T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Elif SERİN

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr.Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Elif SERİN

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr.Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130014 numaralı öğrencisi Elif SERİN'in hazırladığı "Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabime Metodu" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 24/12/2012 Pazartesi günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU(Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10/01/2013 tarih ve 01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

10/01/2013

Enstitü Müdürü

(Ünvanı, Adı Soyadı)

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Elif SERİN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 68

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, (N,p) - Nörlund toplanabilme ile Riesz toplanabilmenin genel hali olan genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme metodunu incelemektir. Bu nedenle birinci bölümde; bir limitleme metodu olan matris dönüşümleri ile ilgili açıklamalar, ikinci bölümünde ise çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme için etkisizlik ve limitleme teoremlerin ispatı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise; Fourier serilerinin genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler:Nörlund toplanabilme, Riesz toplanabilme, Genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme, Fourier serisi

THE METHOD OF GENERALİZED NÖRLUND SUMMABİLİTY

Elif SERİN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2012; Page: 68

Thesis Supervisor: Assoc. Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

The purpose of this study which composed of four parts, is to investigate (N,p) - Nörlund summability and Riesz summability which has generalised. The descriptions of matrix transformations as a method of limiting are in the first chapter, the basic definition and teorems used in this study are given in the second one.

In the third section; the proof of ineffectiveness and limitation theorems are studied for generalised Nörlund summability.

In the fourth section; the proof theorem related to generalized Nörlund summability of Fourier series is studied.

Key Words: Nörlund summability, Riesz totally, Generalized Nörlund summability, Fouries series

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ve ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, bölüm başkanımız Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e, hocalarım Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ile Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN'a, ayrıca bana her zaman destek olan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

(N,p)	:	Nörlund Toplanabilme
(N,p,q)	:	Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilme
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Cümlesi
(a_{nk})	:	Satır ve Sütun Sayısı Sonsuz Olan Kompleks Terimli Bir Matris
$a_n = o(1)$	:	(a_n) dizisinin limiti sıfır
$a_n = O(1)$	:	(a_n) dizisi sınırlı
$\Delta p_n = p_n - p_{n-1}$	:	p_n nin simetrik fark

1. GİRİŞ

$A=(a_{nk})$; $(n,k\in N=\{0,1...\})$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris ve U, V; bütün kompleks terimli dizilerin oluşturduğu S uzayının alt cümleleri olan

$$C_0=\left\{s=(S_k):\lim_{k\to\infty}S_k=0,\ S_k\in\mathbb{C}\right\},$$

$$C=\left\{s=(S_k):\lim_{k\to\infty}S_k\ \text{var},\ S_k\in\mathbb{C}\right\},$$

$$\ell_p=\left\{s=(S_k):\sum_{k=0}^{\infty}|S_k|^p<\infty,\ S_k\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\ell_\infty=\left\{s=(S_k):\exists M>0 \text{ öyleki } \forall k\in N \text{ için } |S_k|\le M, S_k\in\mathbb{C}\right\}$$

dizi uzaylarından herhangi ikisini temsil etsin. Buradaki her bir cümle $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzay olduğundan her $s=(S_n)\in U$ dizisini, $s=\begin{bmatrix}S_0\\ S_1\\ \vdots\end{bmatrix}$ vektörel formda yazabiliriz. Böylece $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi ile (S_n) dizisine bildiğimiz klasik matris çarpımını uygulayarak,

$$\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_0\\ S_1\\ \vdots\\ S_k\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}a_{0k}S_k\\ \sum_{k=0}^{\infty}a_{1k}S_k\\ \vdots\\ \sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k\\ \vdots\end{bmatrix}=(A_n(s))$$

dizisini elde ederiz. Burada $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k$ serilerinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Bu şekilde elde edilen $(A_n(s))$ dizisine, $s=(S_n)$

dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir. Her $s=(S_n)\in U$ için her bir terimi bir sonsuz seri olan $(A_n(s))$ dizileri V dizi uzayının elemanları ise, $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisine U dan V ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A\in(U,V)$ ile gösterilir.

Yukarıda tanımladığımız biçimde bir dönüşüm için özel dönüşümler olan matrisler yerine, neden genel bir lineer dönüşüm alınmadığı sorusu aklımıza gelebilir. Matrisleri seçişimizin nedeni, çoğu hallerde iki dizi uzayı arasındaki en genel dönüşümün bir matrisle verilebilmesindendir.

Dizilerle matris dönüşümleri arasındaki ilişki, toplanabilme teorisiyle bulunan bazı özel sonuçlarla doğmuştur. Toplanabilme teorisindeki temel amaç, Cauchy anlamındaki yakınsaklık kavramını genişletmektir. Bu durumu, Euler'in verdiği şu klasik örnekle biraz daha açıklayalım:

Euler, $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...$ formülünde $x=1$ alarak, $1-1+1-1+...=\frac{1}{2}$ garip sonucunu elde etti. Biz biliyoruz ki yukarıdaki formül $|x|<1$ için geçerlidir. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1...$ serisi veya kısmi toplamlar dizisi olan $s=(S_n)=(1,0,1,0,...)$ dizisi Cauchy anlamında ıraksaktır. Bu durumda bildiğimiz (Cauchy anlamındaki) yakınsaklık tanımına göre $s=(1,0,1,0,...)$ dizisinin limiti 1/2 olamaz. Euler'in yaptığı işlem garip görünmekte ise de bizim için başka bir yakınsaklık fikrini ortaya çıkarmaktadır.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin toplamını $(S_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ dizisinin limiti olarak değil de,

$$(\sigma_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}S_k\right)$$

dizisinin $n \to \infty$ için limiti olarak tanımlarsak, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi bu yeni tanıma göre yakınsak ve limiti 1/2 olur. Gerçekten;

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{1} S_1 + \ldots + \binom{n}{n} S_n \right]$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{p} \right] \qquad ; \qquad p = \begin{cases} n, & n \text{ çift} \\ n-1, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

dır. Yukarıdaki işleme dikkat edilirse (σ_n) dizisi, $s = (S_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ olmak üzere (S_n) dizisinin,

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $A = (a_{nk})$ matrisiyle, başta tanımladığımız biçimde dönüşümden ibarettir. Yine başta verdiğimiz gösterimlere göre $s = (S_n) \in \ell_\infty$, $(A_n(s)) \in C$ olduğundan özel bir A matrisiyle sınırlı (fakat ıraksak) bir diziyi, yakınsak bir diziye dönüştürmüş olduk. Bu durumda bizim esas amacımız ortaya çıkmış olmaktadır.

Bir (S_n) dizisi ile bir s sayısını birleştirme amacını oluşturan ve bilinen yakınsaklık kavramının yerini alabilen pek çok sayıda tanım vardır. Bunların her biri daha önce ifade ettiği anlamı koruyarak diğerinden ayrılır. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi yeni tanımla yakınsak olmaktadır.

Diğer taraftan; Cauchy anlamında yakınsak olan her (S_n) dizisi, yeni tanımla da yakınsaktır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

ise

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \quad k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere (S_n) dizisini A–dönüşümü olan $(\sigma_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k\right)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} S_k \to s$$

dır. Gerçekten; (S_n) dizisi Cauchy anlamında yakınsak olduğundan,

$\forall \in > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N$ için $|S_n - s| < \in$ dır. Ayrıca

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - s) + s \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır. $U_n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - s)$ ile tanımlansın.

$$|U_n| \le \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} |S_k - s| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} |S_k - s|$$

$$\le \frac{1}{2^n} M \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} + \frac{1}{2^n} \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \right]; \left(M = \sup_k |S_k - s| < \infty \right)$$

$$|U_n| \le \frac{\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} (M - \varepsilon)}{2^n} + \varepsilon$$

bulunur. O halde $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ dır. Öte yandan $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ olduğu (1.1)'de kullanılırsa, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ elde edilir.

Böylece bu yeni tanımla Cauchy anlamında yakınsak olan her dizi yine yakınsak olmaktadır. Yani yeni tanım, bilinen yakınsaklık tanımından daha geniş bir uygulama alanına sahiptir.

İşte bu durum bize, Cauchy anlamında ıraksak olan bu tip dizileri yakınsak yapabilen ve üstelik Cauchy anlamındaki yakınsaklığı da koruyan tanımları tanımlama fikrini vermiştir.

Genel olarak, tanımlanacak yeni metodların aşağıdaki özelliklere sahip olmaları gerekir:

1) Cauchy anlamında yakınsak ve limiti s olan bir dizi, yeni anlamda da yakınsak olmalıdır. Özellikle aynı s limitine yakınsaması gerekir.
2) Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi, yeni metodla yakınsak olmalıdır.
3) Eğer bir (S_n) dizisine farklı iki metod uygulanır ve bu dizi bu iki metodla da yakınsak ise her iki metod için (S_n) in limiti aynı olmalıdır.

1) ve 2) koşulları temel koşullardır fakat bütün metodlar 3) koşulunu sağlamak zorunda değildir. Ancak biz bu üç koşulu sağlayan metodları ve bunlara ek olarak Cauchy anlamında yakınsak serilerin cebirsel işlemlerinin temel kurallarının; yani;

$$A_1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s \ \text{(her sabit } \lambda \text{ için)}$$

$$A_2)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \mp t$$

$$A_3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$$

aksiyomlarını sağlayan toplama metotlarını inceleyeceğiz.

Bilinen yakınsaklık tanımına göre açıklık getirilmemiş bazı problemler, yeni tanıma göre açıklığa kavuşturulmuştur. Şöyle ki; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ ve bu iki serinin Cauchy çarpımı $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ serisinin ne zaman yakınsayacağı, önemli güçlükler arz eden bir problemdir. Fakat 1890 yılında E. Cesa'ro, "Cesa'ro Teoremi" olarak bilinen teoremi ispatlamıştır.

Görüldüğü gibi Cesa'ro burada Cauchy anlamında yakınsaklık tanımını kullanmamış, adına "Aritmetik Ortalama" diyeceğimiz yeni bir toplama metodu kullanmıştır.

Ünlü Alman matematikçisi O. Toeplitz (1881 – 1940) bize her toplanabilme metodunun özel bir matris dönüşümü olduğunu göstermiştir. Toeplitz, yakınsak diziler uzayını kendisine resmeden ve her bir yakınsak dizinin limitini koruyan bırakan bütün $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,...)$ sonsuz matrislerini karekterize etmiştir. Toeplitz, başta tanımladığımız biçimdeki $A_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ serilerinin her bir n=0,1,2,... için yakınsaması durumunda $S_k \to \ell \, (k \to \infty)$ olduğunda $A_n(s) \to \ell \, (n \to \infty)$ olması için A üzerindeki gerekli ve yeterli koşulları araştırmıştır. Böylece matris dönüşümleri ile toplanabilme metodları arasındaki ilişki, 1911 yıllarında O.Toeplitz tarafından kurulmuştur.

Şimdi yukarıdaki örnekte tanımladığımız

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \ k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases}$$

şeklindeki $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Herhangi bir (S_n) dizisinin A–dönüşümü (σ_n) olmak üzere $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ idi. Dolayısıyla $\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$

dır. Bu metod, Euler metodu $\left(E_1 - \text{toplama metodu}\right)$ olarak adlandırılır. Başta verilen örnekte bu metodun $\left(S_n\right) = \left(1,0,1,0,...\right)$ dizisini 1/2' ye limitlediğini görmüştük.

Aslında bu $E_1 -$ toplama metodu, adına Nörlund ortalaması diyeceğimiz başka bir toplama metodunun özel bir halidir. Şöyle ki; $\left(\left(N_p\right)_{nk}\right)$ ile göstereceğimiz Nörlund matrisi şu şekilde tanımlanır: $P_n = p_0 + ... + p_n \neq 0$ olmak üzere

$$\left(N_p\right)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , \; k \leq n \\ 0 & , \; k > n \end{cases} \qquad n,k = 0,1,...$$

dır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = \binom{n}{k}$ seçilirse $P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ olacağından,

$$\left(N_P\right)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , \; k \leq n \\ 0 & , \; k > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \; k \leq n \\ 0 & , \; k > n \end{cases}$$

$$= \left(E_1\right)_{nk}$$

elde edilir. Bu ise $E_1 -$ metodunun, Np–Nörlund metodunun özel bir hali olduğunu gösterir. Np–Nörlund metodu üçgensel bir matristir ($A = \left(a_{nk}\right)$ matrisinde, her $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise A matrisine “üçgensel matris” denir. Burada (N,p,q) nun q=1 için özel hali incelenmiştir. Yani (N,p,q) metodu (N,p) nin genellemesi olmaktadır. Bu çalışmada genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde genel olarak çalışmamızda faydalanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1: F, reel ve ya kompleks sayıların bir cismi v=0,1,2, …için $(a_{nv}) \in$ F olmak üzere bir A=(a_{nv}) sonsuz matrisi ve (s_n) de F de bir dizi olsun. Bu takdirde (s_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm,

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

olarak tanımlansın. (t_n) dizisine (s_n) dizisinin A- dönüşüm dizisi denir. A`ya da diziden diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olabilmesi için (2.1)`deki toplamın her n için yakınsak olması gerekir [1].

