T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN KARAR VERME METOTLARI ÜZERİNE

Kader SALTIK

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2018

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN KARAR VERME METOTLARI ÜZERİNE

Kader SALTIK

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2018

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans/Doktora Programı 70111315004 numaralı öğrencisi Kader SALTIK'ın hazırladığı "ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN KARAR VERME METOTLARI ÜZERİNE " başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/05/2018 Çarşamba günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Jüri Üyesi (Danışman) : Dr.Öğr.Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Jüri Üyesi : Dr.Öğr.Üyesi Funda TAŞDEMİR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...18../.05../2018 tarih ve .20. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

..18../.05./2018

T.C. BOZOK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Prof. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN KARAR VERME METOTLARI ÜZERİNE

Kader SALTIK

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2018; Sayfa: 43

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

ÖZET

Bu tezde, ilk olarak esnek cümle ve esnek matris kavramları hatırlatılmış ve bu kavramlarla ilgili genel bilgiler sunulmuştur. Ayrıca ters esnek cümlenin tanımı ve işlemleri verilmiştir. Bu işlemler kullanılarak oluşturulmuş bir karar verme modelinin farklı tip karar problemlerinde uygulamaları yapılmıştır. Daha sonra, ters esnek cümle yapısını daha pratik ve verimli hale getiren kardinalite ters esnek matris kavramı tanımlanmıştır. Bu matrislerin işlemleri, çarpımları ve onların cebirsel yapıları araştırılmıştır. Ayrıca kardinalite ters esnek matris kuramı ile karar vermede, hem optimum seçimi gerçekleştirmek hem de seçeneklerin seçim sırasını belirlemek için kullanılabilecek yeni bir model önerilmiştir. Son olarak, bu karar verme modelinin etkinliği ve performansı farklı yapılara sahip çok kriterli karar verme problemlerini çözerek gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek cümle, Ters esnek cümle, Esnek matris, Kardinalite ters esnek matris, Esnek toplam-satır karar verme.

ON DECISION MAKING PROCEDURES CONSTRUCTED BY USING SOFT MATRICES

Kader SALTIK

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2018; Page: 43

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ABSTRACT

In this thesis, firstly, the concepts of soft set and soft matrix are reminded and general information about these concepts is presented. Also it is given the definition of inverse soft set and then its operations. A decision making model using these operations are applied to different types of decision problems. Afterwards, the concept of cardinality inverse soft matrix, which makes the structure of inverse soft set more practical and efficient, are defined. In order to these matrices, the operations, products and algebraic structures are researched. Also, in decision making with the soft matrix theory, a new model which can be used to find both the optimal choice and the ranking order of objects is proposed. Finally, the effectiveness and performance of this decision making model are illustrated by solving different multi-criteria decision making problems.

Keywords: Soft set, Inverse soft set, Soft matrix, Cardinality inverse soft matrix, Soft sum-row decision making.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan ve desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Yine çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren ve gelecekteki hayatında çok daha başarılı olacağına inandığım kıymetli Arş. Gör. Hüseyin KAMACI'ya da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin az kalacağı lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen Akın Osman ATAGÜN'e ve bana 4 yıllık üniversite hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum. Ve son olarak beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

E	:	Parametre cümlesi
U	:	Evrensel cümle
$\mathcal{P}(E)$	:	Parametre cümlesinin kuvvet cümlesi
$\mathcal{P}(U)$	:	Evrensel cümlenin kuvvet cümlesi
$\mathfrak{F}$	:	U üzerinde tanımlanan esnek cümle
f	:	$\mathfrak{F}$ esnek cümlesinin yaklaşım fonksiyonu
$\mathfrak{F}_{\Phi}$	:	Boş esnek cümle
$\mathfrak{F}_{\tilde{E}}$	:	Evrensel esnek cümle
$S(U)$	:	U üzerinde tanımlanan esnek cümlelerin cümlesi
R_A	:	$\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin bağıntı formu
$[a_{ij}]$	:	Esnek cümleye karşılık gelen esnek matris
$[0]$	:	Sıfır esnek matrisi
$[1]$	:	Evrensel esnek matrisi
$SM_{m\times n}$	:	$m \times n$ tipindeki esnek matrislerin cümlesi
$\overline{\mathfrak{F}}$	:	U üzerinde tanımlanan ters esnek cümle
$\bar{f}$	:	$\overline{\mathfrak{F}}$ ters esnek cümlesinin yaklaşım fonksiyonu
$\overline{\mathfrak{F}}_{\Phi}$	:	Boş ters esnek cümle
$\overline{\mathfrak{F}}_{\tilde{E}}$	:	Evrensel ters esnek cümle
$ISS(U)$	:	U üzerinde tanımlanan ters esnek cümlelerin cümlesi
$\lvert \cdot \rvert$	:	Bir cümlenin kardinalitesi
$[x_{iq}]$	:	Ters esnek cümleye karşılık gelen kardinalite ters esnek matrisi
$[\bar{0}]$	:	Sıfır kardinalite ters esnek matrisi
$[\bar{1}]$	:	Evrensel kardinalite ters esnek matrisi

