}$$

karakteristik sayısının reel sayı olduğunu buluruz.

Teorem 2.2.2.2 ve Teorem 2.2.3.1 teoremlerinden aşağıdaki teoremi buluruz.

Teorem 2.2.3.2

Özeşlenik operatörün farklı karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonları karşılıklı olarak ortogonal olurlar.

Dikkate alalım ki aynı bir $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerlere uygun karakteristik $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonlarını karşılıklı olarak çift çift ortogonal olarak seçebiliriz.

Bunun için aynı bir $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonların lineer uzayında ortogonal baz seçmemiz gerekir. Bu ortogonal baz özeşlenik L operatörünün aynı bir karakteristik değerine uygun ortogonal karakteristik fonksiyonu olurlar.

2.2.4. Karakteristik Değerlerin Bulunması Problemine Ait Örnekler

Örnek 2.2.4.1

$\ell(y) = -y''$ diferansiyel ifadesinin ve $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$ sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatörün karakteristik değerlerini ve karakteristik fonksiyonlarını bulun.

Çözüm:

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y'' = \lambda y, \tag{2.45}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= y(1), \\ y'(0) &= y'(1). \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

(2.45) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{2.47}$$

şeklinde yazılır. Bu çözümdeki A ve B katsayıları keyfi sabit sayılardır. (2.47) genel çözümündeki A ve B katsayılarını öyle seçelim ki, (2.46) sınır şartlarını da sağlasın. Bu amaçla (2.47) çözümünün x değişkenine nazaran türevini alalım:

$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \tag{2.48}$$

(2.47) ve (2.48) ifadelerini (2.46) sınır şartlarında dikkate alırsak A ve B katsayıları için aşağıdaki denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{aligned} &A\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) + B\sin\sqrt{\lambda} = 0, \\ &A\left(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right) + B\left(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

(2.49) denklemi A ve B katsayılarına nazaran homojen cebirsel lineer denklemler sistemidir. Bu sistemin A ve B bilinmeyenlerine nazaran trivial olmayan çözümünün olması için (2.49) sisteminin

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}-1 & \sin\sqrt{\lambda}\\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right)\end{vmatrix} \tag{2.50}$$

determinantının sıfıra eşit olması gerek ve yeter şarttır. Böylece,

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}-1 & \sin\sqrt{\lambda}\\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right)\end{vmatrix}=0$$

veya

$$\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right)=0 \tag{2.51}$$

eşitliği bulunur. Buradan da $(2.45)-(2.46)$ sınır değer probleminin karakteristik değerleri

$$\lambda_n=\left(2\pi n\right)^2,\ n=0,1,2,\dots \tag{2.52}$$

sayıları olur. Burada uygun olarak her bir λ_n, $n=1,2,\dots$ karakteristik değerlerine iki tane lineer bağımsız

$$\cos 2\pi nx,\ \sin 2\pi nx,\quad n=1,2,\dots \tag{2.53}$$

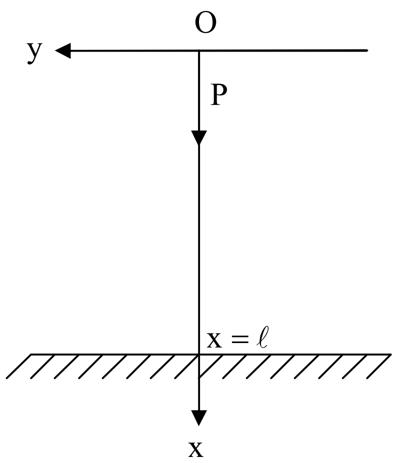
karakteristik fonksiyonları karşılık gelir. Böylece, $n=1,2,\dots$ olmak üzere her bir λ_n sayıları $\ell(y)=-y''$ diferansiyel ifadesinin ve (2.46) şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün iki katlı karakteristik değeridir. Ama $n=0$ için $\lambda_0=0$ karakteristik değerine $y_0(x)\equiv 1$ karakteristik fonksiyonu karşılık gelir. Bu yüzden de tanıma esasen $\lambda_0=0$ karakteristik değeri L operatörünün bir katlı karakteristik değeridir.

Böylece, L operatörünün karakteristik değerleri $\lambda_0=0,\ \lambda_n=\left(2\pi n\right)^2, n=1,2,\dots$ sayıları, bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonksiyonlar ise $y_0(x)=1, y_n^{(1)}(x)=\cos 2\pi nx$ ve $y_n^{(2)}(x)=\sin 2\pi nx$ fonksiyonlarıdır.

Örnek 2.2.4.2

Bir ucu sabitleştirilmiş diğer ucu serbest olan çubuğun uzununa deformasyonu probleminin spektral probleme getirilmesi.

$x = 0$ ucu serbest olan ama $x = \ell$ ucu sabitleştirilmiş ℓ uzunluklu çubuğu ele alalım(Bakınız Şekil 2.1).



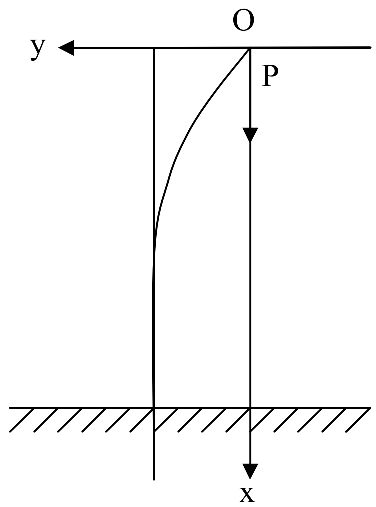
Şekil 2.1 ℓ uzunluklu çubuk $x = \ell$ ucu sabitleştirilmiş $x = 0$ ucu serbest olmakla $x = 0$ ucundan P kuvveti ile sıkıştırılmıştır.

Çubuğun serbest $x = 0$ noktasında çubuğun ekseni üzerine yöneltilmiş ve çubuğu ℓ ucuna doğru sıkıştıran P kuvveti yüklendirilmiştir.

P kuvvetinin küçük değerlerinde çubuğun doğrusal formasının sağlandığı görülür. Böylece, P kuvvetinin küçük değerleri için çubuğun doğrusal forması kararlı olarak sağlanır.

Ama verilmiş çubuk için öyle kritik P_0 değeri bulunur ki, $P > P_0$ eşitsizliğini sağlayan P kuvvetleri için çubuğun doğrusal forması sağlanmıyor, yani $P > P_0$ değerlerinde çubuk eğrilerek doğrusal formasını kaybeder.

Çubuğun başlangıç eğilme anını ele alalım. Başka bir deyişle çubuğun doğrusal durumundan az sapmasından sonraki durumunu ele alalım(Bakınız Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Bir ucundan serbest diğer ucundan sabitleştirilmiş çubuk uzununa eğilmiştir.

Bu hal için çubuğun deformasyona uğramış formasının denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$Py = -E \cdot I \cdot y''. \qquad (2.54)$$

Buradaki I çubuğun enine kesitinin aksial momentumudur, E Young modülüdür. (2.58) denkleminin sol ve sağ yanındaki ifadeler çubuğun x koordinatlı noktasının kesitindeki eğme momentumunun ifadeleridir.

Çubuğun en sade fiziksel halini ele alalım. Mesela, çubuğun fiziksel özelliklerine nazaran homojen olduğunu, enine kesitinin her bir noktada sabit olduğunu varsayalım. Bu şartlarda $E \cdot I = \text{const}$ olur. Bu şartlar sağlandığında

$$\lambda = \frac{P}{EI}$$

alalım. O zaman bu şartlarda (2.54) denklemini (2.45) şeklinde yazalım:

Şekil 2.2 den de görüldüğü gibi $y(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki sınır şartlarının sağlanması gerekir:

$$y(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0 \qquad (2.55)$$

(2.45) denkleminin genel (2.47) çözümünü (2.55) şartının birincisinde yerine yazdığımızda $y(0)=0$ şartından $y(0)=A=0$ olduğunu buluruz. İkinci $y'(\ell)=0$ şartından ise

$$\Delta(\lambda)=\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\ell=0$$

şartını buluruz. $\lambda_0=0$ halinde $(2.45)-(2.55)$ probleminin trivial çözümü alındığından bu problemde $\lambda_0=0$ karakteristik değer değildir. Ama

$$\cos\sqrt{\lambda}\ell=0$$

denkleminin

$$\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi\right)^2,\quad n=1,2,\ldots \tag{2.56}$$

çözümleri $(2.45)-(2.55)$ probleminin sade karakteristik değerleri olur. Bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonksiyonlar

$$y_n(x)=B_n\sin\frac{2n-1}{2\ell}\pi x$$

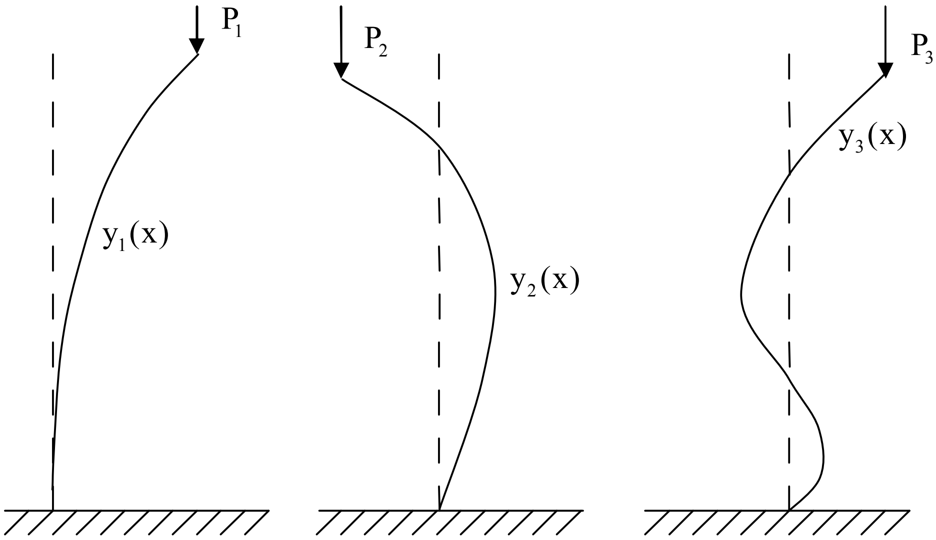
fonksiyonları olur. Burada B_n keyfi sabit sayılardır. Burada bulduğumuz karakteristik değerleri kullanarak verilmiş çubuk için

$$P_n=E\cdot I\cdot\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi\right)^2$$

karakteristik yükleri buluruz. Buradan da bu P_n kritik yüklerine uygun çubuğun

$$y_n(x)=\sin\frac{2n-1}{2\ell}\pi x$$

denge durumlarını buluruz(Bakınız Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Uygun kritik(karakteristik) yüklerde 3 tane karakteristik eğim fonksiyonları.

3. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

3.1. Ters Operatörün Genel Tanımı

B operatörünün tanım bölgesi $D(B)$ uygun olarak A operatörünün değerler bölgesi $R(A)$ ile çakıştığını varsayalım. Bu şartın sağlanması ile her bir $x \in D(A)$ elemanı için

$$B(Ax) = x$$

eşitliği sağlandığında *B operatörüne A operatörünün ters operatörü* denir.

Dikkate alalım ki, bu tanımda A ve B operatörleri lineer operatörler olmayabilir. A operatörünün ters operatörü A^{-1} gibi gösterilir. Böylece her bir $x \in D(A)$ için

$$A^{-1}(Ax) = x \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanır. Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3.1.1

A operatörünün A^{-1} tersi olduğunda o zaman A^{-1} operatörünün de tersi vardır ve

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

eşitliği doğrudur.

İspat:

(3.1) eşitliğinden A^{-1} ters operatörünün değerler bölgesinin A operatörünün tanım bölgesi ile çakıştığını görüyoruz, yani $R(A^{-1}) \equiv D(A)$ olduğu açıkça görülür.

(3.1) eşitliğinin her yanını soldan A operatörü ile çarpsak ve $y = Ax$ alsak o zaman her bir $y \in R(A) = D(A^{-1})$ için

$$A(A^{-1}y) = y \tag{3.2}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlik ise A operatörünün A^{-1} operatörüne ters operatör olduğunu gösterir. Böylece lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 3.1.2

A operatörü lineer operatör olduğunda, A operatörünün tersi olan A^{-1} operatörü varsa, A^{-1} operatörü de lineer operatör olur.

İspat:

y_1, y_2 elemanlarının $D(A^{-1}) = R(A)$ bölgesinden alınmış keyfi elemanlar olduklarını ve α_1, α_2 sayılarının keyfi alınmış skaler sayılar olduklarını varsayalım. Burada (3.2) eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$A(\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2) = \alpha_1 A A^{-1} y_1 + \alpha_2 A A^{-1} y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Böylece $\forall y_1, y_2 \in D(A^{-1}) = R(A)$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2$ skaler sayıları için

$$A(\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

eşitliğini buluruz. Bu sonuncu eşitlikten de

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

eşitliği bulunur. A^{-1} operatörünün de lineer operatör olduğu gösterilmiş oldu.

Lemma 3.1.3

A operatörünün tersinin olması için gerek ve yeter şart

$$Ax = 0 \tag{3.3}$$

homojen denkleminin yalnız $x = 0$ trivial çözümünün olmasıdır.

İspat:

Önce gereklilik şartını ispatlayalım. A operatörünün ters A^{-1} operatörünün olduğunu varsayalım. O zaman (3.3) eşitliğini soldan A^{-1} operatörü ile çarptığımızda $x = 0$ olduğunu buluruz. Böylece biz gerekliliği ispatladık.

Şimdi yeterliliği ispatlayalım. (3.3) denkleminin yalnız bir tane $x = 0$ trivial çözümünün olduğunu varsayalım. O zaman her bir $y \in R(A)$ için

$$Ax = y \tag{3.4}$$

denkleminin tek bir tane $x \in D(A)$ çözümü bulunur. Dikkate alalım ki, $y \in R(A)$ alındığında (3.4) denkleminin $x \in D(A)$ çözümünün var olduğu açıktır. Bu $x \in D(A)$ çözümünün tek olduğunu ispatlayalım. Bunu göstermek için (3.4) denkleminin ikinci bir $x' \in D(A)$ çözümünün de olduğunu varsayalım. O zaman

$$Ax' = y \tag{3.5}$$

eşitliği de sağlanır. (3.4) ve (3.4′) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak

$$A(x - x') = 0$$

denklemini buluruz. Bu homojen denklemin yalnız trivial çözümü olduğundan $x - x' \equiv 0$, yani $x \equiv x'$ eşitliğini buluruz.

Şimdi biz her bir $y \in R(A)$ elemanına karşı (3.4) denkleminin tek bir $x \in D(A)$ çözümünü karşı getirelim. Bu yöntemle biz A operatörünün tersi olan A^{-1} operatörünü tanımlamış oluruz.

Böylece, (3.3) denkleminin yalnız $x = 0$ trivial çözümü olduğunda A operatörünün ters A^{-1} operatörü vardır. Lemma 3.1.3 ispatlandı.

Şimdi biz burada lineer diferansiyel operatörün tersinin bulunması problemini (dönüştürülmesi problemini) ele alalım.

3.2. Lineer Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması (Dönüştürülmesi) Problemi ve Green Fonksiyonunun Genel Tanımı

L lineer diferansiyel operatörünün (2.1) diferansiyel ifadesinin ve

$$U_\upsilon(y) \equiv \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha_k^\upsilon y_a^{(k)} + \beta_k^\upsilon y_b^{(k)}\right) = 0, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, n$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Şimdi uygun homojen (2.30) sınır değer probleminin yalnız tek $y \equiv 0$ trivial çözümünün olduğunu varsayalım. Bu ise bize (2.10) diferansiyel denkleminin $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

fundamental çözümleri sistemi için

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{pmatrix} = \left\| U_i(y_j) \right\|_{i,j=1}^{n}$$

matrisinin rankının n sayısına eşit olduğunu gösterir. Böylece buradaki şart, yani $L(y) = 0$ denkleminin yalnız trivial çözümü olduğunda

$$\det \left\| U_i(y_j) \right\|_{i,j=1}^{n} \neq 0 \tag{3.6}$$

şartı sağlanır. Böylece (3.6) şartı sağlandığında Lemma 3.1.3 ün uygulanmasıyla L diferansiyel operatörünün ters L^{-1} operatörü vardır. L^{-1} ters operatörünün tanım bölgesi L operatörünün değerler bölgesi ile çakışır. Burada esas problem L^{-1} ters operatörünü açık şekilde (formülle) inşa etmektir. Biz L^{-1} operatörünün *sürekli çekirdekli integral operatörü* olduğunu göstereceğiz. Bu integral operatörünün çekirdeğine L diferansiyel operatörünün *Green fonksiyonu* denir.

Şimdi biz burada L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunun inşasını ele alalım.

3.3. Green Fonksiyonunun Özel Tanımı ve Bu Tanım Esasında Green Fonksiyonunun İnşa Metodu

Aşağıdaki şartları sağlayan $G(x,\xi)$ fonksiyonuna L operatörünün Green fonksiyonu denir.

1°. $G(x,\xi)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığından alınmış her bir x ve ξ için hem $G(x,\xi)$ fonksiyonunun kendisi hem de $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine göre $(n-2)-$ci mertebeye kadar ($(n-2)-$ci mertebede dahil) tüm türevleri, yani

$$G'_x(x,\xi), G''_{xx}(x,\xi), \ldots, G^{(n-2)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$$

türevleri x ve ξ değişkenlerinin $[a,b]$ aralığından alınmış her bir değerinde sürekli fonksiyonlardır.

2°. $[a,b]$ aralığından keyfi alınmış ama değişmez sağlanan her bir $\xi \in [a,b]$ için $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında $(n-1)$ ve n–inci mertebeden x değişkenine göre türevleri var ve $[a,\xi)$ ile $(\xi,b]$ aralıklarında süreklidirler. $(n-1)-$inci mertebeden türevi $x=\xi$ noktasında $\dfrac{1}{P_0(\xi)}$ ifadesine eşit olan sıçrayışı vardır:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0,\xi) = \frac{1}{P_0(\xi)} \cdot$$

3°. Her bir $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında $G(x,\xi)$ fonksiyonu x değişkenine göre

$$\ell(G) = P_0(x)\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} + P_1(x)\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} + P_2(x)\frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} + \ldots + P_n(x)G(x,\xi) = 0$$

denklemini ve $U_\upsilon(G)=0, \quad \upsilon = 1,2,\ldots,n$ sınır şartlarını sağlıyor.

Teorem 3.3.1

(2.30) sınır değer probleminin, yani (2.9) ve (2.15) sınır değer probleminin yalnız trivial çözümü olduğunda, o zaman L diferansiyel operatörünün yalnız ve yalnız tek bir tane $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu vardır.

İspat:

Bunu ispatlamak için (2.10) denkleminin $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

çözümleri sistemini ele alalım.

$[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralığında $G(x,\xi)$ fonksiyonu da (3.1) denkleminin çözümü olduğundan ve (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

şeklinde olduğundan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitlerinin bir $c_1 = a_1, c_2 = a_2, \ldots, c_n = a_n$ değerinde

$$G(x,\xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x), \quad a \le x < \xi$$

ve $c_1 = b_1, c_2 = b_2, \ldots, c_n = b_n$ değerlerinde ise

$$G(x,\xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \ldots + b_n y_n(x), \; \xi < x \le b,$$

eşitlikleri şeklinde gösterilir. Burada biz $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $(n-2)-$inci mertebeye kadar tüm türevlerinin $x=\xi$ noktasında sürekli olması şartından aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\begin{aligned}
&\left[a_1 y_1(\xi) + a_2 y_2(\xi) + \ldots + a_n y_n(\xi)\right] - \left[b_1 y_1(\xi) + b_2 y_2(\xi) + \ldots + b_n y_n(\xi)\right] = 0 \\
&\left[a_1 y_1'(\xi) + a_2 y_2'(\xi) + \ldots + a_n y_n'(\xi)\right] - \left[b_1 y_1'(\xi) + b_2 y_2'(\xi) + \ldots + b_n y_n'(\xi)\right] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + a_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right] - \left[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right] = 0
\end{aligned}$$

Burada Green fonksiyonun aşağıdaki

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{P_0(\xi)}$$

şartından uygun olarak aşağıdaki eşitliği de buluruz:

$$\left[a_1y_1^{(n-1)}(\xi)+a_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}(\xi)\right]-\left[b_1y_1^{(n-1)}(\xi)+b_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\ldots+b_ny_n^{(n-1)}(\xi)\right]=-\frac{1}{P_0(\xi)}$$

Burada biz

$$c_1=b_1-a_1, c_2=b_2-a_2,\ldots,c_n=b_n-a_n$$

gibi alarak $c_1,c_2,\ldots,c_n$ için üstte yazdığımız denklemlerden aşağıdaki lineer homojen olmayan cebirsel denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} c_1y_1(\xi)+c_2y_2(\xi)+c_3y_3+\ldots+c_ny_n(\xi)=0, \\ c_1y_1'(\xi)+c_2y_2'(\xi)+c_3y_3'+\ldots+c_ny_n'(\xi)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1y_1^{(n-2)}(\xi)+c_2y_2^{(n-2)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(n-2)}(\xi)=0, \\ c_1y_1^{(n-1)}(\xi)+c_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(\xi)=\dfrac{1}{P_0(\xi)}. \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

Bu sistemin determinantı $y_1(\xi), y_2(\xi),\ldots,y_n(\xi)$ fonksiyonlarının Wronskii determinantıdır:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \cdots & y_n'(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \cdots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix} \qquad (3.8)$$

Adi türevli diferansiyel denklemler teorisinde adi türevli lineer diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri sisteminin Wronskiiyanının $[a,b]$ aralığının her bir noktasında sıfırdan farklı olduğu ispatlanır.