Tanım 2.2: Bir A=(a_{nv}) matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limitide koruyorsa A matrisine regülerdir denir [1].

Teorem 2.1: Bir A=(a_{nv}) matrisini regüler olması için gerek ve yeter şartları:

1. Her v için $\lim_{n\to\infty} a_{nv} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1$

3. Her n için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \leq$ M olacak şekilde n`den bağımsız bir M pozitif reel sayısı vardır.

Bu teoreme Silverman-Teoplitz teoremi adı verilir [1].

Tanım 2.3: Reel veya kompleks terimli bir B= $\left(b_{nv}\right)$ sonsuz matrisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} b_{nv} a_v \tag{2.2}$$

olacak şekilde tanımlanan (t_n) dizisine, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin B-dönüşüm dizisi denir ve B`ye seriden-diziye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün tanımlı olması için (2.2)`deki serinin her n için yakınsak olması gerekir [1].

Tanım 2.4: Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin $A = (a_{nv})$ matrisi yardımıyla (t_n) dönüşüm dizisi,

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v$$

olarak tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n$ = $\lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v = s$ ise, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s-değerine A-toplanabilirdir denir [1].

Tanım 2.5: Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun. $A = \left(a_{nv}\right)$ ile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin (t_n) dönüşüm dizisi

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v$$

olacak şekilde tanımlanmış olsun. Eğer $(t_n) \in BV$ yani $\left(t_n\right)$ sınırlı salınımlı ise, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine Mutlak A-toplanabilir denir veya $|A|$ -toplanabilir denir. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi $|A|$ -toplanabilir ise, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in |A|$ veya $(s_n) \in |A|$ sembollerinden biri ile gösterilir [1].

Tanım 2.6: Hepsi birden sıfır olmayan, non-negatif sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n, \qquad p_0 > 0 \quad , \quad \text{(n=0,1,2,3,…)}$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (U_n) dizisine

$$U_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v \tag{2.3}$$

ile verilen dönüşüme, Nörlund dönüşümü veya Nörlund ortalaması denir ve (N, p_n) ile gösterilir.

(N, p_n) ortalamasının matrisinin elemanları,

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} & , v \le n \\ 0 & , v > n \end{cases} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlıdır [1].

Teorem 2.2: (N, p_n) ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$$

olmasıdır [1].

Tanım 2.7: Hepsi birden sıfır olmayan non-negatif sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n \,, \qquad p_0 > 0 \quad , \qquad \text{(n=0,1,2,3,…)}$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (T_n) dizisine

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v \tag{2.5}$$

ile verilen dönüşüme Riesz dönüşümü veya Riesz ortalaması denir ve $(\overline{N}, p_n)$ ile gösterilir.

$(\overline{N}, p_n)$ Riesz ortalamasının matrisinin elemanları,

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_v}{P_n} & ,v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 2.3: $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$ olmasıdır [1].

Tanım 2.8: Bir (s_n) dizisinden (t_n^k) dizisine

$$t_n^k = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{v=0}^{n} \binom{n-v+k-1}{k-1} s_v \tag{2.7}$$

şeklinde tarif edilen dönüşüme k. mertebeden Ceso`ra dönüşümü denir. Bu dönüşüme karşılık gelen matris,

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-v+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} & ,v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tarif edilir[1].

Tanım 2.9: Bir regüler metot toplamsallık özelliğine sahip olduğunda total regülerdir denir. Yani; her sonlu veya sonsuz s için $s_n \to s \Rightarrow t_n \to s$ ise bu reel dönüşüme total regülerdir denir [2].

Teorem 2.4: Bir (s_n) dizisinden bir $(\tilde{t}_n)$ dizisine ,

$$\tilde{t}_n = \sum_{v=0}^{n} c_{nv} s_v \qquad (\text{v>n için } c_{nv} = 0) \tag{2.9}$$

ile tanımlanan reel dönüşümün total regüler olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün pozitif ve regüler olmasıdır [2].

Tanım 2.10: $p_n \neq 0$ olmak üzere (s_n) dizisinin (N, p_n) dönüşüm dizisi (U_n) olsun. Eğer $\lambda > 0$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{P_n}{p_n} \right|^{\lambda-1} \left| U_n - U_{n+1} \right|^{\lambda} < \infty \tag{2.10}$$

ise (s_n) dizisine λ. mertebeden mutlak Nörlund toplanabilir veya $|N, p_n|_{\lambda}$ -toplanabilir denir [3].

Tanım 2.11: $q_n \neq 0$ olmak üzere (s_n) dizisinin (N, q_n) dönüşüm dizisi (v_n) olsun. Eğer $\lambda > 0$ için, $Q_n = q_0 + q_1 + ... + q_n$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{Q_n}{q_n} \right|^{\lambda-1} \left| V_n - V_{n+1} \right|^{\lambda} < \infty \tag{2.11}$$

ise (s_n) dizisine λ. mertebeden mutlak Riesz toplanabilir veya $\left|\bar{N}, q\right|_{\lambda}$ -toplanabilir denir [3].

Tanım 2.12: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

i) $p_n > 0$

ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \leq 1$

olacak şekilde tanımlanan (p_n) dizilerinin cümlesi, $\mathcal{M}$ ile gösterilir $[4]$.

$p_0 \neq 0$ olmak üzere $P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v$ ile tanımlansın. Bu durumda (c_n) dizisi de,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} c_v = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

olarak tarif edilir. Aynı zamanda

$$c_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} c_v$$

olarak kabul edilir [4].

Tanım 2.13: (a_n) ve (b_n) verilen iki dizi olmak üzere, a_n, b_n ' nin iki pozitif sabit ile çarpımları arasında kalıyorsa, bu notasyon $a_n \underset{\cap}{\cup} b_n$ notasyonu ile gösterilir. Yani;

$$k_1 b_n \le a_n \le k_2 b_n$$

olacak şekilde k_1, k_2 pozitif reel sabitleri varsa, bu $a_n \underset{\cap}{\cup} b_n$ notasyonu ile gösterilir [5].

Tanım 2.14: (A) ve (B) iki toplanabilme metodu olmak üzere; her (A) toplanabilen dizi aynı değere (B) toplanabiliyorsa, (A) toplanabilme metodu (B) toplanabilme metodunu gerektirir denir. $(A) \subseteq (B)$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.15: (A) ve (B) iki toplanabilme metodu olmak üzere bu iki metottan biri diğerini gerektiriyorsa, (A) ve (B) metotlarına denktir denir. (A) ve (B) gibi iki toplanabilme metodunun denkliği

$$(A) \equiv (B) \Leftrightarrow (A) \subseteq (B) \wedge (B) \subseteq (A)$$

ile gösterilir [4].

3. (N,p,q) – METODU

Bu bölümde genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlik tanımını vererek, bu metot ile ilgili etkisizlik ve limitlime teoremlerini ifade ve ispat edeceğiz.

3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİK

Tanım 3.1.1: $(p_n),(q_n)$ ve (r_n) birer dizi $\forall\ n \geq 0$ için $r_n \neq 0$ ve $r_{-1} = 0$ olmak üzere

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde reel veya kompleks sayıların dizileri olsun. Bu takdirde verilen bir $\sum_{v=0}^{\infty} a_n$ serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v \tag{3.1.2}$$

ile verilen dönüşüme genelleştirilmiş Nörlund ortalaması veya genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü denir ve (N,p,q) ile gösterilir. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} t_n = s$$

ise, bu takdirde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine ya da (s_n) dizisine s değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilir denir ve $s_n \to s(N,p,q)$ şeklinde gösterilir [2]. (3.1.2) ile verilen dönüşümde;

i) Her n için $q_n = 1$ alınırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} 1 = P_n$$

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlik, (N, p_n) toplanabilirliğe indirgenir.

ii) Her n için p_n=1 alınırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} q_v 1 = Q_n$$

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v s_v$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlik, ($\bar{N}$, q_n) toplanabilirliğe indirgenir.

iii) Her $k \in Z$ olmak üzere her n için $q_n = 1$ ve $p_n = \binom{v+k-1}{k-1}$ seçersek,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} \binom{v+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}$$

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{v=0}^{n} \binom{v+k-1}{k-1} s_{n-v}$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlik (C,k) toplanabilirliğe indirgenir [5].

Tanım 3.1.2: Eğer (A) metodu yakınsaklığa denkse (A) metoduna etkisizdir denir. Yani; (A) metodunun dönüşüm ve ters dönüşüm matrisleri regülerse (A) metoduna etkisizdir denir [4].

3.2. $(p_n)\in\mathcal{M}$ ve (q_n) Pozitif Diziler İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 3.2.1: Her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $q_n>0$ ve $(p_n)\in\mathrm{M}$ olmak üzere

$$s_n=\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_vt_v \text{ dir [4].}$$

İspat: Her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $q_n>0$ ve $(p_n)\in\mathrm{M}$ olsun. Bu takdirde her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için,

$$\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_vt_v=\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v\sum_{k=0}^{v}\frac{p_{v-k}q_k}{r_v}s_k=\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\sum_{k=0}^{v}p_{v-k}q_ks_k$$

$$=\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\left(p_vq_0s_0+p_{v-1}q_1s_1+...+p_0q_vs_v\right)$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[c_n\left(p_0q_0s_0\right)+c_{n-1}\left(p_1q_0s_0+p_0q_1s_1\right)+...+c_0\left(p_nq_0s_0+...+p_0q_ns_n\right)\right]$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\left(c_np_0+...+c_0p_n\right)q_0s_0+\left(c_{n-1}p_0+...+c_0p_{n-1}\right)q_1s_1+\left(c_0p_0\right)q_ns_n\right]$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\left(\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}p_{v-0}\right)q_0s_0+\left(\sum_{v=1}^{n}c_{n-v}p_{v-1}\right)q_1s_1+...+\left(\sum_{v=n}^{n}c_{n-v}p_{v-n}\right)q_ns_n\right]$$

$$=\frac{1}{q_n}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{v=k}^{n}c_{n-k}p_{v-k}\right)q_ks_k$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=k}^{n}c_{n-v}p_{v-k}\right)q_ks_k+\left(\sum_{v=n}^{n}c_{n-v}p_{v-n}\right)q_ns_n\right]$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-k}c_{n-k-v}p_v\right)q_ks_k+c_0p_oq_ns_n\right]$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-k}c_{n-k-v}p_v\right)q_ks_k\right]+\frac{c_0p_0}{q_n}q_ns_n$$

$$=\frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}0.q_ks_k\right]+s_n$$

$$=s_n$$

yazılabilir. Buna göre; $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $s_n = \frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v$ elde edilir.

Lemma 3.2.1: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $s_n = \sum_{v=0}^{n} j_{n,v} t_v$ olsun.

$\left(t_n \to 0\left(n \to \infty\right) \Rightarrow s_n \to 0\left(n \to \infty\right)\right)$ olması için gerek ve yeter şart:

i) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sum_{v=0}^{n} \left|j_{n,v}\right| \le K$ olacak şekilde en az bir pozitif K sabiti vardır.

ii) $\forall v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\lim_{n \to \infty} j_{n,v} = 0$

olmasıdır [6].

Teorem 3.2.2: $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Bu takdirde;

$\left(s_n \to s\left(N, p, q\right) \Rightarrow s_n = s + o\left(G_n\right)\right) \Leftrightarrow \left(c_n = o\left(q_n G_n\right)\right.$ ve $\left. r_n = O\left(q_n G_n\right)\right)$ dir [5].