$CISM(U)$	:	U üzerinde tüm kardinalite ters esnek matrislerin cümlesi
$CISM_{m\times n}$	:	$m \times n$ tipindeki kardinalite ters esnek matrislerin cümlesi
$R_{\overline{\mathfrak{F}}}$	:	$\overline{\mathfrak{F}}$ ters esnek cümlesinin bağıntı formu
$\Re_s$	:	Esnek toplam-satır fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda veya sosyal yaşamda sıklıkla çeşitli karar verme problemleriyle karşılaşılmaktadır. Çünkü bu problemler, belirsizliklerle dolu gündelik hayatın değişmez unsurlarından biridir. Bazı durumlarda, onları çözmeden bir sonuca ulaşmak mümkün değildir. Belirsizlikler içeren ve bir sonuca ulaşmayı engelleyen bu zorlukları ortadan kaldırmak için bulanık cümle [1], sezgisel bulanık cümle [2], belirsiz cümle [3], kaba cümle [4] gibi çeşitli matematiksel teoriler kullanılarak pek çok karar verme yöntemi oluşturuldu. Bunlara ek olarak, son yıllarda esnek cümle teorisi [5] karar verme problemlerini çözmek için yeni bir matematiksel model olarak önerildi. Birçok araştırmacı, karar verme problemlerindeki belirsizlik türüne gör çeşitli karar verme yöntemlerini oluşturmak için esnek cümle teorisini kullandı. Maji ve ark. [6,7] esnek cümlelerinin işlemlerini türetti ve ayrıca karar verme problemlerinin çözümü için esnek yapıların kullanılabileceğini öne sürdü. Daha sonra, Çağman ve Enginoğlu [8] esnek cümlelerle ilgili yeni işlemler tanımladı ve bu işlemler yardımıyla bir $uni - int$ karar verme yöntemini oluşturdu. Bu karar yöntemi ile iki karar vericinin mevcut alternatiflerden en uygun alternatifi seçebileceğini ileri sürdü. Feng ve ark. [8] ,[9]de sunulan $uni - int$ karar verme yöntemini geliştirerek $uni - int^k$, $uni - int_s^t$, $int^m - int^n$ şeklindeki karar verme yöntemlerini önerdi. Han ve Geng [10] $int^m - int^n$ karar verme metodunun optimal çözümleri hesaplamada daha yüksek verimliliğe sahip bir sadeleştirmesini sundu. Zou ve Xiao [11] veri toplama sürecinde bilinmeyen, eksik veya var olmayan verilerin olabileceğini savundu. Aynı zamanda, onlar eksik bilgi altındaki standart esnek cümleler ile ilgilendi. Daha sonra, [12,13] de eksik bilgi altında karar verme için esnek cümlelerin kullanılabileceği örneklerle gösterildi. Ayrıca, eksik verilerin gerçek değeri hakkında belirsizlikler barındıran bazı durumlarda tahminlerden uzak bir karar verme prosedürü uygulanabilir. Buna bağlı olarak, [14] de eksik bilgi altında mevcut kesin verileri değerlendiren bir karar verme algoritması önerildi. Kharal [15] bir esnek cümle için çekirdek, support ve ters kavramlarını tanıttı ve daha sonra bu kavramları kullanarak bir esnek uzayı granüle eden esnek yaklaşımları tanımladı. Ayrıca bu esnek yaklaşımlar aracılığıyla çeşitli karar verme problemlerinin çözümünün elde edilebileceğini gösterdi. Diğer taraftan, çeşitli özel esnek yapılar tanımlanmış ve bu yapılar kullanılarak birçok karar verme yöntemi geliştirilmiştir. [16] da her bir alternatifi sadece bir parametreye sahip olan birebir-örten esnek cümleler tanımlandı. Ayrıca, bu cümleler yardımıyla çeşitli karar problemlerini çözebilen bir birebir-örten esnek karar sistemi verildi. Xiao ve ark. [17] özel ayrık esnek cümleleri tanımladı ve bu kuramın bir uygulamasını sundu. Zhang [18] aralık esnek cümle kavramını tanıttı ve daha sonra bu kavramın karar vermede uygulamalarını verdi. [19] da olasılıklı esnek cümle ve dual olasılıklı esnek cümle teorilerine dayanan yeni karar verme algoritmaları verildi. [20] Çağman ve Enginoğlu esnek cümlelerin matris gösterimi olan esnek matris kavramını tanımladı. Ayrıca, onlar esnek max-min karar verme olarak isimlendirilen bir karar yöntemi oluşturarak esnek matris temelli karar vermeye öncülük etti. Esnek matrislerden esinlenen Vajiyabalaji ve Ramesh [21] üç karar vericinin bulunduğu karar problemlerini çözüme ulaştırmak için kullanılabilecek yeni bir karar verme algoritması önerdi ve iki farklı örnekle algoritmanın performansını test etti. Ayrıca, Basu ve ark. [22], esnek matrisler ve onların karar vermesi üzerine bir çalışma yayınladı. Atagün ve ark. [23], [20] de ortak evrensel cümle üzerinde aynı tipteki esnek matrisler için tanımlanan çarpımları farklı tiplerdeki esnek matrisler için genelleştirildi. Ayrıca, onlar esnek dağılmalı max-min karar verme olarak isimlendirilen bir karar verme prosedürü sundu. [24,25] da, araştırmacılar hastaların rahatsızlığını tespit etmede esnek yapıların kullanılabileceğini ileri sürdü. [26,27] de esnek cümle ve esnek matris temelli karar verme yöntemleri detaylı bir şekilde gözden geçirildi ve birkaç yeni karar yöntemi önerildi.

2016 yılında Çetkin ve ark. [28] esnek cümle yapısına farklı bir bakış açısı sunan ters esnek cümle kavramını tanımladı. Ayrıca, onlar bu teoriyi kullanarak yeni bir karar verme metodu geliştirdi. Bu metodun tutarlılığını göstermek için [8] de önerilen karar verme metodu tarafından elde edilen sonuçlar ile kendi karar verme metotlarının sonuçlarını kıyasladı. Ters esnek cümlelerin matris gösterimleri üzerine temellenmiş bu çalışma, özellikle ayrık parametre cümleleri ile oluşturulmuş ve aynı zamanda birçok parametre, alternatif veya karar verici içeren çok kriterli grup karar verme problemleri için bir çözüm elde etmeyi amaçlamıştır.

Bu tezin bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir: İkinci bölümde esnek cümle ve esnek matrislerin bazı temel prensipleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ters esnek cümle ve onun işlemleri üzerine çalışılmıştır. Ayrıca, bu bölümde ters esnek cümle yapısı kullanılarak oluşturulmuş bir karar verme modeli verilmiştir. Dördüncü bölümde, kardinalite ters esnek matris kavramı tanımlanmış ve daha sonra esnek toplam-satır karar verme olarak isimlendirilen yeni bir karar verme modeli önerilmiştir. Ayrıca, bu karar verme modelinin verimliliği farklı yapılara sahip çok kriterli karar verme problemleri üzerinde gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, esnek cümle ve esnek matris kavramlarıyla ilgili genel bilgiler verilecektir.

2.1. Esnek Cümle

Esnek cümle teorisine ilk adım 1999 yılında Molodtsov tarafından atılmıştır. Molodtsov bir esnek cümleyi, birinci bileşeni bir parametre ve ikinci bileşeni bu parametreyi karşılayan (veya bu parametreye sahip) seçeneklerin cümlesinden oluşan sıralı ikililerin cümlesi olarak ifade etmiştir.

U bir evrensel cümle, E parametrelerin cümlesi, $\mathcal{P}(U)$ evrensel cümlenin kuvvet cümlesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. ([5]) U evrensel cümlesi üzerinde bir $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesi, $f: E \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, $e \notin A \Rightarrow f(e) = \emptyset$ olmak üzere,

$$\mathfrak{F}_A = \{(e, f(e)): e \in E, f(e) \in \mathcal{P}(U)\}$$

sıralı ikililerinin cümlesidir. Burada f fonksiyonu $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır.

Eğer $A = E$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesi $\mathfrak{F}$ şeklinde gösterilir.

Gösterim: U üzerinde tüm esnek cümlelerin cümlesi $S(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.1.2. Evli bir çift olan Bay X ve Bayan X bir ev satın almak için bir emlakçıya başvururlar. Emlakçı çifte kataloğunda olan 6 adet evi gezdirerek, onlara bu evlerle ilgili bazı özellikleri içeren bir belge verir. Çift kendilerine göre evleri 5 parametreye göre değerlendirmeyi düşünmektedir. Bu parametrelerin cümlesi $E = \{e_1 = şehir\ merkezinde, e_2 = en\ az$ üç $odalı, e_3 = kombili, e_4 = otoparklı\}$ dir. Bu durumda bütün evlerin cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olmak üzere Bay X parametreler cümlesinden $A = \{e_1, e_3, e_4\} \subset E$ cümlesini seçerek kendine göre bu parametreleri sağlayan evleri $f(e_1) =\{u_2, u_4\}$, $f(e_3) = U$, $f(e_4) = \{u_1, u_4\}$ şeklinde belirtir. O halde Bay X in esnek cümlesi

$$\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_3, U), (e_4, \{u_1, u_4\})\}$$

dır.