Bu yüzden de (3.2) cebirsel denklemler sisteminden $c_1, c_2, \dots, c_n$ tek değerli olarak bulunur.

Şimdi a_υ ve b_υ katsayılarını bulmak için $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $U_\upsilon(G) = 0$, $\upsilon = 1, 2, \dots, n$ sınır şartlarını sağladığını kullanalım. Bu amaçla $U_\upsilon(y)$ lineer formlarını aşağıdaki şekilde yazalım:

$$U_\upsilon(y) = U_{\upsilon a}(y) + U_{\upsilon b}(y) \tag{3.9}$$

Burada

$$U_{\upsilon a} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^\upsilon y_a^{(k)}, \quad U_{\upsilon b} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^\upsilon y_b^{(k)}$$

açılımını kullanarak $U_\upsilon(G) = 0$, $\upsilon = 1, 2, \dots, n$ eşitliklerini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$U_\upsilon(G) = a_1 U_{\upsilon a}(y_1) + a_2 U_{\upsilon a}(y_2) + \dots + a_n U_{\upsilon a}(y_n) + b_1 U_{\upsilon b}(y_1) + b_2 U_{\upsilon b}(y_2) + \dots + b_n U_{\upsilon b}(y_n) = 0$$

Burada $a_k = b_k - c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ yazarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$b_1 U_{\upsilon b}(y_1) + \dots + b_n U_{\upsilon b}(y_n) + (b_1 - c_1) U_{\upsilon a}(y_1) + \dots + (b_n - c_n) U_{\upsilon a}(y_n) = 0$$

Buradan da bu eşitlikleri kullanarak

$$b_1 U_\upsilon(y_1) + b_2 U_\upsilon(y_2) + \dots + b_n U_\upsilon(y_n) = c_1 U_{\upsilon a}(y_1) + \dots + c_n U_{\upsilon a}(y_n), \ \upsilon = 1, 2, \dots, n \tag{3.10}$$

aldığımızda (3.10) sistemi $b_1, b_2, \dots, b_n$ katsayıları için lineer homojen olmayan cebirsel denklemler sistemi bulunur. Bu sistemin determinantı $Ly = 0$ denkleminin yalnız trivial çözümü olduğundan sıfırdan farklıdır (bakınız (3.6)). Bu sistemden $b_1, b_2, \dots, b_n$ tek değerli olarak bulunur. $a_\upsilon = b_\upsilon - c_\upsilon$, $\upsilon = 1, 2, \dots, n$ eşitliklerinden ise $a_1, a_2, \dots, a_n$ tek değerli bulunur. Bununla L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunun varlığı ve tekliği ispatlanmış olur.

3.4. Green Fonksiyonunun Kullanılmasıyla Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması (Dönüştürülmesi)

Burada (2.30) denkleminin yalnız trivial $y(x) \equiv 0$ çözümünün olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 3.1.3' e esasen diferansiyel L operatörünün tersi L^{-1} operatörü vardır. Dikkate alalım ki, o zaman (1.3) eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu ise, yani (1.3) eşitliği ise $y = y(x)$ fonksiyonunun (1.1) diferansiyel denkleminin (1.2) sınır şartlarını sağlayan çözümü olduğunu gösterir. Burada biz bu $y = y(x)$ çözümünün $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli olan her bir $f(x)$ fonksiyonu için varlığını ve bu çözümün Green fonksiyonunun yardımıyla belirlenebildiğini (inşa edilebildiğini) gösterelim.

Böylece, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.4.1

(2.30) denkleminin yalnız trivial çözümü olduğunda, o zaman $[a, b]$ aralığında sürekli olan her bir $f(x)$ fonksiyonu için (1.3) denkleminin çözümü vardır. Bu çözüm ise,

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{3.11}$$

formülü ile bulunur. Bu formüldeki $G(x, \xi)$ fonksiyonu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonudur.

İspat:

$y(x)$ fonksiyonunun (3.11) formülü ile tanımlanmış fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu fonksiyonun (1.1) denkleminin (1.2) şartlarını sağlayan çözümü olduğunu gösterelim. Bununla biz $y = y(x)$ fonksiyonunun (1.3) denkleminin çözümü olduğunu göstermiş oluruz.

$G(x,\xi)$ fonksiyonunun kendisi ve x değişkenine göre $(n-2)-$ci mertebeye kadar ($(n-2)-$ci mertebede dahil) tüm türevleri $[a,b]$ aralığından alınmış her bir x ve ξ değerlerinde sürekli fonksiyonlar olduklarından (3.11) formülünde integral altındaki ifade $(n-2)$ kez x değişkenine göre diferansiyellenebilir. Bu yüzdende

$$y^{\upsilon}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{\upsilon}G(x,\xi)}{\partial x^{\upsilon}} f(\xi)d\xi\ ,\quad \upsilon=1,2,\ldots,(n-2) \tag{3.12}$$

eşitlikleri doğrudur ve (3.11) formülü ile tanımlanan $y(x)$ fonksiyonu ve (3.12) formülleri ile tanımlanan $y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n-2)}(x)$ türevleri $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olur.

Burada $\dfrac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}$ fonksiyonu $x=\xi$ noktasında süreksizdir. Bu yüzden de $y^{(n-1)}(x)$ ve $y^{(n)}(x)$ türevlerini hesaplamak için

$$y^{(n-2)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi$$

formülü ile bulunan $y^{(n-2)}(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$y^{(n-2)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi\,.$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki integrallerdeki integral altındaki $\dfrac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}$ fonksiyonu (a,x) ve (x,b) aralıklarında süreklidir ve bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi (a,x) ve (x,b) aralıklarında süreklidir. Bu yüzden de bu eşitliğin her yanını x değişkenine göre diferansiyelleyerek aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi+\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x-0}\cdot f(x)+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi-\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0}\cdot f(x) \tag{3.13}$$

$\dfrac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}$ türevinin $x=\xi$ noktasında sürekli olduğunu dikkate alırsak (3.13) eşitliğinin sağ yanındaki integral dışında olan terimlerin birbirlerini karşılıklı olarak götürdüğünü görüyoruz. Bu yüzden de (3.13) eşitliği aşağıdaki şekli alır:

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \qquad (3.14)$$

(3.14) eşitliğini aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \qquad (3.15)$$

Üstte yaptığımıza benzer şekilde (3.14) eşitliğinin her yanını x değişkenine göre bir daha diferansiyelleyerek aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$y^{(n)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi+\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0}\cdot f(x)+\int_x^b \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi-\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0}\cdot f(x) \qquad (3.16)$$

Biz burada Green fonksiyonunun

$$\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0}-\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0}=\frac{1}{P_0(x)}$$

özelliğini kullanarak (3.16) formülünü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$y^{(n)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi+\frac{1}{P_0(x)} \qquad (3.17)$$

Dikkate alalım ki, $U_\upsilon(y)$, $\upsilon=1,2,\ldots,n$ ifadelerine $y(x)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun $y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n-1)}(x)$ türevlerinin $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki değerleri dahildir. Bu yüzden (3.11), (3.12) ve (3.15) formüllerini ve $U_\upsilon(G)=0$, $\upsilon=1,2,\ldots,n$ özelliğini kullanarak

$$U_\upsilon(y)=\int_a^b U_\upsilon(G)f(\xi)d\xi\equiv 0,\quad \upsilon=1,2,\ldots,n$$

eşitliklerinin sağlandığını buluruz. Bununla biz (3.11) formülü ile tanımladığımız $y=y(x)$ fonksiyonunun (1.2) sınır şartlarını sağladığını göstermiş olduk. Şimdi biz (3.11) formülü ile tanımlanmış $y(x)$ fonksiyonunun $\ell(y)=f(x)$ denklemini sağladığını gösterelim. Bunu göstermek için (2.1) diferansiyel ifadesinde $y(x)$ fonksiyonunun ve $y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n)}(x)$ türevlerinin uygun olarak (1.3), (1.1), (3.12) ve (3.14) formülleri ile verilen ifadelerini yerlerine yazarak $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\ell(y)=\int_a^b \ell(G)f(\xi)d\xi+f(x)$$

$G(x,\xi)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığından keyfi alınmış ama değişmez sağlanan her bir $\xi\in[a,b]$ için (a,ξ) ve (ξ,b) aralıklarında $\ell(y)=0$ denklemini x değişkeninin fonksiyonu olarak sağladığından, yani integral altındaki $\ell(G)\equiv 0$ olduğundan $\ell(y)=f(x)$ eşitliğinin (3.11) formülü ile tanımlanan $y(x)$ fonksiyonu için sağlandığını buluruz. Böylece, teorem tam olarak ispatlanmış oldu.

Not 3.4.1 Aşağıdaki

$$Kf\equiv\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{3.18}$$

eşitliği ile tanımlanan K operatörüne integral operatör denir. Burada $a\le x,\xi\le b$ bölgesinde tanımlanmış iki x ve ξ değişkenlerine bağlı $K(x,\xi)$ fonksiyonuna K integral operatörünün çekirdeği denir. (3.11) eşitliğinden L^{-1} ters operatörünün $G(x,\xi)$ çekirdekli integral operatör olduğunu görüyoruz.

Not 3.4.2 (1.1) lineer diferansiyel denklemini ve aşağıdaki sınır değer şartını ele alalım:

$$U_\upsilon(y)=\gamma_\upsilon,\ \ \upsilon=1,2,\ldots,n \tag{3.19}$$

Burada $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ önceden verilmiş sabit sayılardır. $(1.1)-(3.19)$ sınır değer probleminin çözümünü bulmak için önce (2.9) denkleminin

$$U_\upsilon(y) = \delta_{k\upsilon}, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, n \tag{3.20}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $\delta_{k\upsilon}$ sayısı Kronekker sabiti olup

$$\delta_{k\upsilon} = \begin{cases} 1 & , k = \upsilon \\ 0 & , k \neq \upsilon \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan sabit sayıdır.

$(3.18)-(3.20)$ sınır değer problemini çözmek için (2.9) denkleminin genel çözümünü (2.11) göz önüne alıp, bu çözümdeki $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayılarını öyle seçmemiz gerekir ki,

$$r_k(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

fonksiyonu $(2.9)-(3.20)$ probleminin çözümü olsun. O zaman $(1.1)-(3.19)$ probleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k r_k(x) \tag{3.21}$$

3.5. Diferansiyel Operatörün Green Fonksiyonunun Tanımının Uygulanmasıyla İnşasına Ait Örnekler

Örnek 3.5.1

Burada örnek olarak $\ell(y) = -y''$ diferansiyel ifadesinin ve $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim. Bunun için önce (2.30) denkleminin, yani

$$\ell(y) \equiv -y'' = 0 \tag{3.22}$$

diferansiyel denkleminin homojen ve lineer

$$y(0)=0,\ \ y(1)=0 \tag{3.23}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün yalnız trivial $y(x)\equiv 0$ çözümü olduğunu gösterelim. Bunu gösterdiğimiz zaman, ele aldığımız L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunun var ve tek olduğunu belirlemiş olacağız. Burada (3.22) denkleminin $[0,1]$ aralığında lineer bağımsız çözümler sistemi bu denklemin

$$y_1(x)=1,\ \ y_2(x)=x$$

çözümleridir. Bu yüzden (3.22) denkleminin genel çözümü

$$y(x)=c_1+c_2x \tag{3.24}$$

şeklinde yazılır.

Böylece, (3.23) sınır şartlarından

$$y(0)=c_1=0,\ \ y(1)=c_2=0$$

eşitliklerini buluruz. Bu yüzden de (3.22) denkleminin (3.23) sınır şartlarını sağlayan çözümü, başka bir deyişle (2.30) denkleminin çözümü $y(x)\equiv 0$ olduğundan yalnız trivial çözümü vardır.

$[0,\xi)$ ve $(\xi,1]$ aralıklarında L operatörünün Green fonksiyonu (3.22) denkleminin çözümü olduğundan (3.24) formülüne uygun olarak L operatörünün Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde aramamız gerekir:

$$\begin{aligned} G(x,\xi)&=a_1\cdot 1+a_2\cdot x, && 0\le x<\xi \\ G(x,\xi)&=b_1\cdot 1+b_2\cdot x, && \xi<x\le 1 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Burada a_1,a_2 ve b_1,b_2 katsayıları aranan katsayılardır.

Green fonksiyonunun $x=\xi$ noktasında sürekli olması özelliğinden

$$b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot \xi - \left[a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \xi\right] = 0$$

şartını yazarız.

Green fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin $x = \xi$ noktasındaki sıçrayışı $\frac{1}{P_0(\xi)} = -1$ ifadesine eşit olan fonksiyon olması şartından

$$b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 - \left[a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1\right] = -1$$

şartını buluruz. Bu şartlardaki parantezleri açıp gruplaştırarak aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1) \cdot 1 + (b_2 - a_2) \cdot \xi = 0 \\ (b_1 - a_1) \cdot 0 + (b_2 - a_2) \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Bu sistemde

$$c_1 = b_1 - a_1, c_2 = b_2 - a_2 \qquad (3.26)$$

alarak bunu aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\begin{aligned}c_1 + c_2\xi &= 0 \\ c_2 &= -1\end{aligned}$$

Bu sistemden ise

$$c_1 = \xi, \; c_2 = -1 \qquad (3.27)$$

çözümünü buluruz. (3.26) eşitliklerinden

$$\left.\begin{aligned}a_1 = b_1 - c_1 = b_1 - \xi \\ a_2 = b_2 - c_2 = b_2 + 1\end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

eşitliklerini buluruz. a_1 ve a_2 katsayılarının (3.28) eşitlikleri ile ifade edilmiş değerlerini $G(x, \xi)$ Green fonksiyonunun (3.25) ifadesinde yerine yazarak Green fonksiyonu için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= (b_1-\xi)\cdot 1+(b_2+1)\cdot x, && 0\le x<\xi \\ G(x,\xi) &= b_1\cdot 1+b_2\cdot x, && \xi<x\le 1 \end{aligned} \qquad (3.29)$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $U_1(y)=y(0)=0$ ve $U_2(y)=y(1)=0$ sınır şartlarını sağlaması şartlarından uygun olarak $U_1(G)=0$ şartından $b_1-\xi=0$ veya $b_1=\xi$ $U_2(G)=0$ şartından $b_1+b_2=0$ veya $b_2=-\xi$ eşitliklerini buluruz.

Burada, b_1 ve b_2 katsayıları için bulduğumuz bu değerleri Green fonksiyonunun (3.29) eşitliği ile tanımlanan ifadesinde yerine yazarak diferansiyel L operatörünün aradığımız Green fonksiyonu için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x\ , & 0\le x<\xi\\ (1-x)\xi\ , & \xi<x\le 1\end{cases}$$

Örnek 3.5.2

Burada $\ell(y)=-y''$ diferansiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y(0)=0\\ U_2(y) &= y'(1)=0\end{aligned}$$

sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim. Bunun için (3.22) homojen diferansiyel denkleminin lineer bağımsız

$$y_1(x)=1,\quad y_2(x)=x$$

çözümleri sistemini ele alalım. (2.30) denkleminin, yani (3.22) denkleminin homojen

$$y(0)=0,\quad y'(1)=0$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün yalnız ve yalnız trivial çözüm olduğunu gösterelim. Burada (3.22) denkleminin genel çözümü (3.24) şeklinde olduğundan

$$y(0)=c_1=0,\quad y'(1)=c_2=0$$

olur. Bu yüzden de $Ly = 0$ denkleminin yalnız ve yalnız trivial çözümünün olduğu görülür. Bu yüzden de burada ele aldığımız diferansiyel L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu var ve tektir. Bu L operatörünün $G(x,\xi)$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x, \qquad 0 \le x < \xi \ , \\ G(x,\xi) &= b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x, \qquad \xi < x \le 1 \end{aligned}$$

şeklinde arıyoruz. Burada a_1, a_2 ve b_1, b_2 aranan katsayılardır.

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sürekli olması şartından

$$(b_1 - a_1) \cdot 1 + (b_2 - a_2) \cdot x = 0$$

eşitliğini ve $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasındaki türevinin sıçrayışının $\dfrac{1}{P_0(\xi)} = -1$ olması şartından uygun olarak

$$(b_2 - a_2) \cdot 1 = -1$$

şartını buluruz. Burada

$$b_1 - a_1 = c_1 \text{ ve } b_2 - a_2 = c_2$$

alırsak uygun olarak üstte yazdığımız sistemden c_1 ve c_2 parametrelerinin bulunması için aşağıdaki cebirsel sistemi buluruz:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 \xi &= 0, \\ c_2 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemi çözerek $c_1 = \xi,\ c_2 = -1$ olduğunu buluruz.

Burada biz

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - c_1 = b_1 - \xi \\ a_2 &= b_2 - c_2 = b_2 + 1 \end{aligned}$$

ifade ederek $G(x,\xi)$ fonksiyonu için

$$G(x,\xi) = (b_1 - \xi)\cdot 1 + (b_2 + 1)\cdot x, \qquad 0 \le x < \xi,$$
$$G(x,\xi) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x \qquad\qquad , \qquad \xi < x \le 1$$

eşitliklerini buluruz. Green fonksiyonunun

$$U_1(G) = G(x,\xi)\big|_{x=0} = 0$$

ve

$$U_2(G) = \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$$

sınır şartlarını sağlaması şartlarından uygun olarak

$$b_1 - \xi = 0 \text{ veya } b_1 = \xi \text{ ve } b_2 = 0$$

değerleri bulunur. Bulduğumuz bu $b_1 = \xi$ ve $b_2 = 0$ değerlerini $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun sonuncu ifadelerinde yerine yazarak ele aldığımız L operatörünün Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \xi \\ \xi, & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde buluruz.

Örnek 3.5.3

Burada $\ell(y) = y'' + y$ diferansiyel ifadesinin ve

$$U_1(y) = y(0) = 0$$
$$U_2(y) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim. Burada

$$\ell(y) \equiv y'' + y = 0$$

homojen diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemi

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \cos x$$

fonksiyonlarıdır. Bu yüzdende $\ell(y) = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

şeklinde yazılır. Burada c_1 ve c_2 sabit sayılardır. L operatörü için

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 0 & \cos 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $\det U = -1 \neq 0$ olur. Bu yüzdende (2.30) diferansiyel denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Böylece, diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonu var ve tektir.

Bu L operatörünün Green fonksiyonunu

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= a_1 \sin x + a_2 \cos x, \qquad 0 \le x < \xi \\ G(x,\xi) &= b_1 \sin x + b_2 \cos x, \qquad \xi < x \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

şeklinde arayalım. Burada a_1, a_2 ve b_1, b_2 aranan parametrelerdir.