İspat: Kabul edelim ki $\left(s_n \to s\left(N, p, q\right) \Rightarrow s_n = s + o\left(G_n\right)\right)$ olsun. Genelliği bozmaksızın s=0 alabiliriz. Buna göre $t_n \to 0 \Rightarrow s_n / G_n \to 0$ yazılabilir. Teorem 3.2.1'den dolayı $n \to \infty$ için

$$\frac{s_n}{G_n} = \frac{1}{q_n G_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v = o(1)$$

yazılabilir. Buna göre Lemma 3.2.1' den dolayı

$$\frac{s_n}{G_n} = \frac{1}{q_n G_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v$$

olduğundan,

i) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{c_{n-v}r_v}{G_{n-v}q_n}\right|\le K \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}r_v\right| = O\left(q_nG_n\right) \tag{3.2.1}$$

ii) Her v ve $n\to\infty$ için,

$$c_{n-v}r_v = o\left(G_nq_n\right) \tag{3.2.2}$$

yazılabilir. Eğer $r_n = O\left(G_nq_n\right)$ alınırsa bu takdirde (3.2.1) ifadesi sağlanır. Çünkü $\left(p_n\right)\in\mathscr{M}$ olması, $c_0>0$, $n>1$ için $c_n\le 0$ olduğunu gerektirir [2]. Bu yüzden

$$\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}r_v\right| = \left|c_0r_n\right| + \sum_{v=0}^{n-1}\left|c_{n-v}r_v\right| = \left|c_0\right|r_n + \sum_{v=0}^{n-1}\left|c_{n-v}\right|r_v = c_0r_n - \sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v}r_v$$

$$= c_0r_n + c_0r_n - c_0r_n - \sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v}r_v$$

$$= 2c_0r_n - \sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v \tag{3.2.3}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v = \sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\sum_{k=0}^{v}p_{v-k}q_k$$

$$= \sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\left(p_vq_0 + p_{v-1}q_1 + \ldots + p_0q_v\right)$$

$$= c_n\left(p_0q_0\right) + c_{n-1}\left(p_1q_0 + p_0q_1\right) + \ldots + c_0\left(p_nq_0 + \ldots + p_0q_n\right)$$

$$= \left(c_np_0\right)q_0 + \left(c_{n-1}p_1q_0 + c_{n-1}p_0q_1\right) + \ldots + \left(c_0p_nq_0 + \ldots + c_0p_nq_n\right)$$

$$= \left(c_np_0 + c_{n-1}p_1 + \ldots + c_0p_n\right)q_0 + \left(c_{n-1}p_0 + \ldots + c_0p_{n-1}\right)q_1 + \ldots + \left(c_0p_0\right)q_n$$

$$= \left(\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}p_{v-0}\right)q_0 + \left(\sum_{v=1}^{n}c_{n-v}p_{v-1}\right)q_1 + \ldots + \left(\sum_{v=n}^{n}c_{n-v}p_{v-n}\right)q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{v=k}^{n}c_{n-v}p_{v-k}\right)q_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=k}^{n} c_{n-v}\, p_{v-k}\right) q_k + \left(\sum_{v=n}^{n} c_{n-v}\, p_{v-n}\right) q_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=k}^{n-k} c_{n-v-k}\, p_{v}\right) q_k + c_0 p_0 q_n \\
&= q_n
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v = q_n \tag{3.2.4}$$

dir. (3.2.4) eşitliği (3.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} \right| = 2c_0 r_n - q_n \tag{3.2.5}$$

elde edilir. $r_n = O\left(q_n G_n\right)$ olduğundan $\forall v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\dfrac{r_n}{q_n G_n} < K$ olacak şekilde $\exists K > 0$ vardır. O halde (3.6) eşitliği

$$\sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} r_v \right| = 2c_0 r_n - q_n < 2c_0 K G_n q_n - q_n < 2c_o K G_n q_n$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} r_v \right| = O\left(G_n q_n\right) \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer $c_n = O\left(q_n G_n\right)$ ise (3.4) ifadesi sağlanır. Gerçekten;

$$\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} c_v = p_n c_0 + p_n c_0 - p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} c_v$$

$$= 2 p_n c_0 - \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} c_v = 2 p_n c_0 \tag{3.2.7}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0 \tag{3.2.8}$$

olduğundan (3.2.7) ve (3.2.8) den,

$$\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0$$

$$\Rightarrow p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0$$

$$\Rightarrow \left| c_n \right| p_0 = p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| \tag{3.2.9}$$

yazılabilir. $\left(p_n \right) \in \mathscr{M}$ olduğundan $0 \leq v \leq n-1$ için $\dfrac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \leq \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ olduğundan

$$-\frac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \geq -\frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow -\frac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \left| c_v \right| \geq -\frac{p_n}{p_{-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow -p_{n-v} \left| c_v \right| \geq -\frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow -\sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v} \left| c_v \right| \geq -\sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right| \geq p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right|$$

$$\Rightarrow p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v} \left| c_v \right| \geq p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right| \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.9) eşitliği (3.2.10) da

$$p_0 \left| c_n \right| \geq \frac{p_n}{p_{n-1}} \left\{ p_{n-1} c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v-1} \left| c_v \right| \right\} - p_1 \left| c_{n-1} \right| \tag{3.2.11}$$

elde edilir. Her n için geçerli olduğundan özel olarak (n-1) içinde geçerlidir.

$$|c_{n-1}|\, p_0 = p_{n-1}c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v-1}|c_v| \qquad (3.2.12)$$

yazılabilir. Bu yüzdende

$$p_0|c_n| \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}\left\{p_0|c_{n-1}|\right\} - p_1|c_{n-1}| \Rightarrow p_0|c_n| \geq \left\{p_0\frac{p_n}{p_{n-1}} - p_1\right\}|c_{n-1}| \qquad (3.2.13)$$

elde edilir. (3.2.13) ifadesinde köşeli parantez non-negatif ve azalmayandır. Gerçekten $(p_n) \in \mathscr{M}$ olduğundan (p_n / p_{n-1}) azalmayandır. Bu yüzdende her $n \geq 1$ için $\frac{p_n}{p_{n-1}} \geq \frac{p_1}{p_0}$ dır. Buna göre

$$\frac{p_0 p_n}{p_{n-1}} - p_1 = p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_0}\right) \geq 0$$

elde edilir. Yani; (3.2.13) de köşeli parantez non-negatiftir. Şimdi bunun azalmayan olduğunu gösterelim.

$$\alpha_n = p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_0}\right)$$

ile tanımlanan (α_n) dizisini göz önüne alırsak, $\forall v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = p_0\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_1}{p_0}\right) - p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_0}\right) = p_0\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_n}{p_{n-1}}\right) \geq 0$$

dır. Bu ise (α_n) dizisinin azalmayan olduğunu gösterir. (α_n) dizisi, artan ve non-negatif olduğundan $\forall n \geq n_0$ için (α_n)>0 dır. Bu yüzdende $\forall n \geq n_0$ için

$$|c_{n-1}| \le p_0 |c_n| \frac{1}{\alpha_n}$$

olduğundan dolayı

$$c_{n-1} \le |c_{n-1}| \le p_0 |c_n| \frac{1}{\alpha_{n_0}}$$

yazılabilir. Bu ise her $n \ge n_0$ için $c_{n-1} = O(|c_n|)$ olduğu gösterilir. Bu ifade her $n \ge n_0$ için geçerli olduğundan özel olarak n, n-1, n-2, …, n-v+1 içinde geçerlidir. Buna göre,

$$|c_n| \ge \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-1}|, |c_{n-1}| \ge \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-2}|, \ldots, |c_{n-v+1}| \ge \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-v}|$$

elde edilir. Bu yüzden

$$|c_n| \ge \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-1}| \ge \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^2 |c_{n-2}| \ge \ldots \ge \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^v |c_{n-v}| \qquad (3.2.14)$$

yazılabilir. Buna göre ,

$$|c_n| \ge \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^v |c_{n-v}| \Rightarrow |c_{n-v}| \le \left(\frac{p_0}{\alpha_{n_0}}\right)^v |c_n| \Rightarrow c_{n-v} r_v \le r_v \left(\frac{p_0}{\alpha_{n_0}}\right)^v |c_n|$$

$$\Rightarrow c_{n-v} r_v = O(|c_n|) = o(q_n G_n) \qquad (3.2.15)$$

elde edilir.

Tersine olarak; (3.2.1) ve (3.2.2) sağlanırsa, bu takdirde;

i) (3.2.1) de v=n alınırsa

$$\left|c_{n-v}r_v\right| \le \sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}r_v\right| = O\left(q_nG_n\right)$$

elde edilir. Bu ise $c_0r_n = O\left(q_nG_n\right) \Leftrightarrow r_n = O\left(q_nG_n\right)$ olduğunu gösterir.

ii) (3.2.1) de özel olarak v=0 alınırsa $c_nr_0 = o\left(q_nG_n\right) \Leftrightarrow c_n = o\left(q_nG_n\right)$ elde edilir.

Sonuç 3.2.1: $\left(p_n\right) \in \mathrm{M}$, $q_n > 0$ olsun. Buna göre

$\left[s_n \to s\left(N,p,q\right) \Rightarrow s_n = s + o\left(r_n/q_n\right)\right] \Leftrightarrow \left[c_n = o\left(r_n\right)\right]$

olmasıdır [5].

İspat: $\left(p_n\right) \in \mathscr{M}$, $q_n > 0$ olsun. Eğer Teorem 3.2.2`de $\forall v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \dfrac{\mathrm{r_n}}{\mathrm{q_n}}$ seçilirse,

$c_n = \mathrm{o}\left(\mathrm{q_n}G_n\right) = \mathrm{o}\left(\mathrm{q_n}\dfrac{r_n}{q_n}\right) = \mathrm{o}\left(\mathrm{r_n}\right)$ ve $r_n = \mathrm{O}\left(\mathrm{q_n}G_n\right) = \mathrm{O}\left(\mathrm{q_n}\dfrac{r_n}{q_n}\right) = \mathrm{O}\left(\mathrm{r_n}\right)$ yazılabilir. Buna göre Teorem 3.2.2'den

$$\left[s_n \to s\left(N,p,q\right) \Rightarrow s_n = s + o\left(r_n/q_n\right)\right] \Leftrightarrow \left[c_n = o\left(r_n\right)\right]$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.2.2: Aşağıdaki şartların herhangi birini sağlayan $\left(p_n\right) \in \mathrm{M}$, $q_n > 0$ olsun.

(a) (N,p,q) regüler

(b) $P_n \to \infty$

(c) $Q_n \to \infty$

bu takdirde $\left(s_n \to s\left(N,p,q\right) \Rightarrow s_n = s + o\left(r_n/q_n\right)\right)$ dır [7].

İspat: Sonuç (3.2.1) den (a), (b), (c)' nin her birinin $c_n = o(r_n)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi kabul edelim ki (a) sağlanmış olsun. Yani (N,p,q) regüler olsun. Bu takdirde

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v$$

ile verilen dönüşüme karşılık gelen matrisin elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v} q_v}{r_n} & , v \le n \\ 0 & , v > n \end{cases}$$

ile gösterilsin. Bu Silverman-Teoplitz teoreminin şartlarını sağlar. Bu yüzden de Silverman-Teoplitz teoreminin (b) özelliğinden her $v \le n$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-v} q_v}{r_n} = 0$$

yazılabilir. Bu yüzdende her $v \le n$ için

$$p_{n-v} q_v = o(r_n) \Leftrightarrow p_{n-v} = o(r_n)\ (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu ifade her $v \le n$ için geçerli olduğundan özel olarak v=0 içinde geçerlidir. Bu yüzden

$$p_n = o(r_n) \qquad (3.2.16)$$

yazılabilir. (3.2.7) den dolayı $\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = 2 p_n c_0$ olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n}\left|p_{n-v}c_v\right| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n}\left|p_{n-v}c_v\right| \Rightarrow 2p_n c_0 = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n} p_{n-v}\left|c_v\right|$$

$$\Rightarrow p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n} p_{n-v}\left|c_v\right| \qquad (3.2.17)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n}\left|c_v\right| p_{n-v} = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1}\left|c_v\right| p_{n-v} + p_0\left|c_n\right| \geq p_0\left|c_n\right| \qquad (3.2.18)$$

olduğundan (3.2.17) ve (3.2.18) den dolayı

$$p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n}\left|c_v\right| p_{n-v} \geq p_0\left|c_n\right| \qquad (3.2.19)$$

elde edilir. Bu yüzden $\dfrac{\left|c_n\right|}{p_n} \leq \dfrac{c_0}{p_0} < K$ olacak şekilde $\exists K > 0$ sayısı vardır. O halde