Bayan X parametreler cümlesinden $B = E$ cümlesini seçerek kendine göre bu parametreleri sağlayan evleri $f'(e_1) = \{u_1\}$, $f'(e_2) = \{u_2\}$, $f'(e_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $f'(e_4) = \{u_1, u_4, u_6\}$ şeklinde belirtir. O halde Bayan X in esnek cümlesi

$$\mathfrak{F} = \{(e_1\ \{u_1\}), (e_2, \{u_2\}), (e_3, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_4, u_6\})\}$$

dır. Burada $B = E$ olduğundan $\mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}_E$ esnek cümlesi $\mathfrak{F}$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.1.3. ([8]) $\mathfrak{F}_A \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $f(e) = \emptyset$ sağlanıyorsa, $\mathfrak{F}_A$ cümlesi *boş esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{F}_\Phi$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. ([8]) $\mathfrak{F}_A \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e \in A$ için $f(e) = U$ sağlanıyorsa $\mathfrak{F}_A$ cümlesi A-*evrensel esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{F}_{\tilde{A}}$ ile gösterilir. Eğer $A = E$ bu takdirde $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesi *evrensel esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{F}_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel cümle ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tüm parametrelerin cümlesi olsun.

Eğer $A = \{e_1, e_4\}$ ve $f(e_1) = \emptyset$, $f(e_4) = \emptyset$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesi bir nispi boş esnek cümledir, yani $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_\Phi$ dir.

Eğer $B = \{e_2, e_3\}$ ve $f(e_2) = U$, $f(e_3) = U$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlesi bir A-evrensel esnek cümledir, yani $\mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}_{\tilde{B}}$ dir.

Eğer $C = E$ ve $j = 1,2,3,4$ için $f(e_j) = U$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_C$ esnek cümlesi bir evrensel esnek cümledir, yani $\mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_{\tilde{E}}$ dir.

Tanım 2.1.6. ([8]) $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $f(e) \subseteq f'(e)$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesine $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlesinin *esnek alt cümlesi* denir ve $\mathfrak{F}_A \tilde{\subseteq} \mathfrak{F}_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7. ([8]) $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $f(e) = f'(e)$ ise bu takdirde $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerine *esnek eşittir* denir ve $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8. ([8]) $\mathfrak{F}_A \in S(U)$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A^{\circ} = \{(e, f''(e)) : e \in E,\ f''(e) = U \setminus f(e)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin *tümleyeni (komplemanı)* denir.

Örnek 2.1.9. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ bir evrensel cümle ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametrelerin cümlesi olsun. $A = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\}$ ve $C = E$ olmak üzere sırasıyla esnek cümleleri aşağıdaki gibi alalım:

$\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_4\}), (e_2, \{u_2\}), (e_5, \{u_2, u_3\}), (e_6, U)\}$,

$\mathfrak{F}_B = \{(e_1, \{u_1, u_4\}), (e_2, \{u_2\}), (e_3, \emptyset), (e_5, \{u_3\}), (e_6, \{u_1, u_3, u_4\})\}$,

$\mathfrak{F}_C = \{(e_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_4\}), (e_6, \{u_2, u_4\})\}$.

Bu durumda $\mathfrak{F}_B \tilde{\subseteq} \mathfrak{F}_A$ elde edilir. Aynı zamanda $\mathfrak{F}_C \tilde{\nsubseteq} \mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_C \tilde{\nsubseteq} \mathfrak{F}_B$ dir.

Ayrıca, $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin tümleyeni (komplemanı) sırasıyla

$\mathfrak{F}_A^{\circ} = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_4\}), (e_6, \emptyset)\}$,

$\mathfrak{F}_B^{\circ} = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_4\}), (e_6, \{u_2\})\}$

şeklinde elde edilir. Bu durumda görülür ki $\mathfrak{F}_A^{\circ} \tilde{\subseteq} \mathfrak{F}_C$ ve $\mathfrak{F}_B^{\circ} \tilde{\subseteq} \mathfrak{F}_C$ dir.

Tanım 2.1.10. ([8]) $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A \tilde{\cap} \mathfrak{F}_B = \{(e, f''(e)) \colon e \in E,\ f''(e) = f(e) \cap f'(e)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin *kesişimi* denir.

Tanım 2.1.11. ([8]) $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A \tilde{\cup} \mathfrak{F}_B = \{(e, f''(e)) \colon e \in E,\ f''(e) = f(e) \cup f'(e)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin *birleşimi* denir.

Tanım 2.1.12. ([8]) $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A \tilde{\setminus} \mathfrak{F}_B = \{(e, f''(e)) \colon e \in E,\ f''(e) = f(e) \setminus f'(e)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin *farkı* denir.

Örnek 2.1.13. Örnek 2.1.9 da verilen $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B$ ve $\mathfrak{F}_C$ esnek cümlelerini göz önüne alalım. Bu durumda,

$\mathfrak{F}_A \tilde{\cup} \mathfrak{F}_B = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_4\}), (e_2, \{u_2\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2, u_3\}), (e_6, U)\}$,

$\mathfrak{F}_A \tilde{\cap} \mathfrak{F}_C = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_2, \{u_2\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2\}), (e_6, \{u_2, u_4\})\}$,

$\mathfrak{F}_B \tilde{\setminus} \mathfrak{F}_C = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_3\}), (e_6, \{u_1, u_3\})\}$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.1.14. ([8]) $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A \wedge \mathfrak{F}_B = \{((e_j, e_k), f''(e_j, e_k)) : (e_j, e_k) \in E \times E,\ f''(e_j, e_k) = f(e_j) \cap f'(e_k)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin *ve çarpımı* denir.

Tanım 2.1.15. ([8]) $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B \in S(U)$ ve $\mathfrak{F}_A,\ \mathfrak{F}_B$ nin yaklaşım fonksiyonları sırasıyla f ve f' olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{F}_A \vee \mathfrak{F}_B = \{((e_j, e_k), f''(e_j, e_k)) : (e_j, e_k) \in E \times E,\ f''(e_j, e_k) = f(e_j) \cup f'(e_k)\}$$

şeklinde tanımlanan esnek cümleye $\mathfrak{F}_A$ ve $\mathfrak{F}_B$ esnek cümlelerinin *veya çarpımı* denir.