Green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sürekli olduğu şartından aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$(b_1 - a_1)\sin\xi + (b_2 - a_2)\cos\xi = 0$$

$G(x,\xi)$ fonksiyonunun türevinin $x = \xi$ noktasında sıçrayışının $\frac{1}{P_0(\xi)} = 1$ ifadesine eşit olması şartından ise aşağıdaki şartı buluruz:

$$(b_1 - a_1)\cos\xi - (b_2 - a_2)\sin\xi = 1$$

Bulduğumuz bu eşitliklerde

$$b_1 - a_1 = c_1, \quad b_2 - a_2 = c_2$$

alırsak c_1 ve c_2 katsayılarının bulunması için aşağıdaki homojen olmayan cebirsel lineer denklemler sistemini buluruz:

$$\begin{aligned} c_1 \sin\xi + c_2 \cos\xi &= 0 \\ c_1 \cos\xi - c_2 \sin\xi &= 1 \end{aligned}$$

Bu sistemin birinci denkleminin her yanını $\cos\xi$ ikinci denklemin her yanını $\sin\xi$ fonksiyonu ile çarpıp birinci denklemden ikinci denklemi çıkarırsak

$$c_2 = -\sin\xi$$

eşitliğini buluruz. c_2 için bu ifadeyi sistemin birinci denkleminde $c_2 -$nin yerine yazıp her tarafını $\sin\xi$ ifadesine bölerek

$$c_1 = \cos\xi$$

eşitliğini buluruz. Uygun olarak $a_1 = b_1 - c_1$ ve $a_2 = b_2 - c_2$ eşitliklerinde c_1 ve c_2 için bulduğumuz ifadeleri yerlerine yazarak

$$a_1 = b_1 - \cos\xi \ , \ a_2 = b_2 + \sin\xi$$

eşitliklerini buluruz.

Bu eşitlikleri $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun üstteki ifadesinde dikkate alarak Green fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= (b_1 - \cos\xi)\sin x + (b_2 + \sin\xi)\cos x, && 0 \le x < \xi \\ G(x,\xi) &= b_1 \sin x + b_2 \cos x \qquad , && \xi < x \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun

$$U_1(y)=y(0)=0$$
$$U_2(y)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

sınır şartlarını sağlaması özelliğinden aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$U_1(G)=G(0,\xi)=b_2+\sin\xi=0$$
$$U_2(G)=G\left(\frac{\pi}{2},\xi\right)=b_1=0$$

Bulduğumuz bu eşitliklerden

$$b_2=-\sin\xi,\quad b_1=0$$

eşitlikleri bulunur. b_1 ve b_2 katsayılarının bulunmuş bu değerlerini $G(x,\xi)$ fonksiyonunun sonuncu eşitliklerinde yerine yazarak buluruz:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\cos\xi\sin x\ , & 0\le x<\xi\\ -\cos x\sin\xi\ , & \xi<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Bu formülle bulunan $G(x,\xi)$ fonksiyonu ele aldığımız lineer diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonudur.

Örnek 3.5.4

Şimdi $\ell(y)=y''-y$ diferansiyel ifadesinin ve $y(0)=0,\ y(1)=0$ sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim.

Bunun için

$$\ell(y)=y''-y=0$$

diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemini bulalım. Bu amaçla verilmiş denklemin

$$k^2 - 1 = 0$$

karakteristik denkleminin $k_1 = 1,\ k_2 = -1$ köklerine uygun çözümleri sistemini

$$y_1(x) = e^x,\ \ y_2(x) = e^{-x}$$

ele alalım. e^x ve e^{-x} fonksiyonları verilmiş denklemin lineer bağımsız çözümler sistemi olduğundan denklemin genel çözümü uygun olarak

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

şeklinde yazılır. Burada L operatörü için U matrisi

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu matrisin determinantı

$$\det U = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-1} - e \neq 0$$

sıfırdan farklı olduğundan $Ly = 0$ denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Bu yüzdende burada ele aldığımız diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonu var ve tektir.

Bu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu da $\ell(y) \equiv y'' - y = 0$ denkleminin $[0, \xi)$ ve $(\xi, 1]$ aralıklarında çözümü olduğundan L operatörünün Green fonksiyonunu da uygun olarak

$$G(x, \xi) = a_1 e^x + a_2 e^{-x},\ \ 0 \leq x < \xi$$

ve

$$G(x, \xi) = b_1 e^x + b_2 e^{-x},\ \ \xi < x \leq 1$$

şeklinde arıyoruz. Burada a_1, a_2 ve b_1, b_2 katsayıları bulunması gereken katsayılardır.

Burada $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $x=\xi$ noktasında sürekli olması özelliğinden

$$(b_1-a_1)e^{\xi}+(b_2-a_2)e^{-\xi}=0$$

eşitliğini buluruz. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine nazaran türevinin $x=\xi$ noktasında sıçrayışının $\dfrac{1}{P_0(\xi)}=1$ ifadesine eşit olması şartından

$$(b_1-a_1)e^{\xi}-(b_2-a_2)e^{-\xi}=1$$

eşitliğini buluruz.

Bulduğumuz bu iki eşitliğin her ikisinde de $b_1-a_1=c_1$ ve $b_2-a_2=c_2$ alalım. O zaman c_1 ve c_2 parametrelerinin bulunması için aşağıdaki denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{aligned} c_1e^{\xi}+c_2e^{-\xi}&=0 \\ c_1e^{\xi}-c_2e^{-\xi}&=1 \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemi c_1 ve c_2 bilinmeyenlerine göre çözerek

$$c_1=\frac{1}{2}e^{-\xi},\ \ c_2=-\frac{1}{2}e^{\xi}$$

olduğunu buluruz. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun

$$G(0,\xi)=0,\ \ G(1,\xi)=0$$

sınır şartlarını sağlaması şartından

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_2&=0 \\ b_1e+b_2e^{-1}&=0 \end{aligned}\right\}$$

veya

$$\begin{aligned} a_1&=-a_2 \\ e.b_1&=-b_2.e^{-1} \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. Burada bu üstteki eşitliklerden ve

$$c_1 = b_1 - a_1 = \frac{1}{2}e^{-\xi}$$
$$c_2 = b_2 - a_2 = -\frac{1}{2}e^{\xi}$$

eşitliklerinden a_1, a_2 ve uygun olarak b_1, b_2 katsayılarını bulalım. Sonuncu sistemin birinci eşitliğini e sayısıyla ikinci eşitliğini ise e^{-1} sayısıyla çarpıp taraf tarafa topladığımızda

$$b_1 e + b_2 e^{-1} - \left(a_1 e + a_2 e^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)}\right)$$

eşitliğini buluruz. Buradan da üstteki eşitlikleri kullanarak

$$\begin{cases} a_1 e + a_2 e^{-1} = -\frac{1}{2}\left(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)}\right) \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

eşitliğini buluruz. İkinci eşitlikten $a_1 = -a_2$ olur. Bunu birinci eşitlikte yerine yazarak

$$a_2(e^{-1} - e) = -\frac{1}{2}\left(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)}\right)$$

veya

$$a_2(e - e^{-1}) = \frac{1}{2}\left(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)}\right)$$

eşitliğini buluruz. Bu iki eşitlikten de

$$2a_2 = \frac{sh(1-\xi)}{sh1}$$

veya

$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{sh(1-\xi)}{sh1}$$

olur. $a_1 = -a_2$ olduğundan da

$$a_1 = -\frac{1}{2}\frac{sh(1-\xi)}{sh1}$$

olur. Burada

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{2}e^{-\xi}$$

olduğundan uygun olarak

$$b_1 = \frac{1}{2}\cdot e^{-\xi} - \frac{1}{2}\frac{sh(1-\xi)}{sh1}$$

ve

$$b_2 = a_2 - \frac{1}{2}e^{\xi}$$

olduğundan da

$$b_2 = \frac{1}{2}\frac{sh(1-\xi)}{sh1} - \frac{1}{2}e^{\xi}$$

eşitliklerini buluruz. a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları için bulduğumuz bu ifadeleri Green fonksiyonunun genel şekilde yazdığımız eşitliğinde yerlerine yazarak L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{shx.sh(\xi-1)}{sh1}, & 0 \le x < \xi \\ \dfrac{sh\xi.sh(x-1)}{sh1}, & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde buluruz.

3.6. Eşlenik Operatörün Green Fonksiyonunun Tanımı ve Bulunması Formülü

L diferansiyel operatörünün tersi bulunduğunda, o zaman lemma 2.1.7.3 e esasen eşlenik L^* operatörünün de tersi vardır. Bu yüzden eşlenik diferansiyel L^*

operatörünün de Green fonksiyonunun var olduğu ve tek olduğu görülür. Eşlenik diferansiyel L^* operatörünün Green fonksiyonunu $H(x,\xi)$ ile gösterelim.

Şimdi biz burada diferansiyel L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu ile eşlenik diferansiyel L^* operatörünün $H(x,\xi)$ Green fonksiyonu arasında ne gibi bağlantı olduğunu bulalım. Bunun için

$$L\varphi = f, \quad L^*\psi = g$$

alalım. O zaman

$$\varphi = L^{-1}f, \quad \psi = L^{*^{-1}}g$$

olur. Şimdi L ve L^* operatörlerinin eşlenik operatörler olduklarını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$\left(L\varphi, \psi\right) = \left(\varphi, L^*\psi\right)$$

Bu eşitlikten de $L\varphi = f$, $\psi = L^{*^{-1}}g$, $\varphi = L^{-1}f$, $L^*\psi = g$ olduklarını kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\left(L^{-1}f, g\right) = \left(f, L^{*^{-1}}g\right)$$

Buradan da eşlenik operatörlerin ters operatörlerinin de eşlenik oldukları görülür.

Sonuncu eşitliği açık şekilde yazarsak her bir sürekli $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\overline{g(x)}dxd\xi = \int_a^b\int_a^b \overline{H(\xi,x)}f(\xi)\overline{g(x)}dxd\xi$$

eşitliğinin sağlandığını buluruz. Böylece, bu sonuncu eşitlik her bir sürekli $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için sağlandığından

$$G(x,\xi) = \overline{H(\xi,x)} \tag{3.30}$$

eşitliği elde edilir. (3.30) eşitliğini sağlayan $G(x,\xi)$ ve $H(x,\xi)$ çekirdeklerine *eşlenik çekirdekler* denir.

Böylece, aşağıdaki lemma doğrudur:

Lemma 3.6.1

Eşlenik diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonları da eşlenik olur.

Şimdi L diferansiyel operatörünün özeşlenik diferansiyel operatör olduğunu varsayalım, yani

$$L \equiv L^*$$

olduğunu varsayalım. O zaman özeşlenik operatörler için $H(x,\xi) \equiv G(x,\xi)$ olduğu açıktır. Özeşlenik L operatörünün Green fonksiyonu (3.30) eşitliğine esasen

$$G(x,\xi) = \overline{G(\xi,x)} \tag{3.31}$$

eşitliği sağlanır.

(3.31) eşitliğini sağlayan çekirdeklere *Hermite çekirdeği* denir.

Böylece, özeşlenik operatörler için aşağıdaki lemma doğru olur.

Lemma 3.6.2

Özeşlenik diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonu Hermite çekirdeği olur.

4. PARAMETRE BULUNDURAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE PARAMETRE BULUNDURAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN İNTEGRAL DENKLEME GETİRİLMESİ

4.1. Parametre Bulunduran Sınır Değer Problemi

Pratik problemlerin çözümlerinde sık sık aşağıdaki şekilde parametre bulunduran ve (2.15) sınır şartlarını sağlayan sınır değer problemleri ile karşılaşırız:

$$\ell(y) = \lambda y + f(x) \tag{4.1}$$

Burada $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_\upsilon(y)$ lineer formları (2.1) ve (1.2) eşitlikle tanımlanır.

λ parametredir, $f(x)$ ise x değişkenine bağlı verilmiş fonksiyondur.

L diferansiyel operatörünün (2.1) diferansiyel ifadesinin ve (2.15) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. O zaman (4.1) diferansiyel denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemi aşağıdaki operatör denkleminin çözümünün bulunması problemi şeklinde yazabiliriz:

$$Ly = \lambda y + f \tag{4.2}$$

Burada özel halde $f(x) \equiv 0$ olduğunda (4.2) denklemi (2.38) homojen operatör denklemine dönüşür

(2.38) operatör denklemi (2.40) homojen lineer diferansiyel denklemin (2.15) homojen lineer sınır şartlarındaki çözümünün bulunması problemine equivalenttir(eşdeğerdir).

Bir daha dikkate alalım ki, (2.38) denklemi ve bu denkleme equivalent olan $(2.40)-(2.15)$ sınır değer problemi homojen sınır değer problemi olup, lineer denklemlerdir. $y(x) \equiv 0$ trivial çözümü her bir λ için bu denklemlerin çözümüdür.

λ parametresinin (2.38) operatör denklemindeki ve $(2.40)-(2.15)$ sınır değer problemindeki böyle üstte gösterdiğimiz değerlerine L operatörünün (ve uygun olarak $(2.40)-(2.15)$ sınır değer problemlerinin) *karakteristik değerleri* ve bu karakteristik değerlere uygun (2.38) denkleminin *trivial olmayan* çözümlerine (uygun olarak $(2.40)-(2.15)$ sınır değer probleminin bu karakteristik değerlere uygun trivial olmayan çözümlerine) *karakteristik fonksiyonları* denir.

Diferansiyel L operatörünün ve uygun olarak $(2.40)-(2.15)$ sınır değer probleminin karakteristik değerlerinin ve karakteristik fonksiyonlarının bulunması problemi lineer diferansiyel operatörler teorisinde en önemli problemlerdendir. Bu problemin çözümü parametre bulunduran sınır değer problemlerinin integral denklemlere getirilmesiyle kolaylaştırılabilir.

4.2. Parametre Bulunduran Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denkleme Getirilmesi

Şimdi biz burada $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.15) sınır şartlarının doğurduğu L operatörünün L^{-1} tersinin olduğunu varsayalım. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olsun. O zaman (4.2) denkleminin her yanını soldan L^{-1} operatörü ile çarparak

$$y = \lambda L^{-1} y + g \tag{4.3}$$

eşitliğini, buradan da

$$g = L^{-1} f \tag{4.4}$$

eşitliğini buluruz. L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu kullanarak (4.3) operatör denklemini ve uygun olarak g elemanının (4.4) eşitliği ile tanımlanan ifadesini açık olarak

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi) y(\xi) d\xi + g(x) \tag{4.5}$$

$$g(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{4.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada aranan $y(x)$ fonksiyonunun bulunması için bulduğumuz (4.5) denklemi ikinci çeşit Fredholm denklemidir. $(4.1)-(2.15)$ sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi $(4.5)-(4.6)$ ikinci çeşit integral denkleminin çözümünün bulunması problemleri equivalent problemlerdir.

Böylece biz burada aşağıdaki lemmayı ispatlamış olduk.

Lemma 4.2.1

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.15) sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel L operatörünün Green fonksiyonu $G(x,\xi)$ bulunduğunda parametre sağlayan homojen olmayan lineer (4.1) diferansiyel denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemi lineer (4.5) integral denkleminin (4.6) formülü ile bulunan $g(x)$ fonksiyonunun da çözümünün bulunması problemine equivalenttir.

Burada $f(x) \equiv 0$ özel halinde (2.40) homojen lineer diferansiyel denkleminin homojen (2.15) sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümlerinin bulunması problemi uygun olarak homojen

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi) y(\xi) d\xi \tag{4.7}$$

lineer integral denkleminin trivial olmayan çözümlerinin bulunması problemine equivalenttir.

4.3. İkinci Çeşit Fredholm Denkleminin Rezolventi ve Parametre Bulunduran Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı Hakkındaki Teorem

(4.7) integral denkleminin $G(x,\xi)$ çekirdeği sürekli çekirdek olduğundan bu homojen (4.7) integral denklemine, integral denklemler teorisinde belli olan Fredholm teorisi uygulanabilir.

Fredholm teorisinden bellidir ki, sürekli çekirdekli (4.7) integral denkleminin, sayılabilirden fazla olmayan sayıda, sonlu limit noktası olmayan

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

karakteristik sayıları bulunur.

(4.5) homojen olmayan integral denkleminin, bu denklemdeki λ parametresinin karakteristik değerinden farklı her bir $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$ değerlerinde denklemin keyfi sürekli $g(x)$ sağ yanı için çözümü vardır ve (4.5) denkleminin $\lambda \neq \lambda_n$ için çözümü

$$y(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) g(\xi) d\xi + g(x) \tag{4.8}$$

formülü ile bulunur. Bu formüldeki $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonu $G(x, \xi)$ çekirdeğinin rezolventidir. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun inşası Fredholm integral denklemler teorisinde verilir. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığından alınmış ve sağlanan edilen x ve ξ değerleri için λ parametresinin meramorf (iki tam fonksiyonun orantısı şeklinde gösterilen) fonksiyonu olur. Bu meramorf $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun kutup noktaları (polyusları) (4.7) homojen integral denkleminin karakteristik değerleri olur. Böylece, burada aşağıdaki sonuç alınmış olur:

Teorem 4.3.1

(2.9) denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümü yalnız trivial çözüm olduğunda

a) Homojen (2.15) ve (2.40) sınır değer probleminin sonlu limit noktası olmayan ve sayılabilirden fazla olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ karakteristik sayıları bulunur;

b) λ parametresinin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ karakteristik değerlerinden farklı $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots, n$ her bir değerinde homojen olmayan (4.1) ve (2.15) sınır değer probleminin $[a,b]$ aralığında sürekli olan her bir $f(x)$ fonksiyonu için çözümü vardır.

Dikkate alalım ki bu sonuç lineer integral denklemlerin Fredholm teorisine dayanılarak bulundu. Fakat biz bu sonucu önceki kısımlarda verilmiş sonuçlara dayanarak ta bulabilirdik.

4.4. Parametre Bulunduran Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere Getirilmesine Ait Örnek

Örnek 4.4.1

Biz burada

$$y'' + y = \lambda y + f(x) \tag{4.9}$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0, \;\; y'(1) = 0 \tag{4.10}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini bu probleme equivalent olan lineer integral denkleminin çözümünün bulunması problemine getirilmesini gösterelim. Bu amaçla biz $\ell(y) = y'' + y$ diferansiyel ifadesinin ve (4.10) sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu inşa edelim. Önce (2.30) denkleminin yalnız trivial çözümünün olduğunu gösterelim. Burada

$$y'' + y = 0 \tag{4.11}$$

denkleminin $y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ lineer bağımsız çözümleri sistemi olduğundan bu (4.11) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \tag{4.12}$$

şeklinde yazılır. (4.10) sınır şartlarından

$$y(0)=c_2=0 \text{ ve } y'(1)=c_1\cos 1=0$$

oldukları bulunur. $\cos 1\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur. Böylece (2.30) denkleminin, yani homojen

$$y''+y=0,$$

$$y(0)=0,\ y'(1)=0$$

sınır değer probleminin yalnız trivial çözümü vardır. (2.30) denkleminin yalnız trivial çözümü olduğundan L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu var ve tektir. L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu $[0,\xi)$ ve $(\xi,1]$ aralığında homojen (4.11) denkleminin çözümü olduğundan ve (4.11) denkleminin genel çözümü (4.12) şeklinde olduğundan diferansiyel L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde arayalım:

$$G(x,\xi)=a_1\sin x+a_2\cos x,\qquad 0\le x<\xi \tag{4.13}$$

$$G(x,\xi)=b_1\sin x+b_2\cos x,\qquad \xi<x\le 1 \tag{4.14}$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $x=\xi$ noktasında sürekli olması şartından

$$(b_1-a_1)\sin\xi+(b_2-a_2)\cos\xi=0 \tag{4.15}$$

eşitliğini buluruz. $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun x değişkenine göre türevinin $x=\xi$ noktasında değeri $\dfrac{1}{P_0(\xi)}=1$ ifadesine eşit olan sıçrayışa sahip olması şartından ise

$$(b_1-a_1)\cos\xi-(b_2-a_2)\sin\xi=1 \tag{4.16}$$

eşitliğini buluruz. Burada biz (3.26) şeklinde gösterelim. O zaman (4.15) ve (4.16) denklemlerinden c_1 ve c_2 parametrelerini bulmak için

$$c_1\sin\xi+c_2\cos\xi=0$$
$$c_1\cos\xi-c_2\sin\xi=1$$

denklemler sistemini buluruz. Bu sistemi c_1 ve c_2 bilinmeyenlerine göre çözerek

$$c_1 = \cos\xi, \ \ c_2 = -\sin\xi \tag{4.17}$$

eşitliklerini buluruz. Bu çözümleri (3.26) eşitliklerinde dikkate alarak

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - c_1 = b_1 - \cos\xi \\ a_2 &= b_2 - c_2 = b_2 + \sin\xi \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. a_1 ve a_2 için bulduğumuz

$$a_1 = b_1 - \cos\xi \tag{4.18}$$

$$a_2 = b_2 + \sin\xi \tag{4.19}$$

değerlerini Green fonksiyonunun (4.13) ifadesinde yerine yazdığımızda Green fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= (b_1 - \cos\xi)\sin x + (b_2 + \sin\xi)\cos x, && 0 \le x < \xi \\ G(x,\xi) &= b_1 \sin x + b_2 \cos x, && \xi < x \le 1 \end{aligned}$$

L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu (4.10) sınır şartlarını da sağlamalıdır. Green fonksiyonunun bu özelliğini kullanarak

$$G(0,\xi) = b_2 + \sin\xi = 0$$

ve

$$G'_x(1,\xi) = b_1 \cos 1 - b_2 \sin 1 = 0$$

eşitliklerini buluruz. Bu eşitliklerden

$$b_2 = -\sin\xi \tag{4.20}$$

$$b_1 = -\frac{\sin 1 \cdot \sin\xi}{\cos 1} \tag{4.21}$$

değerlerini buluruz. b_1 ve b_2 için bulduğumuz (4.21) ve (4.20) değerlerini uygun olarak (4.18) ve (4.19) eşitliklerinde yerlerine yazarak

$$a_1 = -\frac{\sin 1 \cdot \sin\xi}{\cos 1} - \cos\xi = -\frac{\cos(\xi - 1)}{\cos 1}, \tag{4.22}$$

$$a_2 = b_2 + \sin\xi = -\sin\xi + \sin\xi = 0 \tag{4.23}$$

olduklarını buluruz. a_1, a_2, b_1 ve b_2 katsayıları için bulduğumuz bu değerleri $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun (4.13) ve (4.14) ifadelerinde yerlerine yazarak $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\cos(1-\xi)\sin x}{\cos 1}, & 0 \le x < \xi \\ -\dfrac{\sin\xi\cos(x-1)}{\cos 1}, & \xi < x \le 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

şeklinde buluruz. (4.24) Green fonksiyonunun kullanılmasıyla $(4.9)-(4.10)$ sınır değer problemi bu probleme equivalent olan

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi) y(\xi) d\xi + g(x) \tag{4.25}$$

integral denkleminin

$$g(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{4.26}$$

şartında çözümünün bulunması problemine getirilmiş olur.