$$c_n = O\left(p_n\right)\left(n \to \infty\right) \qquad (3.2.20)$$

yazılabilir. (3.2.16) ve (3.2.20) yi kullanarak,

$$c_n = O\left(p_n\right) = O\left(o\left(r_n\right)\right) = o\left(r_n\right) \Rightarrow c_n = o\left(r_n\right)$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki (b) sağlanmış olsun. n>0 için $\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v = 0$ dır. $\left(p_n\right)$ artmayan bir dizi olduğundan her $v,n \in \mathbb{N}$ için $n-v<n$ ise $p_{n-v} \geq p_n$ yazılabilir. Bu yüzdende $n>0$ için $c_n \leq 0$ olduğundan her $v,n \in \mathbb{N}$ için $p_{n-v}c_v \leq p_n c_v$ elde edilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v}c_v \le \sum_{v=0}^{n-1} p_n c_v = p_n \sum_{v=0}^{n-1} c_v = p_n c_{n-1}^{(1)} \qquad (3.2.21)$$

yazılabilir. (3.2.7) yı kullanarak,

$$\sum_{v=0}^{n} |p_{n-v}c_v| = |p_0 c_n| + \sum_{v=0}^{n-1} |p_{n-v}c_v| \Rightarrow 2p_n c_0 = |p_0 c_n| + p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v}c_v$$

$$\Rightarrow p_0 |c_n| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v}c_v$$

$$\Rightarrow p_0 |c_n| = \sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v}c_v \qquad (3.2.22)$$

buluruz. (3.2.21) ve (3.2.22) yi kullanarak

$$p_0 |c_n| = \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v}c_v \le p_n c_{n-1}^{(1)} \Rightarrow p_0 |c_n| \le p_n c_{n-1}^{(1)} \qquad (3.2.23)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} c_k = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\left(c_0 + c_1 + \ldots + c_n\right)$$

$$= p_n c_0 + p_{n-1}\left(c_0 + c_1\right) + \ldots + p_0\left(c_0 + c_1 + \ldots + c_n\right)$$

$$= \left(p_n c_0 + p_{n-1}c_1 + \ldots + p_0 c_n\right) + \left(p_{n-1}c_0 + \ldots + p_0 c_{n-1}\right) + \ldots + p_0 c_0$$

$$= \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v + \sum_{v=1}^{n} p_{n-v}c_{v-1} + \ldots + \sum_{v=n}^{n} p_{n-v}c_{v-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{v=k}^{n} p_{n-v}c_{v-k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-k} p_{n-v-k}c_v\right) + p_0 c_0 \, (3.2.24)$$

elde edilir. Her v için $c_v^{(1)} = \sum_{k=0}^{v} c_k \geq c_v$ ve $\left(p_n\right)$ artmayan dizi olduğundan

$$c_v^{(1)} p_{n-v} \geq c_v p_{n-v} \Rightarrow \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_n$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_n = p_n \sum_{v=0}^{n} c_v = p_n c_n^{(1)} \qquad (3.2.25)$$

yazılabilir. (3.2.24) ve (3.2.25) ifadelerini kullanarak,

$$1 = \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{j=0}^{v} c_j = \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{v=j}^{n} p_{n-v} = \sum_{j=0}^{n} c_j P_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} c_j \frac{P_{n-j}}{P_j} P_j$$

$$\Rightarrow 1 \geq K P_j \sum_{j=0}^{n} c_j \geq K P_j c_n^{(1)}$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Bu yüzden

$$p_n c_n^{(1)} \leq \frac{1}{K} \qquad (3.2.26)$$

yazılabilir. $p_n \to \infty$ ise $c_n^{(1)} \to 0$ dır. Bu yüzden

$$c_n = o\left(p_n\right) \qquad (3.2.27)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} q_v + p_n q_0 \geq p_n q_0$$

$$r_n \geq p_n q_0 \Leftrightarrow p_n = O\left(r_n\right) \qquad (3.2.28)$$

olduğundan (3.2.27) ve (3.2.28) ifadesini kullanarak,

$$c_n = o(p_n) = o(O(r_n)) = o(r_n) \Rightarrow c_n = o(r_n)$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $Q_n \to \infty$ olsun. (p_n) artmayan bir izi olduğundan

$$p_n Q_n = p_n \sum_{v=0}^{n} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_n q_v \le \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = r_n$$

$$\Rightarrow p_n Q_n \le r_n \Rightarrow \frac{1}{r_n} \le \frac{1}{p_n Q_n} \Rightarrow \frac{|c_n|}{r_n} \le \frac{|c_n|}{p_n Q_n} \qquad (3.2.29)$$

yazılabilir. $Q_n \to \infty$ ve $|c_n| = O(p_n)$ olduğundan (3.3.1) ifadesinden $|c_n| = O(r_n)$ elde edilir.

Sonuç 3.2.3: $(p_n) \in \mathscr{M}$, $q_n > 0$ olsun.Bu takdirde

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow (c_n = o(q_n) ve r_n = O(q_n))$$

dır [5].

İspat: Teorem 3.2.2 de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse istenen elde edilir.

3.3. $(p_n),(q_n)$ Reel veya Kompleks Diziler İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 3.3.1: $\sum |c_n| < \infty$ ve $\max\limits_{0 \le v \le n} |r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n| G_n)$$

dir [5].

İspat: Kabul edelim ki $|r_n| = O(|q_n| G_n)$ olsun. Bu takdirde 3.2.1 ve 3.2.2'nin şartlarının sağlandığını göstermeliyiz. Eğer $|r_n| = O(|q_n| G_n)$ ise $\forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$\left|\dfrac{r_n}{q_n G_n}\right| < K$ olacak şekilde $\exists K > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan $\sum|c_n|$ yakınsak olduğundan kısmi toplamlar diziside yakınsaktır. Yakınsak her dizinin bir toplamı var olduğundan,

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = \sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}||r_v| = \max_{0\le x\le n}|r_v|\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}| = O(|r_n|)O(1) = O\left(O(|q_n|G_n)\right)O(1) = O(|q_n|G_n)$$

yazılabilir. Buna göre $\sum_{v=0}^{n}\left|\dfrac{c_{n-v}}{q_n G_n}\right| < K$ olacak şekilde $\exists K > 0$ sayısı vardır. Bundan başka $\sum|c_n|$ yakınsak olduğundan $c_n \to 0$ dır. $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = h$ dersek $\dfrac{h}{|r_n|} \le K_1$ yapacak şekilde $\exists K_1 > 0$ sayısı vardır. Buna göre $|r_n| \ge \dfrac{h}{K_1} = K > 0$ yazılabilir. Bu yüzden de (c_{n-v}) sıfır dizisi ve $\left(|1/r_n|\right)$ sınırlı dizi olduğundan $c_{n-v} = o(r_n)$ yazılabilir. Diğer taraftan $|r_n| = O(|q_n|G_n)$ ve $c_{n-v} = o(r_n)$ olduğundan,

$$c_{n-v} = o(r_n) = o\left(O(q_n G_n)\right) = o(q_n G_n) \qquad (3.3.1)$$

elde edilir.

Tersine olarak; $\sum|c_n| < \infty$ ve $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ ve

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)\right)$$

olsun. Teorem 3.2.2' den dolayı $c_n = o(q_n G_n)$ ve $r_n = O(q_n G_n)$ olması gerek ve yeter şarttır. Bu ise,

i) Her n için $\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = O(q_n G_n)$

ii) Her v ve $c \to \infty$ için $c_{n-v} = o\left(q_n G_n\right)$

yazılabilir. Buradanda $\left|r_n\right| = O\left(q_n G_n\right)$ elde edilir.

Uyarılar: 1) Eğer $\left(G_n\right), \max\limits_{0 \le v \le n}\left|G_v\right| = O\left(G_n\right)$ ile verilen reel veya kompleks terimli bir dizi ise, bu takdirde Teorem 3.3.1'in $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|r_v\right| = O\left(r_n\right)$ şartı, sonucu etkilemeksizin $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|q_v\right| = O\left(q_n\right)$ ile değiştirilebilir. Gerçekten;

$$\left|\frac{r_v}{r_n}\right| = \left|\frac{r_v}{q_v}\frac{q_v}{r_n}\right| = \left|O\left(G_v\right)\frac{q_v}{r_n}\right| = \left|O\left(G_v\right)\frac{q_v}{q_n}\frac{q_n}{r_n}\right| = \left|\frac{q_v}{q_n}\right|\left|O\left(G_v\right)\right|\left|\frac{q_n}{r_n}\right| \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{q_n}{r_n} = \frac{q_n}{q_n p_0 + \ldots + q_0 p_n} \le \frac{q_n}{q_n p_0} = \frac{1}{p_0}$$

olduğundan $\left(q_n / r_n\right)$ sınırlı bir dizidir. $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|G_v\right| = O\left(G_n\right)$ ve $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|q_v\right| = O\left(q_n\right)$ oluğundan her $0 \le v \le n$ için $\left|G_v\right| \le K_1 \le \left|G_n\right|$ olacak şekilde $K_1 > 0$ vardır. Her $0 \le v \le n$ için $\left|q_v\right| \le K_2 \le \left|q_n\right|$ olacak şekilde $K_2 > 0$ vardır. Buna göre her $0 \le v \le n$ için (3.3.2) ifadesinden

$$\left|\frac{r_v}{r_n}\right| \le K_1 K_2 \left|G_n\right| \frac{1}{p_0} = K \Rightarrow \max_{0 \le v \le n}\left|r_v\right| = O\left(\left|r_n\right|\right)$$

elde edilir.

2) Kabul edelim ki $\left(G_n\right)$, reel veya kompleks azalmayan bir dizi olsun. Bu takdirde $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|r_v\right| = O\left(r_n\right)$ ile $\max\limits_{0 \le v \le n}\left|q_v\right| = O\left(q_n\right)$ şartları değiştirilebilir. Gerçekten,

$\left(G_n\right)$ azalmayan dizisi ise her $0 \le v \le n$ için $G_v \le G_n$ yazılabilir. Buna göre $\max\limits_{0\le v\le n}\left|\dfrac{G_v}{G_n}\right| \le 1$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}\left|G_v\right| = O\left(G_n\right)$ elde edilir ki bu bize (1) ifadesine dönüştüğünü gösterir.

3) $\left(r_n\right) \notin c_0$ ve $\left(r_n\right)$ monoton olmak üzere her bir durumda $\max\limits_{0\le v\le n}\left|r_v\right| = O\left(\left|r_n\right|\right)$ şartı gerçekleştirilebilir. Gerçekten;

i) Kabul edelim ki $\left(r_n\right) \notin c_0$ ve $\left(r_n\right)$ monoton artan olsun. Bu takdirde her $0 \le v \le n$ için; $r_0 \le r_v \le r_n$ oluğundan $\max\limits_{0\le v\le n}\left|r_v\right| = O\left(r_n\right)$ yazılabilir.

ii) Şimdi kabul edelim ki $\left(r_n\right) \notin c_0$ ve $\left(r_n\right)$ monoton azalan olsun. Bu takdirde her $0 \le v \le n$ için; $r_0 \ge r_v \ge r_n$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}\left|r_v\right| = O\left(r_n\right)$ elde edilir.

4) Eğer $\left(N, \Delta r\right)$ regüler ise, $\max\limits_{0\le v\le n}\left|r_v\right| = O\left(\left|r_n\right|\right)$ sağlanır. Gerçekten; her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k = \Delta r_0 + \Delta r_1 + \ldots + \Delta r_v = \left(r_0 - r_{-1}\right) + \left(r_1 - r_0\right) + \ldots + \left(r_v - r_{v-1}\right) = r_v \qquad (3.3.3)$$

olduğundan

$$\max_{0\le v\le n}\left|r_v\right| = \max_{0\le v\le n}\left|\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k\right| \qquad (3.3.4)$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden her $0 \le v \le n$ için;

$$\left|\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k\right| \le \sum_{k=0}^{v} \left|\Delta r_k\right| \qquad (3.3.5)$$

elde edilir. Buna göre her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \qquad (3.3.6)$$

olduğundan dolayı

$$\max_{0 \le v \le n} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \qquad (3.3.7)$$

elde edilir. Ayrıca $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan Teorem 2.1.1'in (i) özelliğinden her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{v=0}^{n} \left| \frac{\Delta r_{n-v}}{r_n} \right| = O(1) \qquad (3.3.8)$$

yazılabilir. (3.3.8) eşitliğinden her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{v=0}^{n} |\Delta r_{n-v}| = O(|r_n|) \qquad (3.3.9)$$

elde edilir. (3.3.4), (3.3.5), (3.3.7) ve (3.3.8) ifadelerini kullanarak,

$$\max_{0 \le v \le n} |r_v| = \max_{0 \le v \le n} \left| \sum_{k=0}^{v} \Delta r_v \right| = \max_{0 \le v \le n} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| = O(|r_n|)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1: $\sum |c_n| < \infty$ ve $\max_{0 \le v \le n} |r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde

$s_n \to s(N, p, q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)$dır [5].