Örnek 2.1.16. Örnek 2.1.9 daki $\mathfrak{F}_A^\circ$ ve $\mathfrak{F}_B^\circ$ esnek cümlelerini alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_A^\circ \wedge \mathfrak{F}_B^\circ = \{&\big((e_1,e_1),\{u_3\}\big),\big((e_1,e_2),\{u_3\}\big),\big((e_1,e_3),\{u_3\}\big),\big((e_1,e_4),\{u_3\}\big),\\
&\big((e_1,e_5),\emptyset\big),\big((e_1,e_6),\emptyset\big),\big((e_2,e_1),\{u_3\}\big),\big((e_2,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\\
&\big((e_2,e_3),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_2,e_4),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_2,e_5),\{u_1,u_4\}\big),\\
&\big((e_2,e_6),\emptyset\big),\big((e_3,e_1),\{u_2,u_3\}\big),\big((e_3,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_3,e_3),U\big),\\
&\big((e_3,e_4),U\big),\big((e_3,e_5),\{u_1,u_2,u_4\}\big),\big((e_3,e_6),\{u_2\}\big),\big((e_4,e_1),\{u_2,u_3\}\big),\\
&\big((e_4,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_4,e_3),U\big),\big((e_4,e_4),U\big),\big((e_4,e_5),\{u_1,u_2,u_4\}\big),\\
&\big((e_4,e_6),\{u_2\}\big),\big((e_5,e_1),\emptyset\big),\big((e_5,e_2),\{u_1,u_4\}\big),\big((e_5,e_3),\{u_1,u_4\}\big),\\
&\big((e_5,e_4),\{u_1,u_4\}\big),\big((e_5,e_5),\{u_1,u_4\}\big),\big((e_5,e_6),\emptyset\big),\big((e_6,e_1),\emptyset\big),\\
&\big((e_6,e_2),\emptyset\big),\big((e_6,e_3),\emptyset\big),\big((e_6,e_4),\emptyset\big),\big((e_6,e_5),\emptyset\big),\big((e_6,e_6),\emptyset\big)\}
\end{aligned}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_A^\circ \vee \mathfrak{F}_B^\circ = \{&\big((e_1,e_1),\{u_2,u_3\}\big),\big((e_1,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_1,e_3),U\big),\big((e_1,e_4),U\big),\\
&\big((e_1,e_5),U\big),\big((e_1,e_6),\{u_2,u_3\}\big),\big((e_2,e_1),U\big),\big((e_2,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\\
&\big((e_2,e_3),U\big),\big((e_2,e_4),U\big),\big((e_2,e_5),U\big),\big((e_2,e_6),U\big),\big((e_3,e_1),U\big),\\
&\big((e_3,e_2),U\big),\big((e_3,e_3),U\big),\big((e_3,e_4),U\big),\big((e_3,e_5),U\big),\big((e_3,e_6),U\big),\\
&\big((e_4,e_1),U\big),\big((e_4,e_2),U\big),\big((e_4,e_3),U\big),\big((e_4,e_4),U\big),\big((e_4,e_5),U\big),\\
&\big((e_4,e_6),U\big),\big((e_5,e_1),U\big),\big((e_5,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_5,e_3),U\big),\\
&\big((e_5,e_4),U\big),\big((e_5,e_5),\{u_1,u_2,u_4\}\big),\big((e_5,e_6),\{u_1,u_2,u_4\}\big),\\
&\big((e_6,e_1),\{u_2,u_3\}\big),\big((e_6,e_2),\{u_1,u_3,u_4\}\big),\big((e_6,e_3),U\big),\big((e_6,e_4),U\big),\\
&\big((e_6,e_5),\{u_1,u_2,u_4\}\big),\big((e_6,e_6),\{u_2\}\big)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Esnek Matris

Esnek cümlelere farklı bir bakış açısı kazandıran ve daha pratik hale dönüştüren esnek matris kavramı ilk kez 2010 yılında Çağman ve Enginoğlu [20] tarafından ortaya atılmıştır. Özellikle çok sayıda parametre ve seçeneğe sahip karmaşık yapıları anlamlandırmak için oldukça elverişli bir yaklaşımdır.

Tanım 2.2.1. ([20]) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bir evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin cümlesi, $A \subseteq E$ ve $\mathfrak{F}_A$, U üzerinde bir esnek cümle olsun. Bu durumda,

$$R_A = \{(u,e): e \in A, u \in f(e)\} \subseteq U \times E$$

cümlesine $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin *bağıntı formu* denir. R_A bağıntı formunun karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{R_A}: U \times E \to \{0,1\}, \chi_{R_A}(u,e) = \begin{cases} 1, & (u,e) \in R_A \\ 0, & (u,e) \notin R_A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin bağıntı formu R_A aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir:

R_A	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
u_1	$\chi_{R_A}(u_1,e_1)$	$\chi_{R_A}(u_1,e_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_A}(u_1,e_n)$
u_2	$\chi_{R_A}(u_2,e_1)$	$\chi_{R_A}(u_2,e_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_A}(u_2,e_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\chi_{R_A}(u_m,e_1)$	$\chi_{R_A}(u_m,e_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_A}(u_m,e_n)$

Bu durumda, $a_{ij} = \chi_{R_A}(u_i, e_j)$ alınarak tanımlanan

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine U üzerinde $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin bir *esnek matrisi* denir.

Gösterim: U üzerinde tüm $m \times n$ esnek matrislerinin cümlesi $SM_{m \times n}$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.2. Örnek 2.1.2. deki $\mathfrak{F}_A$ esnek cümlesinin esnek matrisi $[a_{ij}]_{6\times4}$ ve $\mathfrak{F}$ esnek cümlesinin esnek matrisi $[b_{ij}]_{6\times4}$ olmak üzere

$$\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_3, U), (e_4, \{u_1, u_4\})\}$$

$R_B = \{(u_1, e_3), (u_1, e_4), (u_2, e_1), (u_2, e_3), (u_3, e_3), (u_4, e_1), (u_4, e_3), (u_4, e_4), (u_5, e_3), (u_6, e_3), \}$.

$$[a_{ij}]_{6\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ij}]_{6\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.3. ([20]) $[a_{ij}] \in SM_{m\times n}$ bir esnek matris olsun.

a) $\forall i, j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu esnek matrise *sıfır esnek matris* denir ve $[0]$ ile gösterilir.

b) Eğer $\forall i, j$ için $a_{ij} = 1$ ise bu esnek matrise *evrensel esnek matris* denir ve $[1]$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.4. Kabul edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

Eğer $A = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \emptyset)\}$ise bu takdirde bu esnek cümleye karşılık gelen esnek matris

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $[a_{ij}] = [0]$, yani $[a_{ij}]$ bir sıfır esnek matrisidir.

Eğer $B = E$ olmak üzere $\mathfrak{F} = \{(e_1, U), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, U)\}$ise bu takdirde bu esnek cümleye karşılık gelen esnek matris

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $[b_{ij}] = [1]$, yani $[b_{ij}]$ bir evrensel esnek matrisidir.