4.5. İkinci Çeşit Fredholm Denkleminin Rezolventinin Genel İnşası Yöntemi

Aşağıdaki

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds \tag{4.27}$$

Fredholm denklemlerini ele alalım. Burada f(x) fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli önceden verilmiş fonksiyondur. $K(x,s)$ fonksiyonu $[a,b]x[a,b]$ karesinde sürekli önceden verilmiş fonksiyondur. $K(x,s)$ fonksiyonu (4.27) denkleminin çekirdeğidir. Burada $y(x)$ aranan fonksiyondur.

(4.27) denkleminin genel çözümünü

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\varphi_{n}(x) \tag{4.28}$$

kuvvet serisi şeklinde arayalım. (4.28) ifadesini (4.27) integral denkleminde yerine yazarak ve $\lambda-$nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ katsayıları için aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x)=f(x),\\&\varphi_n(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds,\ (n=1,2,3,\ldots)\end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Burada $|K(x,s)|\le M,\ (x,s)\in[a,b]x[a,b]$ ve $|f(x)|\le N,\ x\in[a,b]$ eşitsizlikleri sağlandığında (4.29) eşitliklerinden aşağıdaki değerlendirmeler bulunur

$$|\varphi_n(x)|\le M^{n}N(b-a)^{n}$$

Bu yüzden (4.28) serisi

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$$

bölgesinde yakınsak seri olur. (4.29) formüllerini kullanarak (4.28) çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\int_a^b K_n(x,s)f(s)ds \tag{4.30}$$

veya

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,s,\lambda)f(s)ds \tag{4.31}$$

$$\Gamma(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) \tag{4.32}$$

$K_n(x,s)$ katsayılarına integrallenen çekirdekler denir. $K_n(x,s)$ aşağıdaki şekilde bulunurlar:

$$\left.\begin{aligned} &K_1(x,s) = K(x,s) \\ &K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt, \quad (n = 2,3,\ldots). \end{aligned}\right\}$$

$\Gamma(x,s,\lambda)$ fonksiyonuna (4.27) denkleminin rezolventi denir ve $|\lambda|-$nın küçük değerlerinde kuvvet serisi şeklinde bulunur.

4.6. Yozlaşmış Çekirdekli İkinci Çeşit Fredholm Denkleminin Rezolventinin İnşası Yöntemi

Fredholm denkleminin $K(x,s)$ çekirdeği

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s) \tag{4.33}$$

şeklinde gösterilebildiğinde $K(x,s)$ çekirdeğine yozlaşmış çekirdek denir. (4.33) açılımındaki $\alpha_i(x)$ ve $\beta_i(x)$ fonksiyonları $(i = 1,2,\ldots,n)$ $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız fonksiyonlar olduklarını varsayabiliriz.

(4.33) şekilli çekirdeği olan ikinci çeşit (4.27) Fredholm denklemleri çok kolay çözülür. Gerçektende (4.33) açılımını (4.27) denkleminde dikkate alarak aşağıdaki

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x) \tag{4.34}$$

formülünü buluruz. Burada

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s)y(s)ds, \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{4.35}$$

Burada (4.35) ifadesine (4.34) formülünü yazarak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini buluruz:

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(s) ds, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

veya

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_{ji} = f_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.36}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds \tag{4.37}$$

(4.36) sistemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji} \right) c_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.38}$$

burada δ_{ij} – kronekker sembolüdür. (4.36) probleminin determinantını aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ji}) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{21} & \ldots & -\lambda\gamma_{n1} \\ -\lambda\gamma_{12} & 1-\lambda\gamma_{22} & \ldots & -\lambda\gamma_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda\gamma_{1n} & -\lambda\gamma_{2n} & \ldots & 1-\lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Delta_{ij}(\lambda)$ ifadesi $\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ji}$ elemanının $\Delta(\lambda)$ determinantında cebirsel tümleyeni olsun. $\Delta(\lambda) \neq 0$ şartında kramer yöntemi ile

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) f_i}{\Delta(\lambda)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eşitlikleri bulunur.

Böylece, $(4.34)-$ün yardımıyla (4.27) integral denkleminin tek bir

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}f_j\alpha_i(x) \tag{4.39}$$

çözümü bulunur.

Bu formülde f_j-nin yerine $((4.37)$ ifadesini yazarak aşağıdaki formülü buluruz:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{\Delta(x,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(s)ds, \tag{4.40}$$

burada

$$\Delta(x,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_j(s)\Delta_{ji}(\lambda).$$

(4.30) formülünden (4.27) denkleminin rezolventini aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\Gamma(x,s,\lambda)=\frac{\Delta(x,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_j(s)\frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.41}$$

5. $L-\lambda I$ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONUNUN TANIMI VE BU TANIM ESASINDA İNŞAA YÖNTEMİ

5.1. $L-\lambda I$ Diferansiyel Operatörünün Green Fonksiyonunun Tanımı

L operatörü $\ell(y) = y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y$ diferansiyel ifadesinin ve $U_\upsilon(y) = 0,\ \ \upsilon = 1,2,3,\ldots,n$ sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olsun. λ nın bir parametre, I nın ise birim operatör olduğunu varsayalım. Burada $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonunun inşa edilmesi metodunu gösterelim. Başka bir değişle burada biz $L-\lambda I$ operatörünün tersinin bulunması ($L-\lambda I$ operatörünün dönüştürülmesi) metodunu verelim.

$L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu inşa edildiğinde $(L-\lambda I)^{-1}$ ters operatörü inşa edilmiş olur. Bu yüzden de $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonunun inşa edilmesi çok önemli bir problemdir.

$L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonunu inşa etmek için (2.40) homojen diferansiyel denkleminin (2.42) başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri sistemini uygun olarak (2.43) ile gösterelim. $(2.40)-(2.42)$ başlangıç değer probleminin $y_1 = y_1(x,\lambda), y_2 = y_2(x,\lambda),\ldots, y_n = y_n(x,\lambda)$ çözümleri sistemine (2.40) diferansiyel denkleminin *normalleştirilmiş fundamental çözümler sistemi* veya *normalleştirilmiş lineer bağımsız çözümler sistemi* denir.

Şimdi biz burada homojen olmayan (4.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için Lagrange–nin sabitlerin varyasyonu metodunu uygulayarak (4.1) denkleminin iki şekilde genel çözümünü bulalım:

$$y(x) = \sum_{\upsilon=1}^{n} c_\upsilon^{(1)} y_\upsilon(x,\lambda) + \int_a^x \left(\sum_{\upsilon=1}^{n} \frac{W_\upsilon(\xi)}{W(\xi)} y_\upsilon(x,\lambda) \right) f(\xi)d\xi \tag{5.1}$$

$$y(x) = \sum_{\upsilon=1}^{n} c_\upsilon^{(2)} y_\upsilon(x,\lambda) - \int_x^b \left(\sum_{\upsilon=1}^{n} \frac{W_\upsilon(\xi)}{W(\xi)} y_\upsilon(x,\lambda) \right) f(\xi)d\xi \tag{5.2}$$

Burada (5.1) ve (5.2) formüllerindeki $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}$ ve $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)}$ katsayıları uygun olarak keyfi sabit sayılardır. $W(\xi)$ uygun olarak (2.43) çözümler sisteminin $x = \xi$ noktasında Wronskiyanı olup (3.8) formülü ile tanımlanan determinanttır.

$W_1(\xi), W_2(\xi), \dots, W_n(\xi)$ fonksiyonları $W(\xi)$ Wronskii determinantının birinci satır elemanlarının, yani (3.8) determinantında birinci satırdaki $y_1^{(n-1)}(\xi), \dots, y_n^{(n-1)}(\xi)$ elemanlarının cebirsel tamamlayıcılarıdır. (4.1) denkleminin genel çözümü için bulduğumuz (5.1) ve (5.2) eşitliklerini taraf tarafa toplayıp 2 ye böldüğümüzde (5.1) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = \sum_{\upsilon=1}^{n} c_\upsilon y_\upsilon(x,\lambda) + \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{5.3}$$

formülü ile buluruz. Bu (5.3) formülündeki $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları keyfi sabit sayılardır, $g(x,\xi)$ fonksiyonu ise

$$g(x,\xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ y_1^{(n-2)}(\xi,\lambda) & y_2^{(n-2)}(\xi,\lambda) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi,\lambda) \\ y_1^{(n-3)}(\xi,\lambda) & y_2^{(n-3)}(\xi,\lambda) & \dots & y_n^{(n-3)}(\xi,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) & \dots & y_n(\xi,\lambda) \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

formülü ile bulunur. (5.4) eşitliğinin sağ yanındaki ifadenin karşısındaki "+" işareti $x > \xi$ eşitsizliği sağlandığında, "–" işareti ise $x < \xi$ eşitsizliği sağlandığında alınır.

Şimdi burada biz (5.3) formülündeki keyfi sabit $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılarını öyle seçelim ki, (4.1) denkleminin (5.3) şeklinde bulduğumuz genel çözümü (2.15) sınır şartlarını sağlasın.

Başka bir deyişle (4.1) denkleminin (5.3) şeklindeki genel çözümündeki $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabit katsayılarını öyle seçelim ki, bu seçimle (4.1) denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için aşağıdaki

$$\sum_{j=1}^{n} c_j U_\upsilon(y_j) + \int_a^b U_\upsilon(g) f(\xi) d\xi = 0, \ \upsilon = 1,2,\dots,n \tag{5.5}$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. (5.5) eşitlikleri $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılarının bulunması için homojen olmayan lineer cebirsel denklemler sistemidir. (5.5) sisteminden $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerini bulup (5.3) formülünde yerlerine yazdığımızda (4.1) denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \tag{5.6}$$

formülü ile bulunur. Bu formüldeki $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu $L-\lambda I$ diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olup

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} \cdot H(x,\xi,\lambda) \tag{5.7}$$

formülündeki Δ ifadesi (2.44) determinantının sonucu ile bulunur.

$$H(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) & U_2(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

formülleri ile bulunur. Dikkate alalım ki, λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olmadığında, λ parametresinin bu değeri için $\Delta(\lambda) \neq 0$ olur. Bu yüzdende λ sayısı L operatörünün karakteristik değeri olmadığında (5.6) ve (5.7) formüllerinin anlamı olur. Böylece aşağıdaki lemmayı ispatlamış olduk.

Sonuç 5.1.1

$L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu (5.7),(2.44),(5.8) ve (3.8),(5.4) formülleri ile tanımlanır.

5.2. $L-\lambda I$ Operatörünün Green Fonksiyonunun İnşasına Ait Örnek

Örnek 5.2.1

$$-y'' = \lambda^2 y + f(x) \tag{5.9}$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{5.10}$$

sınır şartlarını sağlayan sınır değer probleminin $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunu inşa edin ve bu problemin çözümünü bulun.

Çözüm:

Önce

$$-y'' = \lambda^2 y \tag{5.11}$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

ve

$$\begin{aligned} y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

başlangıç şartlarını sağlayan

$$y_1 = y_1(x,\lambda), \quad y_2 = y_2(x,\lambda)$$

fundamental çözümler sistemini bulalım. (5.11) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x \tag{5.14}$$

şeklinde yazılır.

(5.12) şartlarının sağlanmasından $c_1 = 1,\ c_2 = 0$ olduğu bulunur. Böylece,

$$y_1 = y_1(x,\lambda) = \cos x$$

şeklinde bulunur. (5.13) şartlarının sağlanmasından ise $c_1 = 0$ ve $c_2 = \frac{1}{\lambda}$ olduğu bulunur. Buradan da

$$y_2 = y_2(x,\lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

olduğunu buluruz. Demek ki, (5.11) denkleminin normalleştirilmiş fundamental çözümleri sistemi

$$y_1(x,\lambda) = \cos \lambda x, \quad y_2(x,\lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

olur.

Şimdi ele aldığımız problem için fundamental $g(x,\xi)$ çözümünü bulalım. Burada $g(x,\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki formül yardımı ile bulunur:

$$g(x,\xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)P_0(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix}$$

Ele aldığımız problem için

$$P_0(\xi) = -1; \quad W(\xi) = \begin{vmatrix} y_1'(\xi,\lambda) & y_2'(\xi,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix} = y_1'(\xi,\lambda)y_2(\xi,\lambda) - y_1(\xi,\lambda)y_2'(\xi,\lambda)$$
$$= -\lambda \sin \lambda\xi \cdot \frac{\sin \xi\lambda}{\lambda} - \cos \lambda\xi \cdot \cos\lambda\xi = -1$$

ifadelerini buluruz. Böylece,

$$W(\xi,\lambda) \cdot P_0(\xi) = 1$$

olduğunu buluruz. Bunları kullanarak

$$\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda x & \dfrac{\sin\lambda x}{\lambda} \\ \cos\lambda\xi & \dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\left(\cos\lambda x.\sin\lambda\xi - \sin\lambda x.\cos\lambda\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(\sin\lambda x.\cos\lambda\xi - \sin\lambda\xi.\cos\lambda x\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\sin\lambda(x-\xi)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sin\lambda(\xi-x)$$

Buradan da $g(x,\xi)$ fonksiyonu

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\xi-x), & \xi < x \\ -\dfrac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\xi-x), & x < \xi \end{cases} \tag{5.15}$$

şeklinde bulunur. Şimdi $G(x,\xi,\lambda) = \dfrac{1}{\Delta(\lambda)}\cdot H(x,\xi,\lambda)$ formülündeki $\Delta(\lambda)$ determinantını hesaplayalım.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\lambda & \dfrac{\sin\lambda}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

Böylece, $\Delta(\lambda) = \dfrac{\sin\lambda}{\lambda}$ olduğu bulunur. Şimdi $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunu hesaplayalım. Verilmiş problem için

$$H(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(g) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda x & \dfrac{\sin\lambda x}{\lambda} & g(x,\xi) \\ 1 & 0 & -\dfrac{\sin\lambda\xi}{2\lambda} \\ \cos\lambda & \dfrac{\sin\lambda}{\lambda} & \dfrac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\xi-1) \end{vmatrix}$$

ifadesini buluruz. Bu determinantı açtığımızda $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunu

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda x.\sin\lambda(1-\xi)}{\lambda.\sin\lambda}, & 0\le x<\xi\\[2mm] \dfrac{\sin\lambda\xi.\sin\lambda(1-x)}{\lambda.\sin\lambda}, & \xi<x\le 1\end{cases}$$

şeklinde buluruz.

6. $\delta-$FONKSİYONUNUN TANIMI VE $\delta-$FONKSİYONUNUN KULLANILMASI İLE GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI

6.1. δ – Fonksiyonunun Tanımı

Biz matematik analizde fonksiyonel dizilerin yakınsaklığının farklı–farklı çeşitlerini gördük.

Mesela, (a,b) aralığında tanımlanmış

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \tag{6.1}$$

fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı, orta quadratik yakınsaklığı zayıf yakınsaklığı vs. bu gibi yakınsaklıklarla karşılaştık.

Hatırlatalım ki, (6.1) fonksiyonel dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını aldığımızda öyle $N > 0$ sayısı vardır öyle ki $n > N$ şartını sağlayan her bir n doğal sayısı için ve her bir $p = 1,2,3,\dots$ doğal sayıları için ve her bir $x \in (a,b)$ için

$$\left|U_{n+p}(x) - U_n(x)\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında, (6.1) dizisi (a,b) aralığında *düzgün yakınsaktır* denir.

(6.1) dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında öyle $N > 0$ sayısı vardır öyle ki, $n > N$ şartını sağlayan her bir n doğal sayısı için ve her bir $p = 1,2,3,\dots$ doğal sayıları için

$$\int_a^b \left|U_{n+p}(x) - U_n(x)\right|^2 dx < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında, (6.1) dizisi (a,b) aralığında *orta quadratik yakınsaktır* denir.

(6.1) dizisi için (a,b) aralığında sürekli olan keyfi $f(x)$ fonksiyonları için sayısal

$$\int_a^b f(x)u_n(x)dx \quad , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

dizisi yakınsak dizi olduğunda (6.1) fonksiyonel dizisi (a,b) aralığında *zayıf yakınsaktır* denir.

Yakınsak diziler için uygun şekilde her bir hal için *dizinin limiti* tanımlanır. Burada önemli bir durumla karşılaşılabilir. Mesela, biz (a,b) aralığında sürekli olan fonksiyonlar sınıfını ele aldığımızı varsayalım. (6.1) fonksiyonel dizisinin her bir elemanının (teriminin) (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını da varsayalım. O zaman (6.1) dizisi (a,b) aralığında düzgün yakınsak olduğunda bu dizinin limiti de (a,b) aralığında sürekli fonksiyon olur. Yani bu halde (6.1) dizisinin limiti de dizinin elemanlarının dahil olduğu (a,b) aralığında sürekli olan fonksiyonların sınıfına dahil olur. Ama mesela, (6.1) dizisi ortalama yakınsak olduğunda veya zayıf yakınsak olduğunda bu özellik sağlanmayabilir.

Ama yakınsak dizilerin limitleri bu dizilerin dahil olduğu sınıfa dahil olmadığı hallerde ele alınmış dizinin dahil olduğu sınıf öyle genişletilir ki, bu sınıfta ki yakınsak dizilerin limitleri genişletilmiş sınıfa dahil olur. Dikkate alalım ki, *genişletilmiş sınıf* ele alınmış sınıfın elemanlarından ve yakınsak dizilerin limitlerinden oluşturulur.

Verilmiş sınıfın genişletilmesiyle biz reel sayılar teorisinde karşılaştık. Reel sayılar teorisinde irrasyonel sayı equivalent rasyonel sayılar dizisinin bir sınıfı gibi tanımlanır.

Şimdi burada zayıf yakınsak anlamda limit fonksiyon tanımladığımızda başka bir deyişle zayıf yakınsak anlamda limit eleman tanımladığımızda $\{u_n\}$ ve $\{\upsilon_n\}$ dizileri equivalent oldukları durumda bu dizilerin aynı limit elemanı (veya limit fonksiyonu) vardır deriz. Dikkate alalım ki, $\{u_n - \upsilon_n\}$ dizisi sıfıra zayıf yakınsadığında, yani (a,b) aralığında sürekli olan keyfi $f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\big(u_n(x)-\upsilon_n(x)\big)dx=0$$

şartı sağlandığında $u_n(x)$ ve $\upsilon_n(x)$ dizileri equivalent dizilerdir denir.

Burada aşağıdaki yöntemle özel bir dizinin tanımlanmasını ele alalım.