İspat: Kabul edelim ki $\sum |c_n| < \infty$ ve $|r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Teorem 3.3.1'de

$\forall \ v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \left|\frac{r_n}{q_n}\right|$ seçilirse $\left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartı sağlanır. Buna göre Teorem3.3.1'den

$$s_n \to s(N, p, q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2: $\sum |c_n| < \infty$, $\max\limits_{0 \le v \le n} |r_v| = O(|r_n|)$ veya $\max\limits_{0 \le v \le n} |q_v| = O(|q_n|)$ olsun. Bu takdirde;

$$\left(s_n \to s(N, p, q) \Rightarrow s_n \to s \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n|)\right)$$

dir [5].

İspat: Teorem 3.3.1'de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse, istenen sonuç elde edilir.

3.4. Regülerlik Şartı İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 3.4.1: $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ ve $(N, \Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N, p, q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)\right) \Leftrightarrow |r_n / q_n| = O(G_n) ve \sum |c_n| < \infty$$

dır [5].

İspat: $(N,\Delta r)$ regüler olduğundan Teorem 3.3.1'in 3. Uyarısından dolayı $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ yazılabilir. Bu yüzden $\sum |c_n| < \infty$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Teorem 3.3.1'de

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = O(|q_n| G_n) \tag{3.4.1}$$

elde etmiştik. Hipotezden $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ olduğundan

$$(|q_n| G_n) = O(|r_n|) \tag{3.4.2}$$

yazılabilir. (3.4.2)'yi (3.4.1)'de yerine konulursa,

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = O(|q_n| G_n) = O(O(|r_n|)) = O(|r_n|)$$

elde edilir. Ayrıca $(N,\Delta r)$ regüler olduğundan $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = O(|r_v|)$ yazılabilir. Buna göre $\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k = r_v$ olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = \sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} \sum_{k=0}^{v} \Delta r_k \right| = \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| \left| \sum_{k=0}^{v} \Delta r_k \right| = O(|r_n|)$$

yazılabilir. Bu yüzdende

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| \left| \sum_{k=0}^{v} \Delta r_k \right| \le \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = O(|r_n|)$$

elde edilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}|\sum_{k=0}^{v}|\Delta r_k|=\sum_{k=0}^{n}|\Delta r_k|\sum_{v=k}^{n}|c_{n-v}|=\sum_{k=0}^{n}|\Delta r_k|\sum_{v=0}^{n-k}|c_v|=\sum_{k=0}^{n}|\Delta r_{n-k}|\sum_{v=0}^{k}|c_v|$$

elde edilir. Bu ise,

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta r_{n-k}|\sum_{v=0}^{k}|c_v|=O(|r_n|)$$

olduğunu gösterir. $(N,|\Delta r_n|)$ total regüler olduğundan $\sum|c_n|$ sınırlı değilse, aşikar olarak bu son durum sağlanmaz [2]. Bu yüzden $\sum|c_n|<\infty$

Uyarı 3.4.1: $(N,\Delta G)$ regülerse $(N,\Delta r)$ regülerliği yerine Teorem 3.4.1'de $(N,\Delta q)$ regülerliği yazılabilir. Yani; $(N,\Delta q)$ ve $(N,\Delta G)$ regülerliği $(N,\Delta(qG))$ regülerliğini gerektirir. Gerçekten; $(N,\Delta q)$, $(N,\Delta G)$ ve $(N,\Delta(qG))$ dönüşümlerine karşılık gelen matrislerin elemanları sırasıyla

$$a_{nv}=\begin{cases}\dfrac{\Delta q_{n-v}}{q_n} & ,v\le n\\ 0 & ,v>n\end{cases}\quad b_{nv}=\begin{cases}\dfrac{\Delta G_{n-v}}{G_n} & ,v\le n\\ 0 & ,v>n\end{cases}\quad c_{nv}=\begin{cases}\dfrac{\Delta(q_{n-v}G_{n-v})}{q_nG_n} & ,v\le n\\ 0 & ,v>n\end{cases}$$

ile verilsin.

$$\begin{aligned}\Delta(q_{n-v}G_{n-v})&=q_{n-v}G_{n-v}-q_{n-v-1}G_{n-v-1}\\&=q_{n-v}G_{n-v}-q_{n-v}G_{n-v-1}+q_{n-v}G_{n-v-1}-q_{n-v-1}G_{n-v-1}\\&=q_{n-v}(G_{n-v}-G_{n-v-1})+G_{n-v-1}(q_{n-v}-q_{n-v-1})\\&=q_{n-v}\Delta G_{n-v}+G_{n-v-1}\Delta q_{n-v}\end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{nv} = \begin{cases} \dfrac{q_n \Delta G_{n-v} + G_{n-v} \Delta q_{n-v}}{q_n G_n} & ,v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre;

i) $(N, \Delta q)$ ve $(N, \Delta G)$ regüler olduğundan her v için,

$$\lim_{n\to\infty} a_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta q_{n-v}}{q_n} = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta G_{n-v}}{G_n} = 0$$

dır. Ayrıca $n-v-1 \le n-v \le n$ olduğundan (q_{n-v}/q_n) ve (G_{n-v}/G_n) sınırlıdır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} c_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-v} \Delta G_{n-v} + G_{n-v-1} \Delta q_{n-v}}{q_n G_n} = 0$$

elde edilir.

ii) Her n için

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_{nv}| = \sum_{v=0}^{n} |c_{nv}| + \sum_{v=n+1}^{\infty} |c_{nv}|$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \left| \frac{q_{n-v} \Delta G_{n-v} + G_{n-v-1} \Delta q_{n-v}}{q_n G_n} \right|$$

$$\le \sum_{v=0}^{n} \frac{q_{n-v}}{q_n} \left| \frac{\Delta G_{n-v} + \Delta q_{n-v}}{G_n} \right| + \sum_{v=0}^{n} \frac{G_{n-v-1}}{G_n} \left| \frac{\Delta q_{n-v}}{q_n} \right| \qquad (3.4.3)$$

yazılabilir. $(N, \Delta q)$ ve $(N, \Delta G)$ regüler olduğundan Teorem 2.1.1'in (i) özelliğinden,

$$\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta q_{n-v}}{q_n}\right| = O(1) \ \wedge \ \sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta G_{n-v}}{G_n}\right| = O(1) \quad (3.4.4)$$

yazılabilir. $\left(q_{n-v}/q_n\right)$ ve $\left(G_{n-v}/G_n\right)$ diziler sınırlı olduğundan ve (3.4.3) de (3.4.4) ü kullanarak, her n için

$$\sum_{v=0}^{n}\left|c_{nv}\right| \le \sum_{v=0}^{n}\frac{q_{n-v}}{q_n}\left|\frac{\Delta G_{n-v}+\Delta q_{n-v}}{G_n}\right| + \sum_{v=0}^{n}\frac{G_{n-v-1}}{G_n}\left|\frac{\Delta q_{n-v}}{q_n}\right| = O(1)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu yüzdende $\sup_n \sum_{v=0}^{\infty}\left|c_{nv}\right| \le \infty$ elde edilir.

iii) Her n için

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{n} c_{nv} &= \sum_{v=0}^{n}\frac{\Delta\left(q_{n-v}G_{n-v}\right)}{q_nG_n} \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[\sum_{v=0}^{n} q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=0}^{n} q_{n-v-1}G_{n-v-1}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[q_nG_n + \sum_{v=1}^{n} q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=0}^{n-1} q_{n-v-1}G_{n-v-1} - q_{-1}G_{-1}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[q_nG_n + \sum_{v=1}^{n} q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=1}^{n} q_{n-v}G_{n-v}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left(q_nG_n\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty} c_{nv} = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{n} c_{nv} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

elde edilir. O halde $\left(N, \Delta(qG)\right)$ regülerdir.

Sonuç 3.4.1: Kabul edelim ki $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n/q_n)\right) \Leftrightarrow \sum |c_n| < \infty$$

dır [5].

İspat: Kabul edelim ki $(N,\Delta r)$ regüler. Eğer Teorem 3.3.2'de $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \frac{r_n}{q_n}$ seçilirse, $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ ve $\left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartlarının her ikisi de sağlanacağından dolayı, Teorem 3.3.2'den

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n/q_n)\right) \Leftrightarrow \sum |c_n| < \infty$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.2: Kabul edelim ki $|q_n| = O(|r_n|)$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s\right) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n|) \text{ ve } \sum |c_n| < \infty$$

dır [5].

İspat: Eğer $(N,\Delta r)$ regüler ise, Teorem 3.4.1'de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse, Teorem 3.3.2'de $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ ve $\left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartları sırasıyla, $|q_n| = O(|r_n|)$ ve $|r_n| = O(|q_n|)$ şartlarına dönüşür. Bu durumda her n için $G_n = 1$ seçilirse, Teorem 3.3.2, Sonuç 3.3.2'ye indirgenir.

Eğer $(N,\Delta q)$ regüler ise, Teorem 3.4.1'nin ispatından sonraki açıklamalardan dolayı; $(N,\Delta q)$'nün regülerliği $(N,\Delta r)$'nün regülerliği ile yer değiştirilmesi için $(N,\Delta G)$ regüler olmalıdır. Bunun için özel olarak; genel terimi her n için $G_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ olan (G_n) dizisini göz önüne alalım. Buna göre (G_n) ve $(1/G_n)$ dizileri sınırlıdır. (G_n) dizisinin dönüşüm matrisinin elemanları

$$a_{nv}=\begin{cases}\dfrac{\Delta G_{n-v}}{G_n} & ,v\le n\\ 0 & ,v>n\end{cases}$$

ile verilsin. Bu dönüşümün regüler olduğunu göstermek için Teorem 2.1.1'i uygulayalım.

i) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}=\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)$ alınırsa $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}>0$ olduğundan f fonksiyonu artan fonksiyondur. Dolayısıyla $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $G_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ ile tanımlanan (G_n) dizisi artan dizidir. Bu yüzden $0\le v\le n$ ve $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $\Delta G_n=G_{n-v}-G_{n-v-1}>0$ yazılabilir. Dolayısıyla her n için,

$$\sum_{v=0}^{\infty}|a_{nv}|=\sum_{v=0}^{n}|a_{nv}|+\sum_{v=n+1}^{\infty}|a_{nv}|=\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta G_{n-v}}{G_n}\right|+\sum_{v=n+1}^{\infty}|0|=\frac{1}{G_n}\sum_{v=0}^{n}|\Delta G_{n-v}|$$

$$=\frac{1}{G_n}\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{n-v+1}{n-v+2}-\frac{n-v}{n-v+1}\right|$$

$$=\frac{1}{G_n}\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{n-v+1}{n-v+2}-\frac{n-v}{n-v+1}\right)$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v}{n-v+1}\right]$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=1}^{n+1}\frac{n-v+1}{n-v+2}\right]$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\frac{n+1}{n+2}+\sum_{v=1}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=1}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=1$$

olduğundan $\sup_n\sum_{v=0}^{\infty}\left|c_{nv}\right|\leq\infty$ elde edilir.

ii) Her n için

$$\sum_{v=0}^{\infty}a_{nv}=\sum_{v=0}^{n}a_{nv}+\sum_{v=n+1}^{\infty}a_{nv}=\sum_{v=0}^{n}\frac{\Delta G_{n-v}}{G_n}+\sum_{v=n+1}^{\infty}0=\frac{1}{G_n}\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{n-v+1}{n-v+2}-\frac{n-v}{n-v+1}\right)$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v}{n-v+1}\right]$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\sum_{v=0}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=1}^{n+1}\frac{n-v+1}{n-v+2}\right]$$

$$=\frac{1}{G_n}\left[\frac{n+1}{n+2}+\sum_{v=1}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}-\sum_{v=1}^{n}\frac{n-v+1}{n-v+2}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=1$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty}a_{nv}=\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{n}a_{n-v}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

elde edilir. Bu yüzden Teorem 2.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı $(N,\Delta G)$ regülerdir. Diğer taraftan sınırlı olduğundan $\left|q_n\right|=O\left(\left|r_n\right|\right)$ dır. Bu ise $\left|q_n\right|=O\left(\left|r_n\right|\right)$ olduğunu gösterir.