Tanım 2.2.5. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun.

a) $\forall i,j$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ esnek matrisine $[b_{ij}]$ esnek matrisinin bir *esnek alt matrisi* denir ve $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

b) $\forall i,j$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ve $\exists i,j$ için $a_{ij} < b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ esnek matrisine $[b_{ij}]$ esnek matrisinin bir *öz esnek alt matrisi* denir ve $[a_{ij}] \tilde{\subset} [b_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

c) $\forall i,j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerine *esnek eşit matrisler* denir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

Esnek cümleler üzerinde tanımlı birçok işlem olduğu gibi, esnek matrisler üzerinde de çeşitli işlemler mevcuttur. Şimdi esnek matris işlemlerinden bazılarını verelim.

Tanım 2.2.6. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun.

a) $\forall i,j$ için $c_{ij} = max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin *birleşimi* denir ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

b) $\forall i,j$ için $c_{ij} = min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin *kesişimi* denir ve $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

c) $\forall i,j$ için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ esnek matrisinin tümleyeni (komplemanı) denir ve $[a_{ij}]^{\circ}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Eğer $\forall i,j$ için $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [0]$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerine *ayrık esnek matrisler* denir.

Örnek 2.2.8. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ bir evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ parametrelerin cümlesi ve ayrıca $A = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_7\}$ ve $B = \{e_1, e_4, e_5, e_6\}$ olsun. Bu parametre cümleleri ile oluşturulan iki esnek cümle

$\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_4, u_7\}), (e_2, \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\}), (e_4, \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6\}),$
$(e_5, \{u_4, u_5, u_6, u_8\}), (e_7, \{u_2, u_3\})\}$ ve

$\mathfrak{F}_B = \{(e_1, \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_7\}), (e_4, \{u_3, u_4, u_8\}), (e_5, \{u_1, u_2, u_5, u_7, u_8\}), (e_6, \{u_4, u_6\})\}$

olsun. Bu esnek cümlelere karşılık gelen $[a_{ij}] \in SM_{8\times 7}$ ve $[b_{ij}] \in SM_{8\times 7}$ esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ve } [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu esnek matrislerin komplementleri, kesişimleri ve birleşimleri sırasıyla

$$[a_{ij}]^{\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [b_{ij}]^{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[a_{ij}] \,\widetilde{\cap}\, [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [a_{ij}] \,\widetilde{\cup}\, [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, esnek matrislerin *ve*, *veya*, *ve-değil* ve *veya-değil* çarpımlarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.9. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin "*ve çarpımı*"

$$\wedge: SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2},\ [a_{ij}]\ \wedge [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{ip} = min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.2.10. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin "*veya çarpımı*"

$$\vee: SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2},\ [a_{ij}]\ \vee [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{ip} = max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.2.11. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin "*ve-değil çarpımı*"

$$\overline{\wedge}: SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}, [a_{ij}]\ \overline{\wedge}\, [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{ip} = min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.2.12. ([20]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin "*veya-değil çarpımı*"

$$\underline{\vee}: SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}, [a_{ij}]\ \underline{\vee}\, [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{ip} = max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $p = n(j-1) + k$ dır.

Örnek 2.2.13. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin cümlesi ve ayrıca $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_4\}$, E cümlesinin iki alt cümlesi olsun. Bu parametre cümleleri için iki esnek cümle

$$\mathfrak{F}_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, U), (e_5, \{u_1\})\}$$

ve

$$\mathfrak{F}_B = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_4\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_3\})\}$$

şeklinde verilsin. Bu esnek cümlelere karşılık gelen $[a_{ij}] \in SM_{4\times5}$ ve $[b_{ik}] \in SM_{4\times5}$ esnek matrisleri

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu esnek matrislerin ‘ve’ ve ‘ve-değil’ çarpımları sırasıyla

$$[a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[a_{ij}] \overline{\wedge} [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Burada elde edilen $[c_{ip}] = [a_{ij}] \wedge [b_{ik}]$ ve $[d_{ip}] = [a_{ij}] \veebar [b_{ik}]$ esnek matrislerinin boyutu 4×25 dir.

3. TERS ESNEK CÜMLE VE ONUN KARAR VERME METODU

Ters esnek cümle kavramı ilk kez 2016 yılında Çetkin ve ark. [28] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, onlar ters esnek cümlelerin bazı temel işlemlerini tanıtmış ve bu işlemlerden yararlanarak bir karar verme algoritması oluşturmuşlardır. Bu bölümde esnek cümle teorisi ve bu teorinin karar vermedeki uygulamaları verilecektir.

3.1. Ters Esnek Cümle ve İşlemleri

Esnek cümlelerin farklı bir yaklaşımı olan ters esnek cümle aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 3.1.1. ([28]) U bir evrensel cümle, $\mathcal{P}(E)$ E parametrelerin cümlesinin bir kuvvet cümlesi ve $\bar{f}: U \to \mathcal{P}(E)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{(u_i, \bar{f}(u_i)) : u_i \in U, \bar{f}(u_i) \in \mathcal{P}(E)\}$$

cümlesine U üzerinde bir ters esnek cümle denir.

Başka bir deyişle U üzerinde bir ters esnek cümle, birinci bileşeni U nun bir elemanı ve ikinci bileşeni bu elemanın sağladığı parametrelerin cümlesi olan ikililerin cümlesi olarak düşünülebilir.

Gösterim: U üzerinde tüm ters esnek cümlelerin cümlesi $ISS(U)$ ile gösterilecektir.

Not: $\mathfrak{F}$ ve $\overline{\mathfrak{F}}$, U üzerinde sırasıyla bir esnek cümle ve bir ters esnek cümle olsun. Bu durumda $f: E \to \mathcal{P}(U)$ fonksiyonu kullanılarak U üzerinde bir ters esnek cümle $\overline{\mathfrak{F}} = \{(u_i, \bar{f}(u_i)) : u_i \in U, \bar{f}(u_i) = \cup e_j$ öyle ki $u_i \in f(e_j)\}$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\bar{f}: U \to \mathcal{P}(E)$ fonksiyonu kullanılarak U üzerinde bir esnek cümle $\mathfrak{F} = \{(e_j, f(e_j)) : e_j \in E, f(e_j) = \cup u_i$ öyle ki $e_j \in \bar{f}(u_i)\}$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.1.2. Varsayalım ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ bir evrensel cümle ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametrelerin cümlesi olsun. Eğer $\bar{f}: U \to \mathcal{P}(E)$ öyle ki $\bar{f}(u_1) = \{e_2, e_6\}$, $\bar{f}(u_2) = \{e_6\}$,$\bar{f}(u_3) = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$, $\bar{f}(u_4) = \{e_1, e_5, e_6\}$ ise bu takdirde ters esnek cümle

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{(u_1, \{e_2, e_6\}), (u_2, \{e_6\}), (u_3, \{e_2, e_3, e_5, e_6\}), (u_4, \{e_1, e_5, e_6\})\}$$

dir. Aynı zamanda bu ters esnek cümleye karşılık gelen esnek cümle ise

$$\mathfrak{F} = \{(e_1, \{u_4\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_3\}), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_3, u_4\}), (u_6, U)\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.3. ([28]) $\overline{\mathfrak{F}} \in ISS(U)$ olsun. Eğer $\forall u_i \in U$ için $\bar{f}(u_i) = \emptyset$ ise $\overline{\mathfrak{F}}$ ye *boş ters esnek cümle* denir ve $\overline{\mathfrak{F}}_{\Phi}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. ([28]) $\overline{\mathfrak{F}} \in ISS(U)$ olsun. Eğer $\forall u_i \in U$ için $\bar{f}(u_i) = E$ ise $\overline{\mathfrak{F}}$ ye *evrensel ters esnek cümle* denir ve $\overline{\mathfrak{F}}_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.5. Varsayalım ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel cümle ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin cümlesi olsun.