Reel eksenden keyfi bir $x_0\in(-\infty,+\infty)$ noktası alalım. $\varepsilon_n>0$ sayısı alıp $(x_0-\varepsilon_n,x_0+\varepsilon_n)$ aralığının dışında sıfıra eşit olan ve $(x_0-\varepsilon_n,x_0+\varepsilon_n)$ aralığında negatif olmayan $\{\delta_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisini ele alalım. $\{\delta_n(x)\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

1) $n\to\infty$ şartında $\varepsilon_n\to 0$;

2) $a<x_0<b$ ve her bir n doğar sayısı için

$$\int_a^b \delta_n(x)dx=1$$

Bu şartları sağlayan $\{\delta_n(x)\}$ fonksiyonel dizisine x_0 noktasının *lokal normalleştirilmiş dizisi* denir.

$\{\delta_n(x)\}$ dizisi zayıf yakınsak dizidir. $\{\delta_n(x)\}$ dizisinin limit elemanına x_0 noktasının $\delta-$fonksiyonu denir ve $\delta(x_0,x)$ gibi gösterilir.

Dikkate alalım ki, $\{u_n(x)\}$ dizisi (a,b) aralığında zayıf yakınsadığında ve $u(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında bu $\{u_n(x)\}$ dizisinin zayıf limiti olmakla $\{u_n(x)\}$ dizisinin dahil olduğu sınıfa dahil olmadığında, o zaman $f(x)\cdot u(x)$ çarpımının integrali aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\int_a^b f(x)u(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)u_n(x)dx$$

Bu tanımdan aşağıdaki eşitlikle bulunur:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = \int_a^b f(x)\delta(x,x_0)dx = f(x_0)$$

Bu eşitlik $\delta -$ fonksiyonunun tanımı gibi alınır.

6.2. $\delta -$ Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı ve $\delta -$ Fonksiyonunun Fourier İntegrali

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyonların ortonormal tam sistemi olduğunu varsayalım. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin fonksiyonları için

$$(\varphi_n,\varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1 \ , & n = m \\ 0 \ , & n \neq m \end{cases}$$

eşitliği sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $[a,b]$ aralığında ortonormal sistem oluşturur denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonlarının bir W sınıfını ele alalım. W sınıfından alınmış her bir $f(x)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi üzere Fourier serisi $[a,b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun kendisine yakınsadığında, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\cdot\varphi_n(x) = f(x) \ , \ (f,\varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

açılımı her bir $f(x)\in W$ için sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi W sınıfında tam sistem oluşturur denir.

Şimdi $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tam ortonormal sistemi üzere Fourier serisine açılımını bulalım. Bu amaçla $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzere

$$\delta(x,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)\varphi_n(x) \tag{6.2}$$

şeklinde açıldığını varsayalım. Bu açılımdaki $a_n(x_0)$ katsayıları aranan katsayılardır. $a_n(x_0)$ katsayılarını bulmak için (6.2) eşitliğinin her yanını $\varphi_n(x)$ fonksiyonu ile çarpıp ortogonal oldukları $[a,b]$ aralığı üzere integralleyelim. O zaman $(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm}$ eşitliğini kullanarak $a_m(x_0)$ katsayısı için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$a_m(x_0)=\int_a^b \delta(x,x_0)\varphi_m(x)dx$$

Bu eşitliğin sağ yanında $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak

$$a_m(x_0)=\varphi_m(x_0),\ \ m=1,2,\ldots$$

ifadesini buluruz. Böylece, biz burada $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzere (6.2) açılımını buluruz. Bu açılımdan $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun aşağıdaki simetriklik aksiyomunu(özelliğini) sağladığı bulunur:

$$\delta(x,x_0)=\delta(x_0,x) \tag{6.3}$$

Özel halde $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun aşağıdaki açılımlarını yazabiliriz:

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{e}(x-x_0),\qquad -e\le x\le e \tag{6.4}$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{n\pi}{e}(x-x_0)},\qquad -e\le x\le e \tag{6.5}$$

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e}\sin\frac{n\pi}{e}x_0\sin\frac{n\pi}{e}x,\qquad 0\le x\le e \tag{6.6}$$

Şimdi burada $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım. Bu amaçla Fourier dönüşümünün tanımına esasen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, x_0) e^{iwx} dx = e^{iwx_0} \tag{6.7}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliği ters Fourier dönüşümünde kullanarak

$$\delta(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx_0} e^{-iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(x-x_0)} dw \tag{6.8}$$

eşitliğini buluruz. Buradan da

$$\delta(x, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos w(x - x_0) dw \tag{6.9}$$

açılımını buluruz.

7. $\delta-$FONKSİYONUNUN UYGULANMASIYLA L DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN VE $L-\lambda I$ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONLARININ İNŞASI

7.1. $Ly=f$ ve $Ly=\lambda y+f$ Biçiminde Lineer Diferansiyel Operatörlü Denklemlerinin Green Fonksiyonunun $\delta-$Fonksiyonunun Uygulanmasıyla İnşası Yöntemi

L operatörünün (2.1) diferansiyel ifadesinin ve

$$U_\upsilon(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^\upsilon y_a^{(k)}+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^\upsilon y_b^{(k)}=0,\quad \upsilon=1,2,\ldots,n$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Burada L operatörünün tek bir tane $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun olduğunu farz edelim. O zaman (1.3) operatör denkleminin, yani uygun olarak (1.1) diferansiyel denkleminin (2.15) sınır şartlarını sağlayan çözümü (3.11) formülü ile bulunur. Dikkate alalım ki, (1.1) denklemlerinde özel olarak

$$f(x)=\delta(x,\eta) \tag{7.1}$$

alırsak, o zaman uygun olarak (3.11) formülünden

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\delta(\xi,\eta)d\xi=G(x,\eta) \tag{7.2}$$

eşitliğini buluruz. (7.2) eşitliğinden görüyoruz ki, L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu (1.1)−(2.15) sınır değer probleminin veya uygun olarak (1.3) operatör denkleminin

$$f(x)=\delta(x,\xi)$$

alındığındaki çözümüdür.

Şimdi biz burada lineer diferansiyel L operatörünün karakteristik

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

değerlerinin tekrarlanmayan karakteristik değerleri olduklarını ve reel pozitif sayılar olduklarını ve

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \tag{7.3}$$

şartlarını sağladıklarını ve bu karakteristik değerlere uygun L operatörünün $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ karakteristik fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında ortonormal tam sistem oluşturduklarını varsayalım. O zaman $\delta(x, \xi)$ fonksiyonu için

$$\delta(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\varphi_n(x) \tag{7.4}$$

açılımını yazabiliriz. Şimdi biz $\delta(x, \xi)$ fonksiyonunun (7.4) açılımını kullanarak L operatörünün $G(x, \xi)$ Green fonksiyonunu bulalım. Bu amaçla (1.3) denkleminde $f(x) = \delta(x, \xi)$ alalım. O zaman (7.4) açılımını da dikkate alırsak aşağıdaki denklemi buluruz:

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\varphi_n(x) \tag{7.5}$$

(7.5) denkleminin çözümünü

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi)\varphi_n(x) \tag{7.6}$$

şeklinde arayalım. (7.6) açılımında $c_n(\xi)$ katsayıları aranan katsayılardır. (7.5) denkleminin (7.6) şekilli çözümünü (7.5) denkleminde yerine yazsak ve

$$L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

eşitliklerini kullansak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n(\xi)\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)$$

Bu eşitliğin her yanını $\varphi_m(x)$ fonksiyonu ile çarpıp, sonrada x değişkenine nazaran a-dan b-ye kadar integralini alarak ve

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\delta_{nm}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

eşitliğini de kullanarak

$$\lambda_m c_m(\xi)=\varphi_m(\xi), \qquad m=1,2,\ldots$$

eşitliklerini buluruz.

Buradan da

$$c_m(\xi)=\frac{\varphi_m(\xi)}{\lambda_m}, \quad m=1,2,\ldots \tag{7.7}$$

ifadesini buluruz. $c_m(\xi)$ katsayıları için bulduğumuz bu ifadeleri (7.6) açılımında yerine yazarsak ve (7.2) eşitliğini de dikkate alırsak L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde bulmuş oluruz:

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n} \tag{7.8}$$

Aynı şekilli işlemleri (4.3) operatör denklemi için yaparak $L-\lambda I$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu için aşağıdaki açılımı buluruz:

$$G(x,\xi,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n-\lambda} \tag{7.9}$$

Bu açılım $\lambda\neq\lambda_n$ için sağlanır.

7.2. $\delta-$Fonksiyonunun Uygulanmasıyla L ve $L-\lambda I$ Operatörlerinin Green Fonksiyonunun İnşasına Ait Örnek

Örnek 7.2.1

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=f(x), \quad 0<x<1 \tag{7.10}$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0)=y(1)=0 \tag{7.11}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu inşa edelim. Bu problemde $f(x)$ fonksiyonu $0<x<1$ aralığında tanımlanmış önceden verilmiş fonksiyondur.

$\ell(y)=-y''$ diferansiyel ifadesinin ve (7.11) sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün λ_n karakteristik değerleri ve karakteristik değerlere uygun $\varphi_n(x)$ karakteristik fonksiyonları aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olur:

$$-\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}=\lambda_n\varphi_n \tag{7.12}$$

$$\varphi(0)=\varphi_n(1)=0 \tag{7.13}$$

$(7.12)-(7.13)$ problemini çözerek

$$\lambda_n=n^2\pi^2, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{7.14}$$

ve

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x, \quad n=1,2,\ldots \tag{7.15}$$

eşitliklerini buluruz.

Bu yüzden de L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x.\sin n\pi\xi}{n^2} \tag{7.16}$$

şeklinde bulmuş oluruz. Uygun olarak

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda y+f(x)\ ,\qquad 0<x<1 \tag{7.17}$$

diferansiyel denkleminin (7.11) probleminin doğurduğu $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx.\sin n\xi}{n^2-\lambda}$$

şeklinde bulunur. (7.17) probleminin çözümü

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi \tag{7.18}$$

veya

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{(\pi n)^2-\lambda}\cdot\varphi_n(x) \tag{7.19}$$

serisi şeklinde buluruz. Burada (f,φ_n) katsayısı $f(x)$ fonksiyonunun ortonormal $\{\varphi_n(x)\}$ sistemi üzere Fourier katsayısı olup

$$(f,\varphi_n)=\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{7.20}$$

formülü ile hesaplanır ($\varphi_n(x)=\sqrt{2}.\sin n\pi x$).

8. $L-\lambda I$ OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONUNUN ANALİTİK DOĞASI (TABİATI) VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR TEORİSİNİN SONUÇLARININ UYGULANMASIYLA $L-\lambda I$ OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞA YÖNTEMİ

8.1. Giriş

$\Delta(\lambda)$ ve $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonları λ parametresinin analitik fonksiyonlarıdır. $L-\lambda I$ operatörünün analitik doğasını (tabiatını) belirlememiz gerekmektedir. Bu amaçla biz burada kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin gereken tanım ve teoremleri ile tanışalım.

8.2. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin Elemanları

8.2.1. Kompleks Sayı, Fonksiyonlar ve Limitler

$z = x + iy$ şekilli sayıya *kompleks sayı* denir. Burada x ve y reel sayı, i-sanal birimdir. Sanal birim $i^2 = -1$ eşitliği ile tanımlanır. $z = x + iy$ ifadesinde $y = 0$ alındığında kompleks z sayısı reel sayıya dönüşür. $x = 0$ alındığında $z = iy$ sayısına *tam sanal sayı* denir.

Her bir kompleks $z = x + iy$ sayısını geometrik olarak xoy düzleminde (x,y) noktası ile gösterebiliriz. Bu yüzden z kompleks sayısına z noktası da denir. Kompleks sayının geometrik olarak gösterildiği düzleme *kompleks düzlem*, apsis eksenine *reel eksen*, ordinat eksenine *sanal eksen* denir.

Kompleks düzlemde z noktasından koordinat başlangıcına kadar olan uzaklığa kompleks z sayısının modülü denir ve $|z|$ gibi gösterilir. Reel eksenin pozitif yönü ile z noktasının radius vektörü $\vec{r} = \overrightarrow{oz}$ arasında kalan φ açısına z kompleks sayısının argümenti denir ve $\arg z$ gibi gösterilir. Z noktasının radius vektörü koordinat başlangıcı etrafında bir tam devir yaptığında, o zaman z noktasının radius vektörü önceki durumu ile çakışır. Bu halde φ açısı $\varphi+2\pi$ olur. $\varphi+2k\pi\,(k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$ açılarının kümesi $\operatorname{Arg} z$ gibi gösterilir.

$z=x+iy$ sayısının modülü ve argümenti aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x} \tag{8.1}$$

Buradan da

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi \tag{8.2}$$

formülleri bulunur.

(8.2) formüllerini kullanarak $z=x+iy$ kompleks sayısını

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{8.3}$$

trigonometrik şekilde yazılır. $z_1=x_1+iy_1$ ve $z_2=x_2+iy_2$ kompleks sayılarının toplamı ve farkı

$$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+i(y_1\pm y_2)$$

formülleri ile tanımlanır. Kompleks

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\ \text{ve}\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

sayılarının çarpımı

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

formülü ile, orantısı ise

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

formülü ile hesaplanır. Kompleks sayıların modülleri için

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{8.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

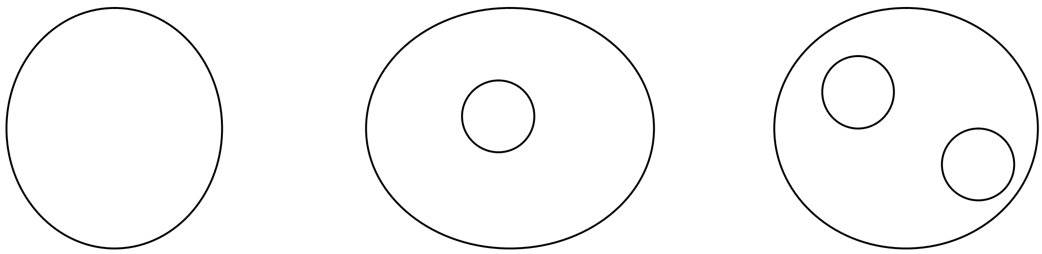
M kompleks sayılar kümesinin her bir $z \in M$ kompleks sayısına karşı bir w sayısı karşı getirildiğinde M kümesinde kompleks değişkenli $w = f(z)$ fonksiyonu verilmiştir denir. Her bir $z \in M$ sayısına uygun olarak tek w sayısı karşı getirildiğinde $f(z)$ fonksiyonuna *tek değerli fonksiyon* denir. Ama $z \in M$ sayısına karşı bir veya birkaç w sayısı karşı getirildiğinde $w = f(z)$ fonksiyonuna *çok değerli fonksiyon* denir.

M kümesi olarak kompleks düzlemin bir bölgesini alacağız. Hatırlatalım ki, verilmiş küme açık ve bağlantılı olduğunda bu kümeye *bölge* denir.

Kümenin her bir noktasının öyle bir komşuluğu bulunursa ki, nokta bu komşuluğu ile birlikte bu kümeye dahil olursa, böyle kümeye *açık küme* denir. Açık kümenin keyfi alınmış iki noktasını bu kümede yerleşen sürekli eğri ile veya sürekli kırık-kırık doğru parçası ile birleştirmek mümkün olduğunda böyle açık kümeye *bağlantılı küme* denir.

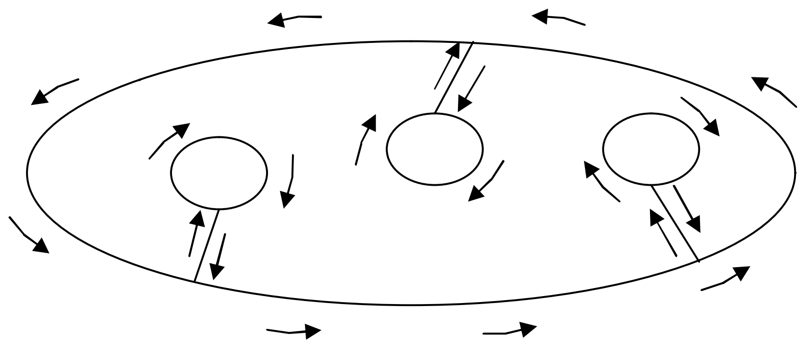
Açık bölgeye sınırı ile birlikte de kapalı bölge denir. Bölgenin sınırı yalnız bir kapalı eğriden oluştuğunda böyle bölgeye *bir bağlantılı bölge* denir.

Bölgenin sınırı n tane kapalı eğriden (veya noktalardan) oluştuğunda böyle bölgeye *n–bağlantılı bölge* denir.



a) b) c)

Şekil 8.1 Bölgeler. a) Bir Bağlantılı Bölge, b) İki Bağlantılı Bölge, c) Üç Bağlantılı Bölge n–bağlantılı bölgeyi n–1 kesikle bir bağlantılı bölgeye dönüştürebiliriz(Bakınız Şekil8.2).



Şekil 8.2 Dört bağlantılı bölgenin pozitif yönde bir bağlantılı bölgeye getirilmesi.

Keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|z - z_0| < \delta$ şartı sağlandığında $|f(z) - a| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa a sayısına $f(z)$ fonksiyonunun $z \to z_0$ şartındaki limiti denir. Bu $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a$ veya $z \to z_0$ şartında $f(z) \to a$ gibi gösterilir.

$\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_0)$ şartı sağlandığında $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

8.2.2. Kompleks Terimli Seriler ve Bazı Elemanter Fonksiyonlar

Aşağıdaki kompleks terimli sayısal seriyi ele alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.5}$$

Reel terimli sayısal seriler için geçerli olan tüm teoremler kompleks terimli sayısal seriler içinde geçerlidir. (8.5) serisinin terimlerinin modüllerinden yapılmış,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

serisi yakınsak olduğunda (8.5) serisine *absolyut yakınsak* seri denir.

Absolyut yakınsak seri yakınsaktır ve absolyut yakınsak serilerin terimlerinin yerlerini keyfi olarak değiştirebiliriz. Absolyut yakınsak serileri birbirleriyle çarpabiliriz ve bu çarpımdan elde edilen seriler de absolyut yakınsak olur.

Fonksiyonel

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \tag{8.6}$$

serileri için en önemli anlam bu serilerin düzgün yakınsaklığı anlamıdır.

Keyfi verilmiş $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N$ sayısı vardır öyle ki $\forall n > N$ için ve her bir $z \in M$ için

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında (8.6) serisi *f(z) fonksiyonuna* M kümesinde *düzgün yakınsaktır* denir.

(8.6) serisinin M kümesinde düzgün yakınsak olması için yeter şart bu serinin terimlerinin M kümesinde pozitif terimli yakınsak seri de majorantlanmasıdır. Yani öyle yakınsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty, \quad c_k > 0$$

serisinin olmasıdır ki, her bir $z \in M$ için

$$|f_k(z)| < c_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Kuvvet serileri, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{8.7}$$

şekilli seriler fonksiyonel serilerinin özel bir halidir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için Abel teoremi doğrudur.

Teorem 8.2.2.1 (Abel Teoremi)

(8.7) kuvvet serisi $z = z_0$ noktasında yakınsak olduğunda

$$|z - a| < |z_0 - a|$$

eşitsizliğini sağlayan her bir z noktasında da yakınsaktır. Bu Abel teoreminden alınır ki, (8.7) kuvvet serisi $z = z_0$ noktasında ıraksak olursa, o zaman

$$|z - a| > |z_0 - a|$$

eşitsizliğini sağlayan her bir z noktasında da ıraksak olur. Böylece, (8.7) kuvvet serisi için öyle $R \geq 0$ sayısı bulunur ki, bu seri $|z - a| < R$ dairesinin dahilinde yakınsaktır. Ama bu daire dışında, yani $|z - a| > R$ bölgesinde ıraksaktır.

Her bir $|z - a| \leq r < R$ kapalı dairesinde (8.7) kuvvet serisi absolyut ve düzgün yakınsak olur.

$|z - a| < R$ dairesine (8.7) serisinin *yakınsak dairesi*, R sayısına ise *yakınsaklık yarıçapı* denir.

Aşağıdaki kompleks değişkenli elemantar fonksiyonları yazalım(tanımlayalım):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{8.8}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{8.9}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{8.10}$$

$$chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{8.11}$$

$$shz = z + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{8.12}$$

Reel eksen üzerinde bu fonksiyonlar $z = x$ aldığımızda uygun reel değişkenli fonksiyonlarla çakışırlar. Bu serilerin her birinin yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$ olur. Bu yüzdende bu fonksiyonların her biri tüm kompleks düzlemde tanımlanmışlardır.