(p_n) ve (q_n) pozitif diziler iken, $|q_n| = O(|r_n|)$ ihmal edilebilir. Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Teorem 3.4.2: Her n için $p_n > 0$ ve $q_n > 0$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow ((P_n)$ dizisi sınırlı ve $\sum |c_n| < \infty)$

dır [5].

İspat: Teorem 3.4.1'in Sonuç 3.4.1'den dolayı her n için $p_n > 0$, $q_n > 0$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olmak üzere "$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n|)$ ve $\sum |c_n| < \infty$" önermesi yazılabilir. Bu yüzden de bu teoremi ispat etmek için "$r_n = O(q_n)$ olması ancak ve ancak (p_n) dizisinin yakınsak" olduğunu göstermek kafidir.

Şimdi kabul edelim ki (p_n) dizisi yakınsak olsun. bu takdirde (p_n) dizisinin limiti pozitif olmak zorundadır. Çünkü $\sum p_n$ ve $\sum c_n$ nin her ikiside mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} p_v x^v c_{n-v} x^{n-v}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} p_v c_{n-v} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} p_v c_{n-v}\right) x^n + p_0 c_0 x^0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0.x^n + 1.1 = 1$$

elde edilir.

i) Şimdi eğer $(N,\Delta q)$ regüler ve (p_n) dizisi yakınsak olduğundan ve Abel kısmi toplama formülünden

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} q_{n-v} p_v = \sum_{v=0}^{n-1} \Delta q_{n-v} \sum_{j=0}^{v} p_j + q_{n-n} \sum_{j=0}^{n} p_j = \sum_{v=0}^{n-1} \Delta q_{n-v} \sum_{j=0}^{v} p_j + q_0 P_n = \sum_{v=0}^{n} \Delta q_{n-v} P_v \quad (3.4.5)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\frac{r_n}{q_n} = \frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} \Delta q_{n-v} P_v \to L$$

elde edilir.

Tersine olarak, eğer $(N, \Delta q)$ regüler ve $r_n = O(q_n)$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.1'den dolayı $\sum_{k=0}^{v} |\Delta q_k| \leq K q_v$ olacak şekilde K>0 sayısı vardır. Bu ifadenin her iki tarafını p_{n-v} ile çarpar, daha sonrada her iki tarafı v=0' dan n' ye kadar toplamını alırsak

$$p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta q_k| \leq K p_{n-v} q_v \Rightarrow \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta q_k| \leq K \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |\Delta q_k| \sum_{v=k}^{n} p_{n-v} \leq K r_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |\Delta q_k| P_{n-k} \leq K r_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |\Delta q_{n-v}| P_k \leq K r_n \quad (3.4.6)$$

elde edilir. (3.4.6)' nın her iki tarafını q_n ile bölünürse, $r_n = O(q_n)$ olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\Delta q_{n-k}|}{q_n} P_k \leq K \frac{r_n}{q_n} = O(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{|\Delta q_{n-k}|}{q_n} P_k = O(1)$$

elde edilir. Bu yüzden $(N,|\Delta q|)$, total regüler olduğundan $P_n = O(1)$ yazılabilir. Bu yüzden de (p_n) yakınsaktır.

ii) Eğer $(N,\Delta r)$ regüler ve (P_n) de $(P_n) \to L \neq 0$ olacak şekilde yakınsak bir dizi ise, bu takdirde

$$p(x) = P(x)(1-x) \tag{3.4.7}$$

$$c(x) = c_{(x)}^{(1)}(1-x) \tag{3.4.8}$$

yazılabileceğinden dolayı (3.4.7) ve (3.4.8) taraf tarafa çarpılırsa $|x|<1$ için

$$p(x)c(x) = (1-x)^2 P(x)c_{(x)}^{(1)} \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Ayrıca $p(x)c(x)=1, P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$ ve $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}(x)$ olduğundan,

$$P(x)c_{(x)}^{(1)} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} P_{n-v} c_v^{(1)}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n} x^{n-v} X^V$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} P_{n-v} c_v^{(1)}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ için } \sum_{v=0}^{n} P_{n-v} c_v^{(1)} = n+1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ için } \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} P_{n-v} c_v^{(1)} = 1 \tag{3.4.10}$$

elde edilir. Bu yüzdende $\forall v \in \{0,1,2,...,n\}$ için $\lim_{v\to\infty} c_v^{(1)} P_{n-v} = 1$ olmalıdır. Aksi takdirde

$$\lim_{v\to\infty} c_v^{(1)} P_{n-v} \neq 1 \qquad\qquad (v=0,1,2,\ldots,n)$$

ise, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{v=0}^{n} P_{n-v} c_v^{(1)} \neq 1$ elde edilir ki bu (3.4.10) sonucu ile çelişir.

(P_n), $L\neq 0$ a yakınsayan bir dizi olduğundan $\forall v\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ için (P_{n-v}), $L\neq 0$ a yakınsayan bir dizidir. Bu yüzdende,

$$\sum_{v=0}^{n}(\Delta r_{n-v})c_v^{(1)} = \sum_{v=0}^{n}\Delta r_{n-v}\sum_{k=0}^{v}c_k = \sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{k=v}^{n}\Delta r_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{k=v}^{n}\left(r_{n-k}-r_{n-k-1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\left[\sum_{k=v}^{n}r_{n-k}-\sum_{k=v+1}^{n+1}r_{n-k}\right]=\sum_{k=0}^{n}c_k\left[r_{n-v}+\sum_{k=v+1}^{n}r_{n-k}-\sum_{k=v+1}^{n}r_{n-k}-r_{-1}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k r_{n-v} = \sum_{k=0}^{n}c_{n-k}\sum_{k=0}^{n}p_{v-k}q_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_{n-k}\left(p_v q_0 + p_{v-1}q_1+\ldots+p_0 q_v\right)$$

$$=c_n\left(p_0q_0\right)+c_{n-1}\left(p_1q_0+p_0q_1\right)+\ldots+c_0\left(p_nq_0+\ldots+p_0q_n\right)$$

$$=\left(c_np_0+c_{n-1}p_1+\ldots+c_0p_n\right)q_0+\left(c_{n-1}p_0+\ldots+c_0p_{n-1}\right)q_1+\ldots+\left(c_0p_0\right)q_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v-k}p_v\right)q_k+\left(c_0p_0\right)q_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}0.q_k+1.q_n$$

$$=q_n \qquad\qquad (3.4.11)$$

elde edilir. (3.4.11) ve $(N,\Delta r)$ regüler olduğundan

$$c_v^{(1)}\to\frac{1}{L}\Rightarrow\frac{q_n}{r_n}=\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{\Delta r_{n-v}}{r_n}\right)c_v^{(1)}\to\frac{1}{L}$$

yazılabilir.

Tersine, eğer $r_n = O(q_n)$ ise, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $r_n < K_1 q_n$ olacak şekilde $K_1 > 0$ sayısı vardır. Bu yüzden de,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \leq \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} K_1 q_v = K_1 \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \Rightarrow \frac{1}{K_1} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \leq \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \qquad (3.4.12)$$

yazılabilir. $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan dolayı $\sum_{v=0}^{n} \left| \frac{\Delta r_v}{r_n} \right| \leq K_2$ olacak şekilde $K_2 > 0$ sayısı vardır. Bu yüzden de, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{v=0}^{n} |\Delta r_v| \leq K_2 |r_n| \qquad (3.4.13)$$

yazılabilir. (3.4.13)' ü (3.4.12)' de yerine yazılırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \geq \frac{1}{K_1} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \geq \frac{1}{K_1 K_2} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \Rightarrow r_n \geq M \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \qquad (3.4.14)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \sum_{v=k}^{n} p_{n-v} = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \qquad (3.4.15)$$

olduğundan (3.4.15), (3.4.14)' de yerine yazılırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \geq M \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \leq K_1 K_2 r_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\Delta r_k}{r_n} \right| P_{n-k} = O(1)$$

elde edilir. $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan $P_n = O(1)$ yazılabilir. Bu yüzden de (P_n) yakınsaktır.

3.5. Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlik İçin Etkisizlik Teoremleri

Teorem 3.5.1: $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Bu takdirde; (N,p,q) etkisizdir ancak ve ancak $r_n = O(q_n)$ dır [5].

İspat: Kabul edelim ki $r_n = O(q_n)$ olsun. (s_n) dizisinin (N,p,q) dönüşüm dizisi (t_n) ile gösterelim. Buna göre

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v s_v = \sum_{v=0}^{n} b_{n-v}s_v \tag{3.5.1}$$

olup, bu dönüşüme karşılık gelen matrislerin elemanları

$$b_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}q_v}{r_n} & ,v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases} \tag{3.5.2}$$

ile tanımlanır. $B = (b_{nv})$ matrisi regülerdir. Gerçekten,

i) Her n için $\sum_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| = \sum_{v=0}^{n}|b_{nv}| + \sum_{v=n+1}^{\infty}|b_{nv}| = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v = 1$

olduğundan $\sup_n \sum_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| < \infty$ dır.

ii) $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve (p_n) artmayan bir dizi ise $\forall v \le n$ için $\frac{p_{n-v}}{p_n} = o(1)$ yazılabilir. $(p_n) \in \mathrm{M}$ ve $Q_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ ise, (3.2.29)' da $\frac{1}{r_n} \le \frac{1}{p_n Q_n}$ olduğu gösterildi. (3.2.29)' un her iki tarafı $p_{n-v}q_v$ ile çarpılırsa,

$$\frac{p_{n-v}q_v}{r_n} \le K\frac{p_{n-v}}{p_n Q_n} \le \frac{K}{Q_n} = o(1) \tag{3.5.3}$$

yazılabilir. (3.5.3)' den de her v için,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-v}q_v}{r_n} = 0$$

elde edilir.

iii) $\sum_{v=0}^{n} |b_{nv}| = \sum_{v=0}^{n} \frac{p_{n-v}q_v}{r_n} = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v = \frac{1}{r_n} r_n = 1$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

elde edilir. $B = (b_{nv})$ matrisi Teorem 2.1' in bütün şartlarını sağladığından dolayı, B regülerdir. Dolayısıyla (N,p,q) regülerdir. Şimdi (N,p,q) metodunun ters dönüşümünün regüler olduğunu gösterelim. (N,p,q) metodunun ters dönüşümü; (t_n), (s_n) dizisinin (N,p,q) dönüşümü dizisi olmak üzere (t_n) dizisinden (s_n) dizisine,

$$s_n = \frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n} r_v c_{n-v} t_v = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} t_v \tag{3.5.4}$$

ile verilen bir dönüşüm olduğu Teorem 3.2.1' de gösterildi. (N,p,q) metodunun etkisiz olduğu için, (3.5.4) dönüşümüne karşılık gelen, ve matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{r_v c_{n-v}}{q_n} & , v \le n \\ 0 & , v > n \end{cases}$$

ile verilen $A=(a_{nv})$ matrisinin regüler olduğunu gösterelim.

(N,p,q) metodu regüler olduğundan Sonuç 3.2.2' den dolayı

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n/q_n)\right)$$

yazılabilir. Sonuç 3.2.1' den dolayı da

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n/q_n)\right) \Leftrightarrow \left(c_n = o(r_n)\right)$$

yazılabileceğinden hipotezden dolayı $r_n = O(q_n)$ olması nedeniyle $c_n = o(r_n) = o(O(q_n)) = o(q_n)$ elde edilir. Bu yüzden de $c_n = o(q_n)$ ve $r_n = O(q_n)$ olduğundan sonuç 3.2.3' ün yeterlilik kısmından dolayı

$$s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s$$

yazılabilir. Bu ise $t_n \to s \Rightarrow s_n \to s$ olduğunu gösterir. Bu yüzden de (3.5.4) ile verilen dönüşüm regüler bir dönüşümdür.

Sonuç 3.5.1: Kabul edelim ki $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun bu takdirde (N,p) etkisizdir ancak ve ancak (p_n) yakınsaktır [5].

İspat: Kabul edelim ki $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.5.1 de özel olarak her n için $q_n = 1$ seçilirse,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}.1 = P_n \text{ ve } t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

olduğundan (N,p,q) metodu (N,p) metoduna indirgenir. Ayrıca

$$r_n = O(q_n) \Leftrightarrow (P_n) = O(1)$$

elde edilir. Bu yüzden de $(p_n) \in \mathscr{M}$ olduğundan Teorem 3.5.1'den dolayı

(N,p,1)=(N,p) etkisizdir $\Leftrightarrow P_n = O(1)$

yazılabilir. Diğer taraftan $(p_n) \in \mathscr{M}$ ve (p_n) sınırlı dizi olduğundan (P_n) yakınsaktır.