Kabul edelim ki $\overline{f^1}: U \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ ve $i = 1,2,3,4$ için $\overline{f^1}(u_i) = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \emptyset), (u_2, \emptyset), (u_3, \emptyset), (u_4, \emptyset)\}$ cümlesi boş ters esnek cümledir. Yani $\overline{\mathfrak{F}^1} = \overline{\mathfrak{F}}_{\Phi}$ dir.

Kabul edelim ki $\overline{f^2}: U \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ ve $i = 1,2,3,4$ için $\overline{f^2}(u_i) = E$ olsun. Bu durumda $\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, E), (u_2, E), (u_3, E), (u_4, E)\}$ cümlesi evrensel ters esnek cümledir. Yani $\overline{\mathfrak{F}^2} = \overline{\mathfrak{F}}_{\tilde{E}}$ dir.

Tanım 3.1.6. ([28]) $\overline{\mathfrak{F}} \in ISS(U)$ olsun. $\forall u_i \in U$ için $\bar{f}^{\circ}: U \to \mathcal{P}(E)$ öyle ki $\bar{f}^{\circ}(u_i) = E \backslash \bar{f}(u_i)$ olmak üzere $\overline{\mathfrak{F}}^{\circ}$ ye $\overline{\mathfrak{F}}$ ters esnek cümlesinin tümleyeni (komplemanı) denir.

Tanım 3.1.7. ([28]) $\overline{\mathfrak{F}^1}, \overline{\mathfrak{F}^2} \in ISS(U)$ olsun.

a) Eğer $\forall u_i \in U$ için $\overline{f^1}(u_i) \subseteq \overline{f^2}(u_i)$ ise bu takdirde $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ters esnek cümlesine $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlesinin ters esnek alt cümlesidir denir ve $\overline{\mathfrak{F}^1} \sqsubseteq \overline{\mathfrak{F}^2}$ ile gösterilir.

b) Eğer $\forall u_i \in U$ için $\overline{f^1}(u_i) = \overline{f^2}(u_i)$ ise bu takdirde $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerine ters esnek eşit cümleler denir ve $\overline{\mathfrak{F}^1} = \overline{\mathfrak{F}^2}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8. ([28]) $\overline{\mathfrak{F}^1}, \overline{\mathfrak{F}^2} \in ISS(U)$ olsun.

a) $\forall u_i \in U$ için $\overline{f^1}(u_i) \cap \overline{f^2}(u_i)$ fonksiyonuna karşılık gelen ters esnek cümleye, $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerinin kesişimi denir ve $\sqcap_{k=1}^{2} \overline{\mathfrak{F}^k} = \overline{\mathfrak{F}^1} \sqcap \overline{\mathfrak{F}^2}$ ile gösterilir.

b) $\forall u_i \in U$ için $\overline{f^1}(u_i) \cup \overline{f^2}(u_i)$ fonksiyonuna karşılık gelen ters esnek cümleye, $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerinin birleşimi denir ve $\sqcup_{k=1}^{2} \overline{\mathfrak{F}^k} = \overline{\mathfrak{F}^1} \sqcup \overline{\mathfrak{F}^2}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.9. Varsayalım ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel cümle ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametrelerin cümlesi olsun. Ayrıca

$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_1, e_2, e_5, e_6\}), (u_2, \{e_4\}), (u_3, \{e_2, e_3, e_5\}), (u_4, \{e_1, e_2, e_4\}), (u_5, \{e_3\})\}$,

$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_3, e_5\}), (u_2, \{e_2, e_4, e_5\}), (u_3, E), (u_4, \{e_2, e_5, e_6\}), (u_5, \{e_1, e_5, e_6\})\}$ ve

$\overline{\mathfrak{F}^3} = \{(u_1, \{e_2, e_5, e_6\}), (u_2, \emptyset), (u_3, \{e_2, e_3, e_5\}), (u_4, \{e_1, e_2\}), (u_5, \{e_3\})\}$ U üzerinde ters esnek cümleler olsun. Bu durumda,

$\forall u_i \in U$ için $\overline{f^3}(u_i) \subseteq \overline{f^1}(u_i)$ olduğundan $\overline{\mathfrak{F}^3}$ ters esnek cümlesi $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ters esnek cümlesinin ters esnek alt cümlesidir, yani $\overline{\mathfrak{F}^3} \sqsubseteq \overline{\mathfrak{F}^1}$ dir. Diğer taraftan kolaylıkla görülür ki $\overline{\mathfrak{F}^2} \not\sqsubseteq \overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^3} \not\sqsubseteq \overline{\mathfrak{F}^2}$ dir.

$\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerinin kesişimi ve birleşimi sırasıyla

$\sqcap_{k=1}^{2}\overline{\mathfrak{F}^k} = \overline{\mathfrak{F}^1} \sqcap \overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_5\}), (u_2, \{e_4\}), (u_3, \{e_2, e_3, e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \emptyset)\}$,

$\sqcup_{k=1}^{2}\overline{\mathfrak{F}^k} = \overline{\mathfrak{F}^1} \sqcup \overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\}), (u_2, \{e_2, e_4, e_5\}), (u_3, E),$
$(u_4, \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}), (u_5, \{e_1, e_3, e_5, e_6\})\}$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca, $\overline{\mathfrak{F}^3}$ ters esnek cümlesinin tümleyeni (komplemanı)

$\overline{\mathfrak{F}^3}^{\circ} =$
$\{(u_1, \{e_1, e_3, e_4\}), (u_2, E), (u_3, \{e_1, e_4, e_6\}), (u_4, \{e_3, e_4, e_5, e_6\}), (u_5, \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\})\}$
dir.

3.2. Ters Esnek Cümle Üzerine Temellenmiş Karar Verme

Ters esnek cümle ve işlemleri kullanılarak [28] da bir karar verme algoritması oluşturulmuştur. Şimdi bu karar verme algoritmasını ve onun uygulamalarını verelim.

Algoritma:

Adım1. Parametre cümlesinden $A_1, A_2, \ldots, A_n$ altcümleleri seçilir.

Adım2. Her bir parametre cümlesi için $\overline{\mathfrak{F}^k}$, $k = 1,2, \ldots, l$ ters esnek cümleleri oluşturulur.