(8.10) eşitliğinin her yanını i sayısıyla çarpıp (8.9) eşitliği ile taraf tarafa toplarsak

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{8.13}$$

Euler formülünü buluruz. Bu formülün yardımı ile de

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \tag{8.14}$$

formülleri bulunur.

(8.3) ve (8.13) formüllerinden her bir kompleks sayının üstel şekilde gösterilebildiğini buluruz.

$$z = r.e^{i\varphi} \tag{8.15}$$

Burada z kompleks sayısının modülü r sayısı, argümenti ise φ açısıdır.

(8.13) ve (8.14) formüllerine benzer olarak

$$e^z = chz + shz \tag{8.16}$$

ve

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{8.17}$$

formülleri bulunur. e^{z_1} ve e^{z_2} fonksiyonlarının serilerini birbirleri ile çarparak

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{8.18}$$

formülü bulunur. (8.18) formülünden $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}$ alırız. Burada $e^{2\pi i} = 1$ eşitliği sağlandığından

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{8.19}$$

formülü bulunur. Böylece, e^z fonksiyonu $2\pi i$ periyotlu fonksiyondur.

$e^w = z$ eşitliğini sağlayan tüm kompleks w sayılarının kümesini $\mathrm{Ln}z$ gibi gösterelim. $z = re^{i\varphi}$ şeklinde gösterelim. $w = u + i\upsilon$ olsun. O zaman tanıma esasen

$$e^{u+i\upsilon} = re^{i\varphi}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikten $u = \ell nr$ ve $e^{i\upsilon} = e^{i\varphi}$ olur. e^z fonksiyonu $2\pi i$ periyotlu fonksiyon olduğundan

$$\upsilon = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

olur. Böylece,

$$\mathrm{Ln}z = \ell n\, r + i(\varphi + 2\pi k)\ , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...) \tag{8.20}$$

formülü bulunur. Şimdi $\mathrm{Ln}(1+i)$ sayısının hesaplanmasını gösterelim.

$$|1+i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

Buradan da aşağıdaki sonuç bulunur:

$$\mathrm{Ln}(1+i) = \ell n\sqrt{2} + i \cdot (\frac{\pi}{4} + 2\pi k), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\,.$$

8.2.3. Türev ve Analitik Fonksiyonlar

Kompleks değişkenli f(z) fonksiyonunun türevi aşağıdaki limitle tanımlanır:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{8.21}$$

z noktasında türevi bulunan fonksiyona bu noktada *diferansiyellenen* fonksiyondur denir.

f(z) fonksiyonunun

$$f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$$

şeklinde gösterilmiş olduğunu varsayalım. Burada $u(x,y)$ ve $\upsilon(x,y)$ fonksiyonları reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar olup f(z) fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarıdır. f(z) fonksiyonunun diferansiyellenen olması için gerek şart $u(x,y)$ ve $\upsilon(x,y)$ fonksiyonlarının diferansiyellenen olmalarıdır. Ama f(z) fonksiyonunun diferansiyellenen olması için $u(x,y)$ ve $\upsilon(x,y)$ fonksiyonlarının diferansiyellenen olması yeterli değildir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 8.2.3.1

$f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ fonksiyonunun $z = x + iy$ noktasında diferansiyellenen olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır:

1. $u(x,y)$ ve $\upsilon(x,y)$ fonksiyonlarının (x,y) noktasında diferansiyellenendir.

2. (x,y) noktasında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \tag{8.22}$$

Cauchy-Riemann şartları sağlanır.

İspat:

Biz burada yalnız Cauchy-Riemann şartının gerek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki, $z = x + iy$ noktasında

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{\Delta z} = f'(z)$$

limiti vardır. Bu limitin varlığından bu limitin değeri $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ artışının sıfıra yakınsama tarzına(yöntemine) bağlı değildir. Bu yüzden burada biz koordinat eksenlerine paralel doğrular üzere z noktasına yakınsama alalım. Δz artışını yatay ve dikey parçalar üzere sıfıra yaklaştıralım. İlk önce $\Delta y = 0$ alalım ve $\Delta x \to 0$ limitini alalım. Sonra ise $\Delta x = 0$ alalım ve $\Delta y \to 0$ limitini alalım. O zaman $f'(z)$ için aşağıdaki iki eşitliği buluruz:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \tag{8.23}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \tag{8.24}$$

(8.23) ve (8.24) formüllerinde reel ve sanal kısımları karşılaştırarak (8.22) şartını buluruz.

f(z) fonksiyonunu z noktasında ve bu noktanın bir komşuluğunda diferansiyellenen olduğunda bu fonksiyona *z noktasında analitiktir* denir.

f(z) fonksiyonu G bölgesinin her bir noktasında diferansiyellenen olduğunda f(z) fonksiyonu *G bölgesinde analitiktir* denir.

G bölgesinde analitik olan fonksiyonların toplamı ve çarpımı da G bölgesinde analitik fonksiyon olur. G bölgesinde analitik olan iki fonksiyonun orantısında paydadaki fonksiyon G bölgesinin her bir noktasında sıfırdan farklı olduğunda bu fonksiyonların orantısı da G bölgesinde analitik olur.

Karmaşık $f(w(z))$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$f'_z(w(z)) = f'_w \cdot w'_z$$

8.2.4. Kompleks Değişkenli Fonksiyonun İntegrali ve Cauchy–nin Esas Teoremi

Kompleks düzlemde sonlu $\tilde{L}$ uzunluklu L eğrisinin verildiğini ve bu L eğrisinin parametrik denkleminin $x = x(t),\ y = y(t),\ (t_0 \le t \le T)$ denklemleri ile yazıldığını varsayalım. L eğrisi üzerinde bir pozitif yön seçelim ve z_0 noktası L eğrisinin başlangıç noktası, z_n noktası ise L eğrisinin son noktası olsun. L eğrisi üzerinde $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ noktalarını da seçelim. Her bir $z_k z_{k+1}$ eğri yayı üzerinde keyfi $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ noktası alalım. Burada $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ olsun. O zaman aşağıdaki

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{8.25}$$

toplamına f(z) fonksiyonunun L eğrisi üzere *integral toplamı* denir. $n \to \infty$ şartında $z_k z_{k+1}$ eğri yaylarının uzunluklarının maksimumu sıfıra yakınsamakla (8.25) integral toplamımın limitine f(z) fonksiyonunun L eğrisi üzere verilmiş yöndeki integrali denir ve

$$\int_L f(z)dz \tag{8.26}$$

gibi gösterilir.

f(z) fonksiyonu L eğrisi üzerinde sürekli olduğunda x(t) ve y(t) fonksiyonları $[t_0, T]$ aralığında parça parça diferansiyellenen olduklarında integral toplamın limiti z_k ve ζ_k noktalarının seçimine bağlı değildir ve integral toplamın sonlu limiti vardır.

Gerçekten de, $f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + i\upsilon(\xi_k, \eta_k)$ ve $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ olsun. O zaman (8.25) integral toplamını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) + i\upsilon(\xi_k, \eta_k)][\Delta x_k + i\Delta y_k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k)\cdot \Delta x_k - \upsilon(\xi_k, \eta_k)\cdot \Delta y_k] + i\sum_{k=0}^{n-1} [\upsilon(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \end{aligned} \tag{8.27}$$

(8.27) eşitliğinin sağ yanında L eğrisi üzere ikinci çeşit eğri-hatlı integral toplamlarının olduğu görülür. $f(z)$ fonksiyonu ve L eğrisi için üstteki varsayımlarımız sağlandığında, bu integraller vardır ve (8.27) eşitliğinin $n \to \infty$ şartında limiti vardır ve aşağıdaki formül doğrudur.

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - \upsilon dy + i\int_L \upsilon dx + udy \qquad (8.28)$$

(8.28) formülü (8.26) integralinin hesaplanmasında kullanılabilir.

(8.28) formülünün yardımı ile kolaylıkla aşağıdaki özellikler ispatlanır.

$$1. \int_L [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz \qquad (8.29)$$

$$2. \int_L cf(z)dz = c\int_L f(z)dz \qquad (8.30)$$

3. İntegralleme yönü değiştirildiğinde integral işaretini değiştirir.

$$\int_{-L} f(z)dz = -\int_L f(z)dz \qquad (8.31)$$

4. L eğrisi iki kısma ayrıldığında, mesela $L = L_1 + L_2$ olduğunda, o zaman

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \qquad (8.32)$$

olur.

5. L eğrisinin uzunluğunun $\tilde{L}$ olduğunu ve L eğrisi üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. O zaman

$$\left|\int_L f(z)dz\right| < M \cdot \tilde{L} \qquad (8.33)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $z(t) = x(t) + iy(t)$ alalım. O zaman (8.28) formülünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
\int_L f(z)dz &= \int_L (udx - \upsilon dy) + i\int_L (\upsilon dx + udy) \\
&= \int_{t_0}^{T} (u.x' - \upsilon.y')dt + i\int_{t_0}^{T} (\upsilon.x' + u.y')dt \\
&= \int_{t_0}^{T} (u + i\upsilon)(x' + i.y')dt
\end{aligned}
$$

Böylece, kompleks değişkenli fonksiyonun integralini belirli integralin hesaplanmasına getiren formül

$$
\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt \tag{8.34}
$$

şeklinde bulunmuş olur.

Örnek 8.2.4.1

C eğrisi, merkezi z_0 noktasında yarıçapı r olan çember olduğunda ve C çemberi üzerinde pozitif yön olarak saat ibresinin hareketinin aksi yönü alındığında $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$ integralini hesaplayın.

Çözüm:

C çemberinin parametrik denklemi olarak $z = z_0 + r.e^{i.t}$, $0 \le t \le 2\pi$ denklemini alalım. O zaman (8.34) formülünü uygulayarak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$
\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i \tag{8.35}
$$

iki verilmiş noktayı birleştiren farklı farklı eğriler üzere $f(z)$ fonksiyonunun integrali, genelde kendi aralarında farklı olurlar. $f(z)$ fonksiyonunun verilmiş iki noktayı birleştiren eğriler üzere integrallerinin bu noktaları birleştiren eğrinin seçimine bağlı olmaması için (ama yalnız noktaların yerleştiği duruma bağlı olması için) gerek ve yeter şart bu fonksiyonun her bir kapalı eğri üzere integralinin sıfıra eşit olmasıdır. Sade halde z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren L_1 ve L_2 eğrileri birbirlerini kesmediğinde L_1 üzerinde pozitif yön, L_2 üzerinde negatif yön aldığımızda bu eğriler birlikte bir kapalı eğri oluştururlar.

Aşağıdaki teorem analitik fonksiyonlar teorisinde en esas teoremlerdendir.

Teorem 8.2.4.1 (Cauchy Teoremi)

$f(z)$ fonksiyonu bir bağlantılı G bölgesinde analitik fonksiyon olduğunda, o zaman G bölgesinde tam olarak bulunan her bir kapalı Γ eğrisi üzerinde f(z) fonksiyonunun integrali sıfıra eşit olur.

İspat:

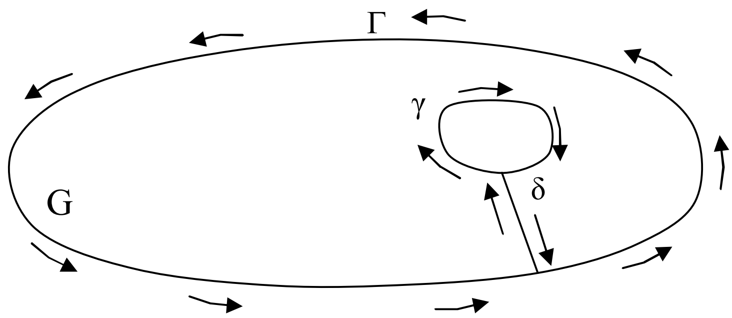
$f(z) = u + i\upsilon$ olsun. Buradaki u ve υ fonksiyonlarının birinci mertebeden sürekli kısmi türevlerinin olduklarını varsaysak (8.22) Cauchy–Riemann şartı sağlanacaktır. Cauchy–Riemann şartı ise (8.28) formülünün sağ yanındaki eğri hatlı integralin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şarttır. Burada u ve υ fonksiyonlarının diferansiyellenen olması şartı çok önemli bir şart değildir. Bu şart olmadığında da teorem doğrudur. Cauchy teoreminin aşağıdaki genelleştirilmesi vardır.

Teorem 8.2.4.2

$f(z)$ fonksiyonu çok bağlantılı G bölgesinde ve bu bölgenin sınırında analitik fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman $f(z)$ fonksiyonunun G bölgesinin sınırı üzerinde pozitif yönde alınmış integrali sıfıra eşittir. G bölgesinin sınırının pozitif yönü, öyle yöndür ki bölgenin sınırı üzerine pozitif yönde hareket ettiğimizde, G bölgesinin solumuzda kalması gerekir.

İspat:

Bu teoremi iki bağlantılı bölge halinde ispatlayalım. İki bağlantılı G bölgesi şekil 8.3 de gösterilmiştir.



Şekil 8.3 İki bağlantılı G bölgesinin pozitif yönde sınırlı bir bağlantılı bölgeye getirilmesi.

G bölgesinin sınırı iki tane kapalı dış Γ eğrisinden ve dahili γ eğrisinden oluşur. G bölgesini bir bağlantılı bölgeye dönüştüren δ kesimi yapalım. $f(z)$ fonksiyonu teoremin şartına göre G bölgesinde ve bu bölgenin sınırında analitik olduğundan, teorem 8.2.4.1 e esasen bu bir bağlantılı bölgenin sınırı üzere $f(z)$ fonksiyonunun integrali sıfıra eşit olur. İntegralleme zamanı δ kesiği üzere integral aksi yönde iki kez alındığında bu integraller birbirlerini götürür. Γ eğrisi üzere integral saat ibresinin hareketinin aksi yönünde, γ eğrisi üzere ise saat ibresinin hareketi üzere alınır. Bu ise $f(z)$ fonksiyonunun G bölgesinin sınırı üzere integralinin sıfıra eşit olduğunu gösterir. Teorem 8.2.4.2 den aşağıdaki sonuç alınır.

Sonuç:

γ kapalı eğrisi kapalı Γ eğrisinin dahilinde yerleştiğinde, $f(z)$ fonksiyonu ise bu eğriler arasındaki bölgede ve bu eğriler üzerinde analitik olduklarında aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

$f(z)$ fonksiyonu G bölgesinde analitik olduğunda ve L eğrisi $z_0, z \in G$ noktalarını birleştiren ve G bölgesinde yerleşen eğri olduğunda, o zaman $f(z)$ fonksiyonunun L eğrisi üzere integralinin z_0 ve z noktalarını birleştiren L eğrisine bağlı olmadığı, bu integralin yalnız z_0 ve z noktalarının durumuna bağlı olduğu Cauchy teoreminden alınır. z_0 noktasını değişmez sağlayıp, z noktasını ise G de değiştirirsek

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)$$

eşitliğini yazabiliriz.

Buradaki $F(z)$ fonksiyonu G de diferansiyellenen fonksiyondur ve

$$F'(z) = f(z)$$

formülü doğrudur.

Böylece, $f(z)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olduğunda, bu fonksiyonun ilkel fonksiyonları vardır. $F(z)$ bu ilkel fonksiyonlardan bir tanesidir.

$f(z)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonunu $\phi(z)$ ile gösterirsek, o zaman

$$\phi(z) = F(z) + c$$

formülü ispatlanabilir. Burada c keyfi sabit sayıdır. Burada aşağıdaki Newton–Leibnitz formülünün doğru olduğu kolaylıkla gösterilir:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \phi(z) - \phi(z_0) \tag{8.36}$$

8.2.5. Cauchy–nin İntegral Formülü, Cauchy Tipli İntegral ve Analitik Fonksiyonların Türevleri

Bir G bölgesinde tam olarak $f(z)$ fonksiyonunu tanımlamak(belirlemek) için bu fonksiyonun değerlerini G bölgesinin $S = \partial G$ sınırında bilmek yeterlidir. Analitik fonksiyonların bu özelliği çok önemli ve seçkin özellik olup aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 8.2.5.1

$f(z)$ fonksiyonu bir bağlantılı G bölgesinin dahilinde ve bu bölgenin Γ sınırında analitik fonksiyon olduğunda ve z noktası G bölgesinin iç noktası olduğunda, o zaman

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{8.37}$$

formülü doğrudur. (8.37) formülüne Cauchy–nin integral formülü denir.

İspat:

Aşağıdaki

$$\phi(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$$

fonksiyonunu ele alalım.

Bu fonksiyon $\zeta=z$ noktasından başka kapalı $\overline{G}$ bölgesinde tanımlanmıştır ve $\zeta=z$ noktasından başka kapalı $\overline{G}$ bölgesinin her bir noktasında analitiktir. Sonlu $\lim\limits_{\zeta\to z}\phi(z)=f'(z)$ limiti olduğundan $\phi(\zeta)$ fonksiyonu $\zeta=z$ noktasının bir komşuluğunda sınırlıdır. Yani öyle bir $M>0$ sayısı bulunur ki, $\zeta=z$ noktasının bir komşuluğunda $|\phi(\zeta)|<M$ eşitsizliği sağlanır. $\zeta=z$ noktasının bu komşuluğunda merkezi $\zeta=z$ noktasında olan keyfi küçük ρ yarıçaplı γ çemberini alalım. Γ eğrisi ve γ çemberi arasındaki bölgede ve bu eğriler üzerinde $\phi(\zeta)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olduğundan, teorem 8.2.4.2 den alınan sonuca esasen

$$\int_{\Gamma}\phi(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma}\phi(\zeta)d\zeta \tag{8.38}$$

eşitliğini yazabiliriz. (8.33) değerlendirmesini kullanarak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\left|\int_{\gamma}\phi(\zeta)d\zeta\right|<M.2\pi\rho$$

Bu değerlendirmeyi kullanarak (8.38) eşitliğinden aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz:

$$\left|\int_{\Gamma} \phi(\zeta)d\zeta\right| < 2M\pi\rho$$

ρ sayısını çok küçük seçebildiğimizden sonuncu eşitsizlikten $\rho \to 0$ almakla

$$\int_{\Gamma} \phi(\zeta)d\zeta = 0$$

veya

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikten de

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitliğin sağ yanındaki integrali daha önceden hesapladık(bakınız (8.35)).

Bu integralin değeri $2\pi i$ sayısına eşittir. Böylece, (8.37) formülü bununla ispatlanmış olur.

Teorem 8.2.5.1 çok bağlantılı bölge için de genelleştirilir. Bu halde (8.37) formülünde çok bağlantılı bölgenin tüm sınırı üzere alınır. İntegralleme yöntemi teorem 8.2.4.2 deki yöntemle alınır.

Şimdi L eğrisi açık veya kapalı parça parça regüler eğri olduğunu, z noktasının L eğrisi üzerinde olmadığını, $f(z)$ fonksiyonunun ise L eğrisi üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. Bu şartların sağlanmasıyla

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta \tag{8.39}$$

integraline *Cauchy tipli integral* denir.

(8.39) formülü ile tanımlanan $F(z)$ fonksiyonunun diferansiyellenen olduğunu ve $F'(z)$ türevi (8.39) formülünde integral altındaki fonksiyonun z değişkenine nazaran diferansiyellenmesi ile hesaplanabildiği ispatlanabilir:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{k \cdot f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \tag{8.40}$$

(8.40) formülünün sağ yanındaki integralde Cauchy tipli integral olduğundan $F''(z)$ türevi (8.40) formülündeki integralde integral altındaki fonksiyonun z değişkenine nazaran diferansiyellenmesiyle hesaplanabilir. Böylece (8.39) formülü ile tanımlanan $F(z)$ fonksiyonunun istenilen mertebeden türevi olduğu ispatlanır ve n–inci mertebeden $F(z)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$F^{(n)}(z) = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+n}} d\zeta \tag{8.41}$$

(8.37) Cauchy formülünde olan integral Cauchy tipli integraldir. Bu yüzden de (8.37) formülü ile tanımlanan fonksiyonun istenilen mertebeden türevi vardır ve bu türevler (8.41) formülü ile hesaplanabilir. Böylece, buradan ve teorem 8.2.5.1 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 8.2.5.2

$f(z)$ fonksiyonunun G bölgesinin dahilinde ve bu bölgenin sınırında analitik olduğunu varsayalım. z noktasının G bölgesinin iç noktası olduğunu varsayalım. O zaman $f(z)$ fonksiyonunun G bölgesinde istenilen mertebeden türevi vardır ve z noktasında $f(z)$ fonksiyonunun n-inci mertebeden türevi

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2.\pi.i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{8.42}$$

formülü ile hesaplanabilir. Burada integral G bölgesinin Γ sınırı üzere hesaplanır. G bölgesi çok bağlantılı bölge olduğunda, o zaman Γ bölgesinin integralleme yönü teorem 8.2.4.2 de gösterilmiş kuralla seçilir.