Teorem 3.5.2: $\sum |c_n| < \infty$, $\sum |p_n| < \infty$, ya $\max\limits_{0 \le v \le n}(|q_v|) = O(|q_n|)$ ya da $\max\limits_{0 \le v \le n}(|r_v|) = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde (N,p,q) etkisizdir ancak ve ancak $|r_n| \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} |q_n|$ olmasıdır [5].

İspat: $\sum |c_n| < \infty$, $\sum |p_n| < \infty$, ya $\max\limits_{0 \le v \le n}(|q_v|) = O(|q_n|)$ ya da $\max\limits_{0 \le v \le n}(|r_v|) = O(|r_n|)$ sağlansın. Bu takdirde (N,p,q) etkisiz ise (N,p,q) ve (N,c,r) regülerdir. Bu yüzden de Sonuç 3.3.2' den dolayı

$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s) \Leftrightarrow (|r_n| = o(|q_n|))$ ve

$(t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n = s) \Leftrightarrow (|q_n| = o(|r_n|))$

yazılabilir. Buna göre

$$\left[(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s) \wedge (t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n = s)\right] \Leftrightarrow \left[(|r_n| = o(|q_n|)) \wedge (|q_n| = o(|r_n|))\right]$$

elde edilir. Bu yüzden de

(N,p,q) etkisizdir $\Leftrightarrow \left[((s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \wedge (t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n \to s)\right]$

$\Leftrightarrow \left[(|r_n| = o(|q_n|)) \wedge (|q_n| = o(|r_n|))\right]$

$\Leftrightarrow$ $|r_n| \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} |q_n|$ dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. FOURİER SERİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Bu kısımda Fourier serilerinin genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır.

Tanım 4.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir sonsuz seri olsun. $p_{-1}=0$ olmak üzere p, (p_n) dizisini göstersin yani $p=(p_n)$ olsun. Verilen p ve q gibi iki dizinin konvolisyonu

$$(p*q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \tag{4.1}$$

ile tanımlanır.

Herhangi bir (s_n) dizisi için

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{(p*q)_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v$$

olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(p*q)_n \neq 0$ ise bu durumda (s_n) dizisinin genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü $(t_n^{p,q})$ dizisidir. Eğer $n \to \infty$ iken ve $t_n^{p,q} \to s$ ise bu durumda (s_n) dizisine s değerine (N,p,q) genelleştirilmiş Nörlund metoduyla toplanabilirdir denir ve $s_n \to s(N,p,q)$ ile gösterilir [8].

Bir (N,p,q) metodunun regüler olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sum_{k=0}^{n}|p_{n-k}q_k| = O\left(\left|(p*q)_n\right|\right)$$

ve $n \to \infty$ iken $\forall k \geq 0$ sabiti için $q_k \neq 0$ olmak üzere $p_{n-k} = o\left(\left|(p*q)_n\right|\right)$ olmasıdır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n = 1$ ise (N,p,q) metodu (N, p_n) metoduna indirgenir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ ise (N,p,q) metodu (N, q_n) Riesz metoduna indirgenir.

$\alpha > 0$ olmak üzere $p_n = \begin{pmatrix} n+\alpha-1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}$ olduğundan (N, p_n) metodu iyi bilinen (C, α) metoduna indirgenir.

$p_n = \dfrac{1}{n+1}$ özel durumunda Nörlund ortalaması harmonik ortalama olarak bilinir ve $\left(N, \dfrac{1}{n+1}\right)$ şeklinde yazılır.

Tanım4.2: f , 2π periyotlu periyodik fonksiyon ve $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. f fonksiyonuna karşılık getirilen Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \tag{4.2}$$

ile tanımlanır. Bu bölüm boyunca aşağıdaki gösterimleri kullanacağız.

$\phi(t) = \phi(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$

$\varphi(t) = \varphi(x,t) = f(x+t) - f(x-t)$

$P\left(\frac{1}{t}\right) = P_{\left[\frac{1}{t}\right]}$, $q\left(\frac{1}{t}\right) = q_{\left[\frac{1}{t}\right]}$, $R\left(\frac{1}{t}\right) = R_{\left[\frac{1}{t}\right]}$, $\left[\frac{1}{t}\right]$, $\frac{1}{t}$' nin tam kısmını gösterir.

$R_n = (p*q)_n$

Bunların dışında M, her durumda aynı olmayan bir sabiti gösterecektir. Yakınsaklık kavramının aslında her yerde yoğun olabilen noktalar kümesinde yakınsak olmayan sürekli fonksiyona bile karşılık gelen Fourier serisi kadar yetersiz güçte olduğu iyi bilinir. Böylece seriler bu noktalarda bir fonksiyon temsili için başarısız olur. Bu eksikliği kaldıran önemli ispat bu ifadeyi anlamlı yapan $\forall x$ değeri için $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ değerine düzgün olarak (C,1) toplanabilen $f(x)$' in Fourier serisini oluşturan Fejer $[9]$ tarafından yapılmıştır. Özel olarak $f(x)$ ' in her süreklilik noktasında Fourier serisi tam olarak $f(x)$' e (C,1) toplanabilirdir. 1. tür süreksizlik ve süreklilik noktalarında Fourier serisinin (C,1) toplanabilme problemini çözdükten sonra burada 2. tür süreklilik ve süreksizlik noktasında sağlanabilen kriteri bulma problemi ortaya çıkmıştır. Bu daha genel teoremi ispatlayan Lebesgue$[10]$ nın dikkatini çekmiştir. Dikkat çekicidir ki Lebesgue kriteri bütün 1. tip süreklilik ve süreksizlilik noktalarında uygulanabilir, hatta bu kriteri 2. tip süreksizlilik noktalarında geçerlidir. Lebesguenin sonucu, serilerin $[C,\alpha]$, $\alpha > 0$ toplanabilmesi Hardy$[2]$ tarafından genelleştirilmiştir.

Serilerin, $[C,\alpha]$, $\alpha > 0$ dan daha zayıf olan Harmonik toplanabilmesi Siddiqi $[12]$ tarafından tartışılmıştır.

Siddiqi' nin sonucunun genellemeleri Nörlund ortalamaları için bir çok yazar tarafından elde edilmiştir. İlgili sonuçlar için Singh $[13]$,$[14]$, Tripathi $[17]$, Rajagopal $[15]$ vs. bakıldığında bu yazarların hepsinin şartları

$$\int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) dt = o(P_n), n \to \infty \tag{4.3}$$

şartını gerektirir. Bu yüzden (4.3) şartı Singh$[13],[14]$, Tripathi $[17]$, Rajagopal $[15]$ vs. ın şartlarından daha zayıftır.

Burada $\forall n$ için $q_n = 1$ olması durumunda (4.3) özel durumunu içeren (3.2) şartı altında (4.2) serisinin (N,p,q) toplanabilmesi üzerine bir sonuç oluşturuyoruz. Bu yüzden bizim sonuçtan yukarıdaki bütün sonuçlar sonuç olarak elde edilebilir.

Teoremin ifade ve ispatına geçmeden önce ispatta kullanılacak olan lemmaları verelim.

Lemma 4.1: $R_n \le q_n P_n$ dır. (4.4)

İspat: Gerçekten

$$R_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \ldots + p_n q_0$$

(q_n) azalmayan olduğundan

$$R_n \le p_0 q_n + p_1 q_n + \ldots + p_n q_n$$
$$R_n \le (p_0 + p_1 + \ldots + p_n) q_n \Rightarrow R_n \le P_n q_n$$

elde edilir.

Lemma 4.2: $N_n(t) = \dfrac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \dfrac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(t/2\right)}$

olsun. Bu durumda

$$0 \le t \le \frac{1}{n} \text{ ise } N_n(t) = O(n) \qquad (4.5)$$

$$\frac{1}{n} \le t \le \pi \text{ ise } N_n(t) = O\left(\frac{q_n p\left(\frac{1}{t}\right)}{R_n t}\right) \tag{4.6}$$

dır.

İspat: $0 \le t < \frac{1}{n}$ için $|N_n(t)| \le \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k} \frac{\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}$ dır. Gerçekten

$$|N_n(t)| = \left| \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(t/2\right)} \right|$$

$$\le \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \left| \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} \cdot \frac{t/2}{t/2} \right|$$

$$\le \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}$$

$$\le \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} (2n+1) \le Kn$$

olup $|N_n(t)| = O(n)$ dır. Mc Fadden $[18]$ den düzgün olarak $0 < t \le \pi,\ 0 \le a \le b \le n$ olmak üzere

$$\left| \sum_{k=a}^{n} p_k \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} \right| = O\left(\frac{p\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\right) \tag{4.7}$$

dır. Ayrıca sabitlenmiş n için q_{n-k} pozitif artmayan olduğundan

$$\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(t/2\right)}\right|$$

$$\leq q_n \max_{0<m\leq n}\left|\sum_{k=0}^{m} p_k \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\right|$$

elde ederiz.

Bu teoremdeki $N_n(t)$ yi

$$N_n(t)=\frac{1}{\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{v=1}^{n-k}\cos vt\right\}$$

şeklinde yazabiliriz. Çünkü

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t/2} \quad \text{dır.}$$

Böylece (4.7) istenen sonucu verir.

Lemma 4.3: (4.2) den $\int_0^t |\phi(u)|\,du = o(t), t \to 0$ (4.8)

İspat: $F(t)=\int_t^{\delta}\frac{|\phi(u)|}{u}p\left(\frac{1}{u}\right)du$

olsun. $F(t)$ artmayan olduğundan (4.2) den $\frac{1}{n+1}<t<\frac{1}{n}$ için düzgün olarak

$$F(t) < F\left(\frac{1}{n+1}\right) = o\left(\frac{R_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \tag{4.9}$$

elde edilir.

(p_n) artmayan dizi olduğundan

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} p_k q_{n+1-k} = p_0 q_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} p_k q_{n+1-k}$$

$$= p_0 q_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} p_{k+1} q_{n-k}$$

$$\leq q_{n+1} p_0 + \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

olup

$$\frac{R_{n+1}}{q_{n+1}} \leq p_0 + \frac{R_n}{q_{n+1}} \leq p_0 + \frac{R_n}{q_n}$$

dır. Fakat

$$R_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \ldots + p_n q_0 \geq p_0 q_n \tag{4.10}$$

dır.

(4.9) ve (4.10) u kullanarak

$$\frac{R_{n+1}}{q_{n+1}} \leq p_0 + \frac{R_n}{q_n} = \frac{p_0 q_n + R_n}{q_n} \leq \frac{2R_n}{q_n}$$

yani $\frac{R_{n+1}}{q_{n+1}} = O\left(\frac{R_n}{q_n}\right)$ (4.11) dır. (4.8) ve (4.11) dan

$$F(t) = o\left(\frac{R_n}{q_n}\right) = o\left(\frac{R\left(\frac{1}{t}\right)}{q\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \tag{4.12}$$

elde edilir. Böylece $dF(u) = -\frac{|\phi(u)|}{u} p\left(\frac{1}{u}\right)$ olduğunda

$$\int_\varepsilon^t |\phi(u)| du = -\int_\varepsilon^t \frac{udF(u)}{p\left(\frac{1}{u}\right)}$$

olup kısmi integrasyonla

$$\int_\varepsilon^t |\phi(u)| du = -\frac{tF(t)}{p\left(\frac{1}{t}\right)} + \frac{\varepsilon F(\varepsilon)}{p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \int_\varepsilon^t \frac{F(u)du}{p\left(\frac{1}{u}\right)} + \int_\varepsilon^t uF(u)d\left(\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)}\right)$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için limit alarak

$$\int_o^t |\phi(u)| du = -\frac{tF(t)}{p\left(\frac{1}{t}\right)} + \int_0^t \frac{F(u)du}{p\left(\frac{1}{u}\right)} + \int_0^t uF(u)d\left(\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)}\right) \tag{4.13}$$

elde ederiz. Çünkü Lemma 4.1' den $\varepsilon \to 0$ iken

$$\frac{\varepsilon F(\varepsilon)}{p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = o\left(\frac{\varepsilon R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) = o(1)$$

dır. Ayrıca $u \to 0$ iken

$$\frac{F(u)}{p\left(\frac{1}{u}\right)} = o\left(\frac{R\left(\frac{1}{u}\right)}{q\left(\frac{1}{u}\right)p\left(\frac{1}{u}\right)}\right) = O(1) \tag{4.14}$$

dır. Böylece $\int_0^t \frac{F(u)\,du}{p\left(\frac{1}{u}\right)}$ orjinde yakınsaktır. Şimdi (4.14) ü kullanarak (4.13) nin sağ tarafındaki ilk iki terim $o(t)$ ye eşit olduğu görülür.. Ayrıca

$\frac{1}{n+1} < u < \frac{1}{n}$ için $n < \frac{1}{u} < n+1 \Rightarrow p\left(\frac{1}{u}\right) = p_{\left[\frac{1}{u}\right]} = P_n$ olup $\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{P_n}$ ve

$\frac{1}{n} < u < \frac{1}{n-1}$ için $\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{P_{n-1}}$

elde edilir. Böylece $u = \frac{1}{n}$ de $\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)}, \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} = \frac{p_n}{P_{n-1}P_n}$

sıçramasına sahiptir.