Adım 3. $\exists k \in \{1,2, \ldots, l\}$ için $A_k \subseteq \overline{f^k}(u_i)$ ve $\forall h \neq k$ için $A_h \cap \overline{f^h}(u_i) \neq \emptyset$ şartını sağlayan bütün u_i ler bulunur.

Örnek 3.2.1. Varsayalım ki bir beyaz eşya üretim fabrikasına bir teknisyen alımı yapılacaktır. Bu teknisyen alımı için 8 aday başvurmuştur. Ayrıca, boş pozisyona seçilecek teknisyene karar vermek için yetkili iki mühendis görevlendirilir.

Adayların cümlesi $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_8\}$ olsun. Adaylarda aranan şartlar deneyime sahip, belirlenen bazı bilgisayar programlarına hakim, lisans mezunu, genç, askerlik durumu elverişli olmak üzere bunların cümlesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olsun.

İki mühendis boş pozisyon için uygun teknisyeni yukarıdaki algoritmayı kullanarak belirleyebilir.

Adım 1. Birinci mühendis adaylarda arayacağı kriterlerin cümlesini $A_1 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, ikincisi mühendis de $A_2 = \{e_2, e_3, e_5\}$ şeklinde belirler.

Adım 2. Bu parametre cümlelerine göre mühendisler ters esnek cümlelerini sırasıyla

$$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_1, e_4\}), (u_2, \{e_1, e_2, e_5\}), (u_3, \{e_1, e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_2, e_5\}), (u_6, \{e_1, e_2, e_4, e_5\}), (u_7, \{e_4, e_5\}), (u_8, \{e_1, e_2\})\} \text{ ve}$$

$$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_3\}), (u_2, \{e_2, e_3, e_5\}), (u_3, \{e_3, e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_2, e_5\}), (u_6, \{e_3, e_5\}), (u_7, \{e_3, e_5\}), (u_8, \{e_2\})\}$$

şeklinde oluştururlar.

Adım 3. Bu durumda, $A_2 \subseteq \overline{f^2}(u_2)$ iken $A_1 \cap \overline{f^1}(u_2) = \{e_1, e_2, e_5\} \neq \emptyset$ olduğundan u_2 ve aynı zamanda $A_1 \subseteq \overline{f^1}(u_6)$ iken $A_2 \cap \overline{f^2}(u_6) = \{e_3, e_5\} \neq \emptyset$ olduğundan u_6 bu boş pozisyon için iki mühendise göre en uygun adaylardır. Buradan anlaşılır ki fabrika bu iki teknisyenden herhangi birini işe alabilir.

Örnek 3.2.2. Örnek 3.2.1 de verilen karar vericileri ve aynı zamanda bu karar vericilerin parametre cümlelerini ve ters esnek cümlelerini düşünelim. Ayrıca, karar verici ailesine bir mühendis daha ekleyelim. Bu üçüncü mühendisin parametre cümlesi $A_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere bu parametre cümlesine göre ters esnek cümlesi

$$\overline{\mathfrak{F}^3} = \{(u_1, \{e_3, e_4\}), (u_2, \emptyset), (u_3, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}), (u_4, \{e_2, e_4\}), (u_5, \{e_2\}), (u_6, \{e_2, e_3, e_5\}), (u_7, \{e_1, e_3\}), (u_8, \{e_1, e_2\})\}$$

olsun.

Bu durumda $A_3 \subseteq \overline{f^3}(u_3)$ iken $A_1 \cap \overline{f^1}(u_3) \neq \emptyset$ ve $A_2 \cap \overline{f^2}(u_3) \neq \emptyset$ olduğundan u_3 ve ayrıca $A_1 \subseteq \overline{f^1}(u_6)$ iken $A_2 \cap \overline{f^2}(u_6) \neq \emptyset$ ve $A_3 \cap \overline{f^3}(u_6) \neq \emptyset$ olduğundan u_6 bu boş pozisyon için üç mühendise göre en uygun adaylardır. O halde, fabrika u_3 ve u_6 dan herhangi birini işe alabilir.

Bir önceki örnekte iki mühendise göre bu iş için en uygun adaylar u_2 ve u_6 şeklinde belirlenmişti. Fakat üçüncü mühendisinde değerlendirmesi düşünüldüğünde $A_3 \cap \overline{f^3}(u_2) = \emptyset$ olduğundan u_2 bu boş pozisyon için uygun görülmemektedir.

Örnek 3.2.3. Örnek 3.2.1 de verilen problemi göz önüne alalım. İki mühendisin parametre cümleleri $A_1 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$ ve $A_2 = \{e_2, e_3, e_5\}$ olmak üzere ters esnek cümleleri

$$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_1, e_4\}), (u_2, \{e_1, e_2, e_5\}), (u_3, \{e_1, e_2, e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_2, e_5\}), (u_6, \{e_1, e_5\}), (u_7, \{e_4\}), (u_8, \{e_1, e_2\})\} \text{ ve}$$

$$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_3\}), (u_2, \{e_3, e_5\}), (u_3, \{e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_3, e_5\}), (u_6, \{e_3, e_5\}), (u_7, \{e_2, e_5\}), (u_8, \{e_2\})\}$$

olsun. Bu durumda, yukarıdaki karar verme algoritmasına kullanılarak bir çözüm elde edilemez. Yani, boş pozisyon için uygun aday bulunamaz.

4. KARDİNALİTE TERS ESNEK MATRİS VE ESNEK TOPLAM-SATIR KARAR VERME METODU

Bu bölümde bir ters esnek cümleye karşılık gelen kardinalite ters esnek matris kavramı tanıtılacaktır. Aynı zamanda, bu matrislerin işlemleri araştırılacak ve elde edilen işlemler için bazı cebirsel yapılar sunulacaktır. Ayrıca bu işlemler yardımıyla esnek toplam-satır karar verme olarak isimlendirilen bir karar metodu verilecektir.

4.1. Kardinalite Ters Esnek Matris

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ seçeneklerin cümlesi, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin cümlesi olsun. Ayrıca $|\cdot|$, bir cümlenin kardinalitesini (eleman sayısını) göstermek üzere $\aleph_E = \{1,2, \dots, |E|\}$ olsun.

Tanım 4.1.1. $\bar{\mathfrak{F}} \in ISS(U)$ olsun. Bu durumda,

$$R_{\bar{\mathfrak{F}}} = \{(u_i, q) : q \in \aleph_E \ ve \ q \leq |\bar{f}(u_i)|\} \subseteq U \times \aleph_E$$

cümlesine $\bar{\mathfrak{F}}$ ters esnek cümlesinin bağıntı formu denir. $R_{\bar{\mathfrak{F}}}$ bağıntı formunun karakteristik fonksiyonu,

$$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}} : U \times \aleph_E \to \{0,1\}, \chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_i, q) = \begin{cases} 1, & (u_i, q) \in R_{\bar{\mathfrak{F}}} \\ 0, & (u_i, q) \notin R_{\bar{\mathfrak{F}}} \end{cases}$$

ile verilir. Eğer $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ seçeneklerin cümlesi, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin cümlesi ise $R_{\bar{\mathfrak{F}}}$ aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir:

$R_{\bar{\mathfrak{F}}}$	1	2	$\cdots$	n
u_1	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_1, 1)$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_1, 2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_1, n)$
u_2	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_2, 1)$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_2, 2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_2, n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_m, 1)$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_m, 2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_m, n)$

Bu durumda $x_{iq} = \chi_{R_{\bar{\mathfrak{F}}}}(u_i, q)$ alınarak tanımlanan

$$[x_{iq}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine $\bar{\mathfrak{F}}$ ters esnek cümlesinin U üzerinde $m \times n$ *kardinalite ters esnek matrisi* denir. Bu tanımla, bir ters esnek cümle bir matris olarak ifade edilebilir.