8.2.6. Analitik Fonksiyonların Serileri, Taylor ve Laurent Serileri, Singüler Noktalar

Aşağıdaki teoremin ispatı reel değişkenli reel değerli fonksiyonel serilerin uygun teoreminin ispatı gibi yapılır.

Teorem 8.2.6.1

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ fonksiyonel serisinin parça parça regüler L eğrisi üzerinde düzgün yakınsak olduğunda ve bu serinin $f_n(z)$, $n = 1,2,3,...$ terimleri L eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar olduklarında, o zaman verilmiş serinin toplamı da L eğrisi üzerinde sürekli fonksiyon olur ve bu seri terim terim integrallenebilir:

$$\int_L \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z) dz \tag{8.43}$$

Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) \tag{8.44}$$

serisini ele alalım. Bu serinin tüm terimlerinin, yani $f_n(z)$, $n = 1,2,...$ fonksiyonlarının her birinin bir G bölgesinde analitik fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman (8.44) serisi için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 8.2.6.2 (Weierstrass)

(8.44) serisinin terimlerinin G bölgesinde analitik fonksiyonlar olduklarını ve bu (8.44) serisinin G bölgesinin tamamen dahilinde yerleşen her bir kapalı $\overline{G}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman

1. (8.44) serisinin toplamı G bölgesinde analitik fonksiyon olur.

2. (8.44) serisinin terimlerinin türevlerinden inşa edilmiş seri G bölgesinin tamamen dahilinde yerleşen her bir kapalı $\overline{G}$ bölgesinde (8.44) serisinin toplamının türevine düzgün yakınsak olur.

İspat:

G bölgesinden keyfi bir $z \in G$ noktası alalım. G bölgesine tamamen dahil olan ve z noktası onun iç noktası olan bir $\overline{G}$ kapalı bölgesi bulalım.

O zaman (8.44) serisi kapalı $\overline{G}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta - z}$$

serisi $\overline{G}$ bölgesinin sınırı olan $\overline{\Gamma}$ eğrisi üzerinde düzgün yakınsak olur. O zaman teorem 8.2.6.1 e esasen bu seriyi terim terim $\overline{\Gamma}$ sınırı üzere integralleyebiliriz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma}}\frac{f_n(z)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Buradan teorem 8.2.5.1 e esasen aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki ifade integral olduğundan, (8.44) serisinin toplamı analitik fonksiyondur.

Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$$

serisi yerine

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

serisini alıp üstüne yapılmış aynı işlemleri yapmamız yeterlidir.

Teorem 8.2.6.2 yi (8.44) serisinin diferansiyellenmesinden alınan seriye tekrardan uygulayarak teoremin şartlarının sağlanılmasıyla (8.44) serisinin terim–terim istenilen mertebeden diferansiyellemenin mümkün olduğunu ve diferansiyellemeden alınan bu serilerin G bölgesinde tamamen yerleşen her bir kapalı $\overline{G}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduklarını buluruz.

Şimdi teorem 8.2.6.2 yi aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{8.45}$$

kuvvet serisine uygulayalım.

Teorem 8.2.2.1 den alınır ki, $R > 0$ sayısı (8.45) kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olduğunda, o zaman bu seri her bir $|z - z_0| \le r < R$ dairesinde düzgün yakınsak olur. Bu serinin her bir terimi tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyondur. Bu yüzden de teorem 8.2.6.2 den buluruz ki, (8.45) serisinin toplamı bu serinin yakınsak olduğu daire dahilinde analitik fonksiyondur. Teorem 8.2.6.2 e göre bu kuvvet serisini yakınsaklık dairesi dahilinde istenilen mertebeden diferansiyelleyebiliriz. Bu sonucun terside doğrudur.

$f(z)$ fonksiyonunun $|z - z_0| < R$ dairesinde analitik fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman $f(z)$ fonksiyonunu (8.45) kuvvet serisi şeklinde gösterebiliriz ve bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R sayısından küçük olamaz.

$|z - z_0| < R$ dairesinden keyfi bir z noktası alalım. $r < R$ eşitsizliğini sağlayan r sayısını öyle seçelim ki, z noktası da $|z - z_0| < r$ dairesi dahilinde kalsın. $|z - z_0| = r$ çemberini C ile gösterelim. Teorem 8.2.5.1 e esasen $f(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösterelim.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{8.46}$$

Geometrik seri formülünü kullanarak aşağıdaki açılımı yazalım:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\frac{(z-z_0)^2}{(\zeta-z_0)^2}+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\ldots\right] \quad (8.47)$$

Burada ζ noktası C çemberi üzerinde alınmış keyfi nokta olduğunda

$$|z-z_0|<|\zeta-z_0|$$

veya

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

eşitsizliği sağlandığından (8.47) serisi C çemberi üzerinde düzgün yakınsak geometrik seridir. Bu yüzden de (8.47) serisini terim terim C çemberi üzere integralleyebiliriz. (8.46) integralinde $\frac{1}{\zeta-z}$ kesrinin (8.47) ifadesini alalım ve alınan seriyi terim terim integralleyelim. O zaman buluruz ki;

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (8.48)$$

burada

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (8.49)$$

(8.48) serisine $f(z)$ fonksiyonunun *Taylor serisi* denir. (8.49) formülünü (8.42) formülü ile karşılaştırdığımızda,

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (8.50)$$

formülü bulunur. (8.49) formülünü kullanarak ve $M=\max_{|z-z_0|\le R}|f(z)|$ alırsak ve (8.48) serisinin yakınsaklık yarıçapı $R>0$ olduğunda, o zaman Taylor serisinin c_n katsayıları için aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \tag{8.51}$$

Gerçektende, (8.33) değerlendirmesini (8.49) formülüne uyguladığımızda aşağıdaki değerlendirme bulunur:

$$|c_n| < \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}$$

Ama r sayısını R sayısına istenilen kadar yaklaştırabildiğimizden (8.51) eşitsizliği bulunur.

z_0 noktası için $f(z_0) = 0$ eşitliği sağlandığında z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun sıfırı denir. z_0 noktasının analitik $f(z)$ fonksiyonunun sıfırı olduğunu varsayalım. Ama $f(z) \not\equiv 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (8.48) açılımında açılımın bazı katsayıları sıfırdan farklı olur. Bu açılımda $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ olduğunu ama $c_n \ne 0$ olduğunu varsayalım. O zaman z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n mertebeden tekrarlanan kökü olur.

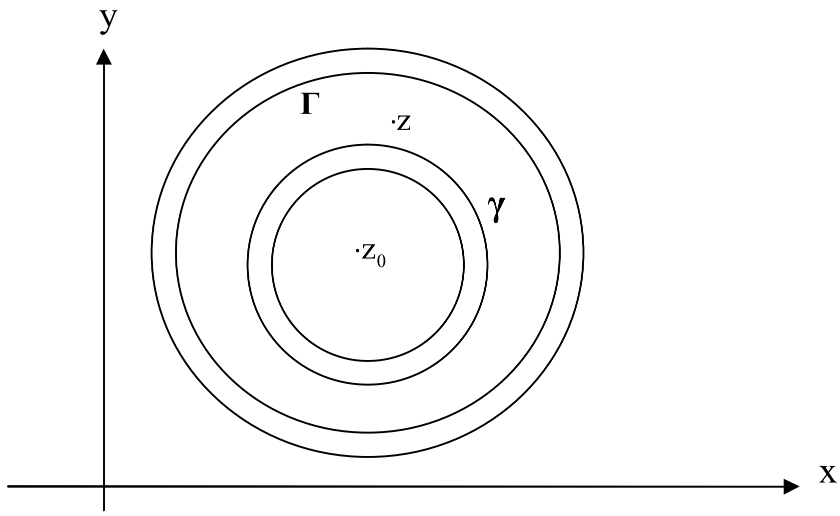
(8.50) formülünden z_0 noktasının $f(z)$ fonksiyonunun n mertebeden tekrarlanan sıfırı(kökü) olması için gerek ve yeter şart

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \ne 0$$

şartlarının sağlanması olduğu bulunur.

$f(z)$ fonksiyonunun z_0 sıfırı, bu fonksiyonun analitik olduğu bölgede bulunduğunda, o zaman z_0 noktasının öyle komşuluğu bulunur ki, bu komşulukta $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasından başka sıfırı bulunmuyor. Başka bir deyişle, $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu bölgedeki sıfırları izole edilmiş şekilde olur.

Şimdi bir $r < |z - z_0| < R$ halkasında analitik olan $f(z)$ fonksiyonunu ele alalım.



Şekil 8.4 Merkezi z_0 noktasında olan Γ ve γ çemberleri arasında kalan halka. Burada z noktası bu halkada yerleşen keyfi bir noktadır.

$r < |z - z_0| < R$ halkasında analitik olan $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde seriye açılabilir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{8.52}$$

(8.52) serisine *Laurent Serisi* denir.

$f(z)$ fonksiyonunun (8.52) serisi şeklinde gösterilebildiğini ve (8.52) serisinin katsayılarının hesaplanması için formüller bulmak için $r < |z - z_0| < R$ halkasından keyfi bir z noktası alalım. Bu halkada öyle Γ ve γ konsentirik çemberlerini alalım ki, z noktaları bu çemberler arasında kalsın(Bakınız Şekil 8.4). Γ ve γ çemberlerinin de merkezleri de z_0 noktasındadır. $f(z)$ fonksiyonu Γ ve γ çemberleri üzerinde ve bu çemberler arasında kalan bölgede analitik fonksiyondur. Bu yüzden de karmaşık eğri halinde Cauchy integrali formülünü kullanarak $f(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki Cauchy integrali formülü ile gösterebiliriz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{8.53}$$

Analitik fonksiyonun Taylor serisine açılımında kullanılan işlemleri ve yorumları kullanarak (8.53) formülündeki birinci integrali aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{8.54}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

(8.53) formülündeki ikinci integrale benzer seri açılımını almak için aşağıdaki açılımı yazalım:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = -\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = -\frac{1}{z-z_0}\left[1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+\frac{(\zeta-z_0)^2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n+\ldots\right]$$

z noktasını değişmez sağladığımızda sağ yanda parantez içerisinde olan geometrik seri γ çemberi üzerinde düzgün yakınsak seri olur. Sonra Taylor formülünü aldığımızda yaptığımız yorumları burada da yaparak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{-\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \tag{8.55}$$

Dikkate alalım ki, $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ orantısı Γ ve γ eğrileri arasında kalan bölgede analitik fonksiyon olduğundan teorem 8.2.4.2 den alınmış sonuca esasen (8.52) serisinin katsayıları için aynı şekilli formül (aynı türde bir formülle) yazabiliriz. (8.49) formülünde c eğrisi Γ ve γ çemberleri ile konsentrik olan ve $r < |z - z_0| < R$ dairesinde yerleşen keyfi alınmış çemberdir. (8.54) çemberinin sağ yanında olan seriye *Laurent serisinin düzgün kısmı* denir. Bu seri $|z - z_0| < R$ dairesinde yakınsaktır. (8.55) formülünün sağ yanında olan seriye *Laurent serisinin baş kısmı* denir. Bu seri $|z - z_0| > r$ bölgesinde yakınsaktır. (8.52) Laurent serisi $f(z)$ fonksiyonuna $r < |z - z_0| < R$ halkasında yakınsaktır.

Halkada iç $|z - z_0| = r$ çemberi bir noktaya dönüştüğünde böyle Laurent serisi $f(z)$ fonksiyonuna $0 < |z - z_0| < R$ bölgesinde yakınsak olur. Bu seriye *z_0 noktası komşuluğunda Laurent serisi* denir.

z_0 noktası komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunu incelemek için $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Laurent serisi yazılır.

z_0 noktasında ve bu noktanın her bir komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olmadığında z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *singüler(mahsusi, özel*) noktası denir. z_0 singüler noktasının bir komşuluğunda, z_0 noktasından başka $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası olmadığında, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *izole edilmiş singüler noktası* denir.

$f(z)$ fonksiyonunun izole edilmiş z_0 singüler noktası aşağıdaki şekilde çeşitlendirilir:

1) $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Laurent serisinde baş kısım olmadığında ve Laurent serisi yalnız düzgün kısımdan oluştuğunda z_0 singüler noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *kaldırılabilen singüler noktası* denir;

2) $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Laurent serisinin baş kısmı sonlu sayıda terimden oluştuğunda ve sonlu sayıdaki toplamı

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} \tag{8.56}$$

şeklinde olduğunda z_0 singüler noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *m–mertebeden kutup noktası* denir.

3) $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Laurent serisinin baş kısmında sonsuz sayıda terim olduğunda z_0 singüler noktasına f(z) fonksiyonunun *esaslı singüler noktası* denir.

$f(z)$ fonksiyonu kaldırılabilen singüler nokta komşuluğunda sınırlı olur ve sonlu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti olur.

Gerçektende, kuvvet serisinin toplamının yakınsaklık dairesi dahilinde analitik fonksiyon olduğunu gösterdik. Bu yüzden aşağıdaki limit vardır:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right] = c_0$$

Burada biz $f(z_0) = c_0$ alırsak $f(z)$ fonksiyonunun singülerliğini(mahsusiyyetini) kaldırmış oluruz ve $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olur.

Mesela, $\frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında tanımlanmamıştır. Bu yüzden $z = 0$ noktası $\frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu için singüler(mahsusi) noktadır. (8.10) formülünden aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Böylece, $z = 0$ noktası $\frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu için kaldırılabilen singüler noktadır. $\frac{\sin z}{z}$ fonksiyonunu $\left.\frac{\sin z}{z}\right|_{z=0} = 1$ gibi tanımlayarak $\frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon olur.

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun m mertebeden kutup noktası olduğunda, o zaman $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1.(z - z_0) + \ldots = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \qquad (8.57)$$

Bu formülde $\varphi(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik fonksiyondur ve $\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0$ dır. Burada $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = c_{-m}$ olduğundan, o zaman $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ olur. Demek ki, z noktası z_0 kutup noktasına yaklaştığında $f(z)$ fonksiyonu sonsuzluğa yakınsıyor.

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun esaslı singüler(mahsusi) noktası olduğundan z noktası z_0 noktasına yaklaştığında, yani $z \to z_0$ olduğunda $f(z)$ fonksiyonunun limiti olmuyor, yani ne sonlu ne de sonsuz limiti yoktur.

Esaslı singüler(mahsusi) nokta komşuluğunda f(z) fonksiyonunun davranışı aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 8.2.6.3 (Sochotskii)

z_0 noktasının $f(z)$ fonksiyonunun esaslı singüler(mahsusi) noktası olduğunu varsayalım. O zaman keyfi alınmış kompleks w sayısı için z_0 noktasına yakınsayan öyle z_n noktalar dizisi bulunur ki, $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w$ eşitliği sağlanır.

Sonsuz uzaklaşmış noktada $f(z)$ fonksiyonunun durumunu belirlemek için f(z) fonksiyonunda $z = \frac{1}{\zeta}$ dönüşümü yapılır. Bu dönüşümle sonsuz uzaklaşmış nokta koordinat başlangıcına dönüştürülür. $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ fonksiyonu $\zeta = 0$ noktası komşuluğunda Laurent serisine açılır. Bu Laurent serisinde baş kısmın olup olmaması ile baş kısmında sonlu sayıda terim olmasıyla veya sonsuz sayıda terim olmasıyla $f(z)$ fonksiyonunun sonsuz yaklaşmış nokta kaldırılabilen kutup noktası veya m-mertebeli kutup noktası veya esaslı singüler noktası olup olmadığı belirlenir.

Singüler nokta komşuluğuna ait olan teoremler uygun olarak sonsuz uzaklaşmış nokta etrafı içinde uygun olarak bu halde söylenir.

$f(z)$ fonksiyonunun sıfırının mertebesi ile f(z) fonksiyonunun tersi fonksiyonun kutup noktasının mertebesi arasında bağlantı vardır.

Teorem 8.2.6.4

$f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında m-mertebeden sıfırı olduğunda, o zaman $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun z_0 noktasında m–mertebeden kutup noktası bulunur.

İspat:

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında m–mertebeden sıfırı bulunduğunda, o zaman bu fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots = (z-z_0)^m \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ fonksiyonu kuvvet serisinin toplamı olduğundan bu fonksiyon analitik fonksiyondur. $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$ olduğundan $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ fonksiyonu da z_0 noktasının komşuluğunda analitik fonksiyondur. Bu yüzden $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ fonksiyonu için aşağıdaki açılımı yazabiliriz:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots$$

burada $b_0 = \dfrac{1}{c_m} \neq 0.$ Buradan da

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots\right] = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots$$

Böylece, $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun z_0 noktasında m–mertebeden kutup noktası vardır. Teorem 8.2.6.4 ü kullanarak fonksiyonu Laurent serisine açmadan kutup noktasının mertebesi belirlenebilir. Mesela $\sin z$ fonksiyonunun (8.10) açılımından $z = 0$ noktasının bu fonksiyonun birinci mertebeden sıfırı olduğunu görüyoruz. Bu yüzden de $\dfrac{1}{\sin z}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası birinci mertebeden kutup noktasıdır.

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası olduğunda, ama $\varphi(z)$ fonksiyonu z_0 noktası komşuluğunda analitik fonksiyon olduğunda ve $\varphi(z_0) \neq 0$ şartı da sağlandığında, o zaman $f(z)\cdot\varphi(z)$ çarpımı z_0 noktasında aynen $f(z)$ fonksiyonunun singülerliğine sahip olacaktır. Bu yüzden de $\frac{e^{2z}}{\sin z}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında birinci mertebeden kutup noktası vardır. Ama $\frac{1}{z^3 e^{2z}}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında üçüncü mertebeden kutup noktası vardır. Bu $\frac{1}{z^3}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası üçüncü mertebeden kutup noktasıdır. $\frac{1}{e^{2z}}$ fonksiyonu ise $z = 0$ noktasında sıfıra dönüşmeyen analitik fonksiyondur.

8.2.7. Rezidüler, Logaritmik Rezidü ve Argüment Prensibi

$f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğunda Laurent serisine açılımındaki c_{-1} katsayısına $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü denir ve

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z)$$

gibi gösterilir. (8.56) formülünden

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta \qquad (8.58)$$

formülünü buluruz. Bu formülde C öyle bir çemberdir ki, bu çemberin dahilinde z_0 noktasından başka $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktaları yoktur.

Teorem 8.2.7.1

$f(z)$ fonksiyonunun kapalı Γ eğrisi üzerinde analitik fonksiyon olduğunu ve Γ eğrisi dahilinde sonlu sayıda izole edilmiş $z_1, z_2, \ldots, z_N$ singüler noktaları hariç diğer noktalarda analitik fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\ f(z) \tag{8.59}$$

formülü doğrudur.

İspat:

Her bir z_k singüler noktasını merkezi z_k noktasında öyle küçük yarıçaplı C_k çemberi içine alalım ki, tüm C_k çemberleri Γ eğrisi dahilinde yerleşsin ve bu çemberler birbirleri ile de kesişmesin. O zaman teorem 8.2.4.2 den buluruz:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)dz$$

Burada C_k çemberi dahilinde z_k singüler noktasından başka $f(z)$ fonksiyonunun başka singüler noktası olmadığı için

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\ f(z)$$

eşitliği bulunur. Buradan da teoremin ispatı alınır.

Teorem 8.2.7.1 kapalı eğri üzere alınmış integrallerin hesaplanması verilmiş fonksiyonun *rezidüsünün* hesaplanmasına getirilir. Fonksiyonun rezidüsünü fonksiyonu Laurent serisine açarak bulabiliriz. Ama nokta singüler nokta olduğunda, yani rezidüsünün bulunması istenen nokta kutup noktası olduğunda, rezidü Laurent serisini tam yazmadan da bulunabilir.

Şimdi $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında birinci mertebeden kutup noktasına sahiptir. O zaman $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Laurent serisine açılımı:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \tag{8.60}$$

şeklinde olur.