Böylece (4.13) nın sağındaki 3. ifade

$$\int_0^t uF(u)\,d\left\{\frac{1}{p\left(\frac{1}{u}\right)}\right\} = \sum_{n>\frac{1}{t}} \frac{F\left(\frac{1}{n}\right)p_n}{nP_{n-1}P_n}$$

olur. Gerçekten $u = \frac{1}{n}$ dönüşümü yapılırsa $u \to 0^+ \Rightarrow n \to \infty$ dır.

$$\int_0^t uF(u)\,d\left\{\frac{1}{P\left(\frac{1}{u}\right)}\right\}=\int_{\infty}^{1/t}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)d\left(\frac{1}{P_n}\right)}{n}$$

$$=\int_{\infty}^{1/t}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{P_n}-\frac{1}{P_{n-1}}\right)dn}{n}$$

$$=\int_{1/t}^{\infty}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{P_{n-1}}-\frac{1}{P_n}\right)dn}{n}$$

$$=\sum_{n>\frac{1}{t}}^{\infty}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)p_n}{nP_nP_{n-1}}$$

dır. Böylece

Lemma 4.1' i kullanarak $F\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{R_n}{q_n}\leq P_n$

$$\sum_{n>\frac{1}{t}}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)p_n}{nP_{n-1}P_n}\leq\sum_{n>\frac{1}{t}}\frac{p_n}{nP_{n-1}}$$

elde edilir. O halde sonuç olarak

$\sum_{n>\frac{1}{t}}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)p_n}{nP_{n-1}P_n}$ toplamı yakınsak ve $o(t)$ ye eşittir.

Teorem 4.1: Regüler genelleştirilmiş (N,p,q) Nörlund metodu aşağıdaki gibi tanımlansın. (p_n) non-negatif, reel sabitlerin monoton artmayan dizisi ve (q_n)

nonnegatif, reel sabitlerin monoton azalmayan dizisi olsun. Eğer $0<\delta<\pi$ şartını sağlayan δ için $n\to\infty$ iken

$$G_n \equiv \int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) dt = O\left(\frac{R_n}{q_n}\right) \tag{4.15}$$

ise bu durumda (4.2) serisi $t=x$ noktasında $f(x)$' e (N,p,q) toplanabilirdir.

İspat: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} A_k(x)$

diyelim ki

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt}{\sin\left(t/2\right)}$$

olup bu yüzden

$$t_n^{p,q}-f(x)=\frac{1}{2\pi R_n}\int_0^{\pi}\phi(t)\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t dt}{\sin\left(t/2\right)}$$

$$=\int_0^{\pi}\phi(t)N_n(t)dt$$

dır.

Teoremi ispatlamak için kabuller altında $n\to\infty$ iken $I=\int_0^{\pi}\phi(t)N_n(t)dt=o(1)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$0<\delta<\pi \text{ için } I=\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_0^{\pi}\right)\phi(t)N_n(t)dt$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

yazılabilir. (4.5) den

$$|I_1| = \left| \int_0^{1/n} \phi(t) N_n(t)\, dt \right| \leq \int_0^{1/n} |\phi(t)| |N_n(t)|\, dt$$

$$I_1 = O(n) \int_0^{1/n} |\phi(t)|\, dt \text{ ve Lemma 4.3' ten}$$

$$I_1 = O(n) \int_0^{1/n} |\phi(t)|\, dt = O\left(n \frac{1}{n} \right) \int_0^{1/n} |\phi(t)|\, dt$$

$$I_1 = o(1) \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca (4.6) dan $I_2 = O\left(\frac{q_n}{R_n} \right) \int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} P\left(\frac{1}{t} \right) dt$

(4.15) de $n \to \infty$ iken

$$I_2 = O\left(\frac{q_n}{R_n} \right), \quad \left(\frac{R_n}{q_n} \right) = o(1)$$

elde edilir.

$$I_3 = \int_\delta^\pi \phi(t) N_n(t)\, dt$$

$$= \int_\delta^\pi \phi(t) \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v} \frac{\sin\left(n - v + \frac{1}{2} \right) t}{\sin\left(t/2 \right)} dt$$

olup Riemann-Lebesgue teoremi ve metodun regülerliğinden $n \to \infty$ iken $I_3 = o(1)$ dır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Not: **(1)** Teorem 4.1' de $\forall n$ için $q_n = 1$ seçerek aşağıdaki Teorem 4.2' yı elde ederiz.

Teorem 4.2: (p_n) non-negatif, artmayan dizi ve (4.3) sağlanıyorsa bu takdirde (2.1) Fourier serisi t=x noktasında $f(x)'$ e (N, p_n) toplanabilirdir.

Teorem 4.2 Iyengar $[16]$ tarafından verilmiştir. Teorem 4.2, Singh$[13]$,$[14]$, Tripathi $[17]$, Rajagopal $[15]$ v.s çalışmaları üzerine bir genellemedir.

(2) Hemen hemen $\forall t \in (0, \delta)$ için şartlar $G(t) = 0$ iken sağlanacağından Teorem 4.1' in doğru olduğu bazı durumlardan bahsedilebilir. Eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{R_n}{q_n} < \infty \tag{4.16}$$

ise Teorem 1 sağlanır. Bu nedenle (4.15) deki integral, keyfi küçük değerler almak üzere yeteri derece keyfi büyük n' ler için vardır. Fakat bu integral n' nin azalmayan fonksiyonudur. Çünkü integral non-negatif olduğundan ve n değerini arttırdığımızda integralin değerini de arttırmış oluruz. Böylece integral özdeş olarak sıfır olacaktır. Özel olarak

$$P_n = O(1) \tag{4.17}$$

$$Q_n = O(q_n) \tag{4.18}$$

şartları sağlandığında (4.16) nın sağlandığını belirtmek gerekir. (4.17) nin (4.16) yı gerektirdiği sonucu Lemma 4.1' den çıkar. Diğer taraftan (4.18) sağlanıyorsa bu takdirde

$$R_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \dots + p_n q_0 ,$$

$$\leq p_0 (q_0 + q_1 + \dots + q_n) = p_0 Q_n = O(Q_n) = O(q_n) ,$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{R_n}{q_n} < \infty$$

olduğundan (4.16) sağlanır.

(3) Lemma 4.1' den (4.15), (4.3) ü gerektirir. Bu yüzden Iyengenin teoreminden Fourier serisinin (N, p_n) toplanabildiği sonucu çıkar.

$$(N, p_n) \Rightarrow (N, p, q) \tag{4.19}$$

olması durumunda Teorem 4.1' in sonucu çıkar. Bununla beraber (4.19) u sağlayan durumlar olmasına rağmen Khare ve Tripathi $[17]$ deki gibi sağlamayan durumlar da vardır. Bu nedenle bu yolla (4.19) un sağlanması halinde Teorem 4.1' in bize yeni bir şey vermeyeceği konusunda uzlaşırız.

SONUÇ

Bu çalışmada özel bir toplanabilme metodu olan (N,p_n) Nörlund toplanabilme metodunun (N,p,q) genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme metodu incelendi. Bu metodun regülerliği yardımıyla etkisizlik ve limitleme teoremlerinin ispatları ve (N,p_n) metodunun genellemesi olduğunu teoremlerle inceleyerek elde edilen sonuçlar tartışıldı. Bazı regüler metotlar yardımıyla etkisizlik ve limitleme teoremlerinin sonuçların karşılaştırılması incelendi. (p_n) dizisi ile (q_n) dizisine konulan bazı şartlar altında (N,p,q) ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Son olarak ise Fourier serilerinin (N,p,q) toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi. Fourier serisinin toplanabilmesi araştırılırken özellikle $(C,1)$ toplanabilmenin kazandırdığı bilgilerin ve metotların (N,p,q) toplanabilme ispatını incelemede büyük yararlar sağladığı gözlemlendi. Fourier serilerinin (N,p,q) toplanabilmesinde (4.3) şartının bu metodu araştıran yazarlar tarafından konulan şartlardan daha zayıf şart olduğu gözlemlendi. Fourier serilerinin (N,p,q) toplanabilmesini araştırmak için bazı lemmalara ve özellikle de Lemma 4.1' e çok ihtiyaç duyulduğu görüldü. Çünkü diğer lemmaların ispatında bile Lemma 4.1' den faydalanıldığı gözlemlendi.

Ayrıca (4.16) şartının sağlanması halinde Teorem 4.1' in doğru olduğu sonucu incelendi. Yine Lemma 4.1' den bazı şartların birbirini gerektirmesi sonucunda özellikle de $(N,p_n)\Rightarrow(N,p,q)$ olması durumunda Teorem 4.1' in doğru olduğu gözlemlendi. Sonsuz bir serinin (N,p,q) toplanabilmesini araştırabilmek için ilk olarak bu serinin $(C,1)$-aritmetik ortalama metoduyla toplanabilmesini inceleme yapmak gerektiği gerçeği görüldü. Fourier serisi ile ilgili incelenen Teorem 4.1 ve lemmalardan yararlanarak Fourier serilerinin conjugate(eşlenik) serilerinin (N,p,q) toplanabilmesinin de incelenebileceği sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR

1. Petersen, G. M., Regular Matrix Transformations, Camridge, 1966.

2. Hardy, G. H., Divergent Series, Oxford, 1949.

3. Bor, H., A Note on Two Summability Methods. Proc. Amer. Math. Soc., 98, 81-84, 1986.

4. Triphaty, L. M. And Ojha, M. A., A Theorem on the Nörlund Summability of the Double Fourier Series, J. Sci. Res., 33, 245-251,1982.

5. Nurcome, J. R., Limitation and İneffectivens Theorems for Absolute and Strong Generalized Nörlund Summability, Analysis, 9, 357-365, 1989.

6. Mears, F. M., Absolute Regularity and Nörlund Mean. Ann. Of Math., 38, 594-601, 1937.

7. Tanaka, M., Limitation Theorems for Some Methods of Summability, Bull. Australian Math. Soc., 22, 373-384, 1980.

8. Borwein, D., J. Lond. Math. Soc., 33, 212-20, 1958.

9. Fejer, L., Math. Annalen, 58, 51-69, 1904.

10. Lebesgue, H., Math. Annalen, 61, 251-80, 1905.

11. Hardy, G. H., Proc. Lond. Math. Soc., 2, 12, 365-72, 1913.

12. Siddiqi, J. A., Proc. Camb. Phil. Soc., 59, 47-53, 1963.

13. Singh, T., Proc. Natn Inst. Sci. İndia, 29(A), 67-73, 1963.

14. Singh, T., Annali di Mathematica Pure ed Applicata, 6, 123-32, 1964.

15. Rajagol, C. T., Proc. Camb. Phil. Soc., 59, 47-53, 1963.

16. Iyengar, K. S. K., Proc. İndian Acad. Sci., 18, 113-20, 1943.

17. Khare, S. P., and Tripathi, S. K., Indian J. Pure appl. Math., 19, 353-68, 1988.

18. Mc Fadden, L., Duke Math. J., 9, 168-207, 1943.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Mersin`in Erdemli ilçesinde doğan Elif SERİN ilköğrenimini Arpaçbahşiş Yenimahalle İlköğretim Okulu`nda, orta öğrenimini Sultan Akın İlköğretim Okulu`nda, lise öğrenimini Erdemli Lisesi`nde ve yüksek öğrenimini ise 2004-2008 yılları arasında Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır.

Şubat 2010 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU danışmanlığında hazırladığı "Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilme Metodu" başlıklı tezi ile Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir

2008 yılından beri özel bir kurumda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

İletişim Bilgileri

Arpaçbahşiş kasabası zeytinlik caddesi no: 132

33360 Erdemli/MERSİN

Cep: (506) 997 15 49

E-posta: elfsrn@hotmail.com