(8.60) eşitliğinin her yanını $z-z_0$ ifadesi ile çarpıp işlemin sonucunda elde edilen eşitliğin her yanından $z \to z_0$ şartında limit aldığımızda $\lim\limits_{z \to z_0}\left[(z-z_0)\cdot f(z)\right]=c_{-1}$ eşitliğini buluruz. Buradan da rezidünün tanımına esasen

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\lim_{z \to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right] \tag{8.61}$$

formülünü buluruz.

Dikkate alalım ki, rezidü sözcüğünün Türkçe anlamı "kalıntı" dır.

Şimdi $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

şeklinde fonksiyon olduğunu ve $A(z_0)\neq 0,\ B(z_0)=0,\ B'(z_0)\neq 0$ şartlarının sağlandığını varsayalım.

Teorem 8.2.6.4 den $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında birinci mertebeden kutup noktası olduğunu buluruz. Bu yüzden de

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{A(z)}{B(z)}=\lim_{z \to z_0}\frac{(z-z_0)A(z)}{B(z)}=\frac{A(z_0)}{\lim\limits_{z \to z_0}\dfrac{B(z)-B(z_0)}{z-z_0}}$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitlikten de aşağıdaki formül bulunur:

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z_0)}{B'(z_0)} \tag{8.62}$$

Örnek 8.2.7.1

$f(z)=\dfrac{e^{2z}}{\sin z}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında kalıntısını(rezidüsünü) hesaplayın.

Çözüm:

$z=0$ noktası $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{\sin z}$ fonksiyonunun birinci mertebeden kutup noktası olduğundan ve $e^{2z}\big|_{z=0}\neq 0$ olduğundan (8.63) formülünü uygulayarak buluruz:

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{e^{2z}}{\sin z}=\frac{e^{2z}}{\cos z}\bigg|_{z=0}=1$$

Şimdi $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında m–mertebeden kutup noktası olduğunu varsayalım. O zaman $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğunda Laurent serisi (8.57) şeklinde yazılır. Bu yüzden (8.57) eşitliğinin her yanını $(z-z_0)^m$ ifadesi ile çarparak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\ldots \quad (8.63)$$

(8.63) eşitliğinin her yanını $m-1$ kez diferansiyelleyip, bulduğumuz eşitlikten $z\to z_0$ şartında limit alsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\cdot c_{-1}$$

Bu eşitlikten de kalıntının(rezidünün) tanımına esasen aşağıdaki formülü buluruz:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \quad (8.64)$$

Örnek 8.2.7.2

$f(z)=\dfrac{1}{z^3e^{2z}}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında kalıntısını(rezidüsünü) hesaplayın.

Çözüm:

$z=0$ noktası $f(z)=\dfrac{1}{z^3e^{2z}}$ fonksiyonunun $m=3$ üncü mertebeden kutup noktasıdır. Bu yüzden de (8.64) formülünü uygulayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0}\frac{1}{z^3e^{2z}}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^3}{z^3e^{2z}}\right]\Bigg|_{z=0}=2$$

Şimdi $f(z)$ fonksiyonunun kapalı Γ eğrisi üzerinde analitik fonksiyon olduğunu ve Γ eğrisi üzerinde sıfıra dönüşmediğini, Γ eğrisinin dahilinde $f(z)$ fonksiyonunun sonlu sayıda kutup noktalarının ve sonlu sayıda sıfırlarının olduğunu varsayalım. Bu şartlarda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

integralini hesaplayalım. Bu amaçla, önce $\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun singüler noktalardaki (mahsusi noktalarda) kalıntısını(rezidüsünü) hesaplayalım.

z_0 noktasının $f(z)$ fonksiyonunun m–mertebeden sıfırı olduğunu varsayalım. O zaman

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots$$

ve uygun olarak

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m.c_m(z-z_0)^{m-1}+(m+1)c_{m+1}(z-z_0)^m+\ldots}{c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots} \qquad (8.65)$$

(8.65) formülünden $\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun z_0 noktası birinci mertebeden kutup noktası olduğu görülür. Bu yüzden bu fonksiyonun z_0 noktasındaki kalıntısını (rezidüsünü) (8.61) formülü ile hesaplayarak buluruz:

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}=m \qquad (8.66)$$

Şimdi z_0 noktasının $f(z)$ fonksiyonunun m mertebeli kutup noktası olduğunu varsayalım. O zaman

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \ldots,$$

ve uygun olarak

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m.c_{-m}(z-z_0)^{-m-1} + (-m+1)c_{-m+1}(z-z_0)^{-m} + \ldots}{c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \ldots} \tag{8.67}$$

(8.67) formülünden z_0 noktasının $\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun birinci mertebeden kutup noktası olduğu görülür. Bu yüzden $\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun kalıntısını(rezidüsünü) z_0 noktasında (8.67) formülünü kullanarak (8.61) formülü ile hesaplarsak buluruz ki:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m \tag{8.68}$$

$f(z)$ fonksiyonunun Γ eğrisi dahilinde yerleşen sıfırlarının tekrarlanma mertebelerinin toplamını M sayısı ile, kutup noktalarının tekrarlanma mertebelerinin toplamını N ile gösterelim. O zaman teorem 8.2.7.1 den ve (8.66) ile (8.68) formüllerinden aşağıdaki formül bulunur:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - N \tag{8.69}$$

(8.69) formülünün sol yanındaki integrale Γ eğrisi üzere logaritmik kalıntı (logaritmik rezidü) denir.

Dikkate alalım ki,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \mathrm{Ln}\ f(z)$$

olduğundan logaritmik kalıntının hesaplanması için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Ln}\ f(z)\Big|_{\Gamma} \tag{8.70}$$

formülünü yazabiliriz. (8.70) formülünün sağ yanındaki ifadede z noktası Γ eğrisi üzere pozitif yönde hareket ettiğinde $\operatorname{Ln} f(z)$ fonksiyonunun aldığı artışı gösterir. Ama

$$\operatorname{Ln}\ f(z) = \ell n\left|f(z)\right| + i\operatorname{Arg}\ f(z)$$

olduğundan ve bu formülde $\ell n\left|f(z)\right|$ fonksiyonu tek değerli fonksiyon olduğundan buluruz:

$$\operatorname{Ln}\ f(z)\Big|_{\Gamma} = i.\operatorname{Arg}\ f(z)\Big|_{\Gamma}$$

Bunu (8.70) formülünde dikkate aldığımızda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\ f(z)\Big|_{\Gamma} \tag{8.71}$$

Bu formüldeki

$$Q = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\ f(z)\Big|_{\Gamma}$$

sayısı z noktası Γ eğrisi üzerinde pozitif yönde hareket ettiğinde $w = f(z)$ vektörünün koordinat başlangıcı etrafında yaptığı devirlerin sayısını (periyotların sayısını) gösterir. (8.69) ve (8.71) formüllerini karşılaştırarak aşağıdaki teoremi buluruz.

Teorem 8.2.7.2 (Argüment Prensibi)

$f(z)$ fonksiyonunun kapalı Γ eğrisi üzerinde analitik fonksiyon olduğunu ve bu eğri üzerinde sıfıra dönüşmediğini varsayalım. $f(z)$ fonksiyonunun Γ eğrisi dahilinde sonlu sayıda kutup noktalarının ve sonlu sayıda sıfırlarının olduğunu varsayalım. O zaman z noktası Γ eğrisi üzerinde pozitif yönde hareket ettiğinde $w = f(z)$ vektörünün koordinat başlangıcı etrafında dönmelerinin sayısı $f(z)$ fonksiyonunun

Γ eğrisi dahilindeki tüm sıfırlarının tekrarlanma sayılarının toplamı olan M sayısı ile tüm kutup noktalarının tekrarlanma mertebesi olan N sayısının farkına eşittir. Yani,

$$Q = M - N \tag{8.72}$$

formülü doğrudur.

8.3. $L - \lambda I$ Operatörünün Green Fonksiyonunun Rezidü Teorisinin Uygulanmasıyla İnşası

Hatırlatalım ki, $L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu olan $G(x, \xi, \lambda)$ $(5.7), (2.44), (5.8)$ ve

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)P_0(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix} \tag{8.73}$$

formülleri ile bulundu.

$y_j(x) = y_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ fonksiyonları

$$\ell(y) - \lambda y = 0$$

homojen diferansiyel denkleminin

$$y_j^{(\upsilon-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 1 & , j = \upsilon \\ 0 & , j \neq \upsilon \end{cases} \qquad j, \upsilon = 1, 2, ..., n$$

şartlarını sağlayan çözümleri sistemidir.

$W(x)$ fonksiyonu $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyanıdır ve $[a, b]$ kapalı aralığında sıfırdan farklıdır. $P_0(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sıfırdan farklı fonksiyondur ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinde $y^{(n)}$ türevinin katsayısıdır.

Böylece, $L-\lambda I$ diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu (5.7), (2.44), (5.8), (8.73) formülleri ile tanımlanır.

(2.44) ve (5.8) formülleri ile tanımlanan uygun olarak $\Delta(\lambda)$ ve $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonlarının λ parametresine nazaran tüm kompleks düzlemde λ parametresinin analitik fonksiyonları oldukları açıktır. Bu yüzden de (5.7) formülünden aşağıdaki teorem alınır.

Teorem 8.3.1

$L-\lambda I$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunu λ parametresinin meromorf fonksiyonudur. $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun kutup noktaları L operatörünün yalnız karakteristik sayılarıdır.

Şimdi burada λ_0 sayısının $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sade(tekrarlanmayan) sıfırı olduğunu varsayalım. Yani $\Delta(\lambda_0)=0$, $\Delta'(\lambda_0)\neq 0$ olsun. O zaman λ_0 sayısı $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun yalnız birinci mertebeden kutup noktası olur. Bu halde $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{R(x,\xi)}{\lambda-\lambda_0}+G_1(x,\xi,\lambda) \tag{8.74}$$

şeklinde gösterebiliriz. (8.74) formülündeki $G_1(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasının komşuluğunda analitik fonksiyondur. Dikkate alalım ki, $\lambda=\lambda_0$ noktası $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunun regüler noktası olduğunda, yani kutup noktası olmadığında $R(x,\xi)\equiv 0$ almak gerekir. λ_0 noktası $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kutup noktası olduğundan

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_0}\, G(x,\xi,\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left[(\lambda-\lambda_0)G(x,\xi,\lambda)\right]=R(x,\xi)=(-1)^n\,\frac{H(x,\xi,\lambda)}{\Delta'(\lambda_0)}$$

veya

$$R(x,\xi)=(-1)^n\,\frac{H(x,\xi,\lambda)}{\Delta'(\lambda_0)}$$

formülünü buluruz.

Burada dikkate alalım ki, $H(x,\xi,\lambda)$ determinantını birinci satır elemanlarına nazaran açtığımızda $g(x,\xi)$ elemanının katsayısının $\Delta(\lambda_0)=0$ olduğunu görüyoruz. Bu yüzden de $R(x,\xi)$ fonksiyonunun kendisi ve bu fonksiyonun n–inci mertebeye kadar tüm türevleri $a \le x,\xi \le b$ bölgesinde x ve ξ değişkenlerinin tümüne nazaran sürekli fonksiyonlar olur.

(5.8) formülünden görüyoruz ki, $\lambda=\lambda_0$ halinde $R(x,\xi)$ fonksiyonunu $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun birinci satır elemanlarına nazaran açmakla

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$$

fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde gösterilebilir. Bu yüzden de her bir değişmez sağlanan ξ için $R(x,\xi)$ fonksiyonu x değişkenine nazaran aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\ell(R)-\lambda_0 R=0$$

(5.8) formülünden aynı zamanda kolaylıkla görülür ki, $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu ve uygun olarak $R(x,\xi)$ fonksiyonu değişmez sağlanan ξ için x değişkenine nazaran $U_\upsilon(R)=0,\ \upsilon=1,2,\ldots,n$ sınır şartlarını da sağlar. Bununla biz $R(x,\xi)$ fonksiyonunun L operatörünün λ_0 karakteristik sayısına uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu buluruz.

λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun tekrarlanmayan sıfırı olduğundan, λ_0 karakteristik sayısına L diferansiyel operatörünün yalnız bir tane $y_0(x)$ (x–e bağlı olmayan sabit çarpım dakikliği ile) karakteristik fonksiyonu olur. Bu yüzden de $R(x,\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$R(x,\xi)=a(\xi)y_0(x) \tag{8.75}$$

Şimdi $\overline{G(\xi,x,\lambda)}$ fonksiyonunu $G^*(x,\xi,\lambda)$ ile gösterelim, yani

$$G^*(x,\xi,\lambda)=\overline{G(\xi,x,\lambda)}$$

olsun. O zaman $G^*(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu $L^*-\overline{\lambda}I$ operatörünün Green fonksiyonu olur.

Diğer yandan (8.74) eşitliğine dayanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$G^*(x,\xi,\lambda)=\frac{\overline{R(\xi,x)}}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda_0}}+\overline{G_1(\xi,x,\lambda)}.$$

Bu yüzden de değişmez sağlanan ξ için $\overline{R(\xi,x)}$ fonksiyonu L^* operatörünün $\overline{\lambda_0}$ sayısına uygun karakteristik fonksiyonu olur.

Böylece, L^* operatörünün $\overline{\lambda_0}$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonlardan birini $z_0(x)$ ile gösterirsek, o zaman

$$\overline{R(\xi,x)}=b(\xi)\cdot z_0(x)$$

eşitliğini yazarız. Buradan da

$$R(x,\xi)=\overline{b(x)}\cdot\overline{z_0(\xi)}$$

eşitliğini yazarız. Bu sonuncu eşitliği (8.75) eşitliği ile karşılaştırarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$R(x,\xi)=c\cdot y_0(x)\cdot\overline{z_0(\xi)} \tag{8.76}$$

bu eşitlikte c keyfi bir sayıdır. Şimdi c sayısını seçelim. (8.74) ve (8.76) formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G(x,\xi,\lambda)y_0(\xi)d\xi=c\cdot y_0(x)\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}d\xi+(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G_1(x,\xi,\lambda)y_0(\xi)d\xi \tag{8.77}$$

(8.77) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci toplamdan λ_0 noktasının komşuluğunda analitik fonksiyon olduğundan ve bu toplamda $(\lambda-\lambda_0)$ çarpımı olduğundan $\lambda\to\lambda_0$ şartında bu toplamın limiti sıfıra yakınsıyor. Buna göre de (8.77) eşitliğinden

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \int_a^b G(x,\xi,\lambda) y_0(\xi) d\xi = c \cdot y_0(x) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi \qquad (8.78)$$

eşitliğini buluruz.

Diğer yandan tanıma esasen

$$(L - \lambda I) y_0 = (\lambda_0 - \lambda) y_0$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitlikten de

$$(L - \lambda I)^{-1} y_0 = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} y_0$$

eşitliği bulunur. $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu $L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu olduğundan, sonuncu eşitlikten aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_a^b G(x,\xi,\lambda) y_0(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} y_0(x)$$

Bulduğumuz bu eşitliği (8.78) eşitliğinin sol yanında dikkate alsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$-y_0(x) = c \cdot y_0(x) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi$$

Buradan da aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$c = -\frac{1}{\int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi}$$

c sayısı için bulduğumuz bu ifadeyi (8.76) eşitliğinde yerine yazsak $R(x,\xi)$ fonksiyonu için aşağıdaki formülü buluruz:

$$R(x,\xi) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}d\xi}$$

$R(x,\xi)$ fonksiyonu için bu ifadeyi (8.74) formülünde yerine yazsak $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki açılımı buluruz:

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}d\xi} + G_1(x,\xi,\lambda) \qquad (8.79)$$

Bu açılımda $G_1(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasının komşuluğunda analitik olan fonksiyondur.

(8.79) formülündeki $y_0(x)$ ve $z_0(x)$ fonksiyonlarını öyle seçebiliriz ki,

$$\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}d\xi = 1$$

şartı sağlanır. Bu halde $z_0(x)$ ve $y_0(x)$ fonksiyonları normalleştirilmiş fonksiyon olur. $y_0(x)$ ve $z_0(x)$ fonksiyonları aynı zamanda normalleştirilmiş olduklarında

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(x)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,\xi,\lambda) \qquad (8.80)$$

açılımı bulunur.

Böylece, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 8.3.2

λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sade(tekrarlanmayan) sıfırı olduğunda $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,\xi,\lambda)$$

şeklinde gösterilir. Burada $G_1(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasının komşuluğunda analitik fonksiyondur.

Bu işlemler devam ettirilerek aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 8.3.3

Lineer diferansiyel L operatörünün tüm karakteristik $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$ değerleri tekrarlanmayan olduklarında ($i \neq j$ olduğunda $\lambda_i \neq \lambda_j$ şartı sağlandığında) $L-\lambda I$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu düzgün yakınsak

$$G(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_k(x)\overline{z_k(\xi)}}{\lambda_k-\lambda} \tag{8.81}$$

serisine açılır. Burada $y_k(x)$ ve $z_k(x)$ uygun olarak L ve L^* operatörlerinin λ_k ve $\overline{\lambda_k}$ karakteristik sayılarına uygun normalleştirilmiş karakteristik fonksiyonlarıdır. Özel halde $L \equiv L^*$ olduğunda (8.81) açılımında $\lambda_k=\overline{\lambda_k}$ ve $y_k(x)\equiv z_k(x)$ eşitlikleri her bir $k=0,1,2,\ldots$ için sağlanır.

SONUÇ

Lineer diferansiyel operatörler ve lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonlarının inşası yöntemleri anlatıldı. Bunlarla bağlı olarak lineer uzay, lineer diferansiyel operatör, lineer diferansiyel operatörün tersi ve lineer diferansiyel operatörün tersinin bulunması için lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun kullanılması gösterildi. Lineer diferansiyel denklemlerin Green fonksiyonunun uygulanması ile integral denkleme getirilmesi yöntemi gösterildi. $\delta-$fonksiyonunun uygulanması ile lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi gösterildi. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin uygulanması ile parametre bulunduran lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi gösterildi.

KAYNAKLAR

1. Collatz, L., Eigenvertaufgaben Mit. Technischen Anwendungen Geest portig, 1963.

2. Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear Operators I. General Theory, Interscience Publishers, Inc. New York, 1957.

3. Hassani, S., Foundations of Mathematical Physics. U.S.A. Mexico of Canada, 1991.

4. Kamke, E., Differential Gleichungen Lösungmethoden Leipzig, 1959.

5. Naymark, M.A., Lineyniye Differansialniye Operatorı, Moskova, 1969.

6. Roach, G., Green's Functions. Second Edition London Van Nostrand Reinhold, 1970.

7. Rubinstein, Z.A., Course in Ordinary and Partial Differential Equations, New York, 1969.

8. Stakgold, I., Green's Functions and Boundary Value Problems New York, Wikey-interscience, 1979.

9. Tixonov, A.N., Samarskiy, A.A., Uravneniya Matematiçeskoy Fiziki. İzd. "Nauka" Moskova, 1966.

10. Butkovskiy, A.G., Mustafayev, M.I., Fundamental Finite Control, Budapest, Problems of Control and İnformation Theory, vol.5(1), 71-85, 1976.

11. Butkovskiy, A.C., Structural Theory of Distributed Systems Holsted Press. New York, 1983.

12. Mustafayev, M.I., Fundamental Finite Controls for Sourcelike disturbances of General Form, Avtomat. İ. Telemeh 1981 No., Pt.1, 17-26, Automat. Remote Control 42, 1593-1601, 1981.

13. Hüseyinov, E., İntegral Denklemler. Azerbaycan Dövlet Tedris-Pedagoji Edebiyyat Neşriyatı Bakü, 1962.

14. Churchill, R., Brown J. and Verhey R., Complex Variables and Applications, 3rd ed. New York, Mc Graw-Hill 1974.

15. San, N., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, İzmir Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, 1979.

16. Goodstein R,L., Complex Functions; A first Course In The Theory of A single Complex Veriable; New York, Mc Graw-Hill 1965.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Ankara'da doğan Yusuf KARACAİLHAN, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Boğaziçi İlkokulu, Üreğil Ortaokulu ve Ankara Gazi Lisesinde tamamlamıştır. 2003 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2008 yılında başarıyla bitirmiştir.

2010 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Lineer Diferansiyel Operatörler ve Parametreye Bağlı Lineer Diferansiyel Operatörlerin Green Fonksiyonunun İnşası Metodu Üzerine" başlıklı tezi ile yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.

2008 yılından beri Ankara'da Özel Ezgi Dershanesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

İletişim Bilgileri

Adres: Durali Aliç Mahallesi 931. Sokak No: 28

06480 ANKARA

Telefon: (554) 279 49 11

E-posta: yusuf_karacailhan@hotmail.com