Gösterim: U üzerinde tüm $m \times n$ kardinalite ters esnek matrislerinin cümlesi $CISM_{m\times n}$ ile gösterilecektir.

Örnek 4.1.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere $\overline{\mathfrak{F}} = \{(u_1, \{e_1, e_3\}), (u_2, \{e_3\}), (u_3, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}), (u_4, \emptyset), (u_5, \{e_2, e_3\})\}$ şeklinde verilsin. Bu durumda $\overline{\mathfrak{F}}$ ye karşılık gelen kardinalite ters esnek matris

$$[x_{iq}]_{5\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 4.1.3. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ bir kardinalite ters esnek matris olsun.

a) Eğer $\forall i, j$ için $x_{iq} = 0$ ise bu matrise *sıfır kardinalite ters esnek matris* denir ve $[\bar{0}]$ ile gösterilir.

b) Eğer $\forall i, j$ için $x_{iq} = 1$ ise bu matrise *evrensel kardinalite ters esnek matris* denir ve $[\bar{1}]$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.4. $[x_{iq}], [y_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun.

a) $\forall i, q$ için $x_{iq} \leq y_{iq}$ ise $[x_{iq}]$ matrisine $[y_{iq}]$ matrisinin bir kardinalite ters esnek alt matrisi denir ve $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ şeklinde gösterilir.

b) $\forall i, q$ için $x_{iq} = y_{iq}$ ise $[x_{iq}]$ ve $[y_{iq}]$ matrislerine kardinalite ters esnek eşit matrisler denir ve $[x_{iq}] = [y_{iq}]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.5. Kabul edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

Eğer $\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \emptyset), (u_2, \emptyset), (u_3, \emptyset), (u_4, \emptyset), (u_5, \emptyset), (u_6, \emptyset)\}$ ise bu takdirde bu ters esnek cümleye karşılık gelen kardinalite ters esnek matris

$$[x_{iq}^1] = [\bar{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Yani bir sıfır kardinalite ters esnek matristir.

Eğer $\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, E), (u_2, E), (u_3, E), (u_4, E), (u_5, E), (u_6, E)\}$ ise bu takdirde bu ters esnek cümleye karşılık gelen kardinalite ters esnek matris

$$[x_{iq}^2] = [\bar{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Yani bir evrensel kardinalite ters esnek matristir.

Ayrıca, $\forall i, q$ için $x_{iq}^1 = 0 < 1 = x_{iq}^2$ olduğundan $[x_{iq}^1] \sqsubseteq [x_{iq}^2]$ dir.

Önerme 4.1.6. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun.

i. $[x_{iq}] \sqsubseteq [\bar{1}]$

ii. $[\bar{0}] \sqsubseteq [x_{iq}]$

iii. $[x_{iq}] \sqsubseteq [x_{iq}]$

iv. $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ ve $[y_{iq}] \sqsubseteq [z_{iq}] \Rightarrow [x_{iq}] \sqsubseteq [z_{iq}]$

Önerme 4.1.7. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ kardinalite ters esnek matrisler olsun.

i. $[x_{iq}] = [y_{iq}]$ ve $[y_{iq}] = [z_{iq}] \Leftrightarrow [x_{iq}] = [z_{iq}]$

ii. $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ ve $[y_{iq}] \sqsubseteq [x_{iq}] \Leftrightarrow [x_{iq}] = [y_{iq}]$

4.2. Kardinalite Ters Esnek Matris İşlemleri

Ters esnek cümlelerde verilen birçok işlem kardinalite ters esnek matrisler için de tanımlanabilir. Ayrıca, ters esnek cümle işlemlerinden daha pratik ve kullanışlı olan matris işlemlerini verelim:

Tanım 4.2.1. $[x_{iq}], [y_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ olsun.

a) Eğer $\forall i, q$ için $v_{iq} = \max\{x_{iq}, y_{iq}\}$ ise $[v_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ matrisine $[x_{iq}]$ ve $[y_{iq}]$ kadinalite ters esnek matrislerinin *birleşimi* denir ve $[x_{iq}] \sqcup [y_{iq}]$ ile gösterilir.

b) Eğer $\forall i, q$ için $v_{iq} = \min\{x_{iq}, y_{iq}\}$ ise $[v_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ matrisine $[x_{iq}]$ ve $[y_{iq}]$ kadinalite ters esnek matrislerinin *kesişimi* denir ve $[x_{iq}] \sqcap [y_{iq}]$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ olsun. Eğer $\forall i$ için $v_{iq} = \begin{cases} 1, & q \leq n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \end{cases}$ ise $[v_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ matrisine $[x_{iq}]$ kardinalite ters esnek matrisinin *tümleyeni* (komplemanı) denir ve $[x_{iq}]^{\circ}$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.3. Örnek 3.1.9 daki $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümleleri düşünelim. Bu cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri sırasıyla

$$[x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $[x_{iq}]$ ve $[y_{iq}]$ matrislerinin tümleyeni ve ayrıca $[x_{iq}]$ ve $[y_{iq}]$ matrislerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla

$$[x_{iq}]^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ [y_{iq}]^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[x_{iq}] \sqcup [y_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [x_{iq}] \sqcap [y_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 4.2.4. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ bir kardinalite ters esnek matris olsun.

i. $[[x_{iq}]^\circ]^\circ = [x_{iq}]$

ii. $[\bar{0}]^\circ = [\bar{1}]$

iii. $[\bar{1}]^\circ = [\bar{0}]$

Önerme 4.2.5. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ kardinalite ters esnek matrisler olsun.

i. $[x_{iq}] \sqcup [x_{iq}] = [x_{iq}]$

ii. $[x_{iq}] \sqcup [\bar{0}] = [x_{iq}]$

iii. $[x_{iq}] \sqcup [\bar{1}] = [\bar{1}]$

iv$[x_{iq}] \sqcup [y_{iq}] = [y_{iq}] \sqcup [x_{iq}]$

v. $([x_{iq}] \sqcup [y_{iq}]) \sqcup [z_{iq}] = [x_{iq}] \sqcup ([y_{iq}] \sqcup [z_{iq}])$

Önerme 4.2.6. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ kardinalite ters esnek matrisler olsun.

i. $[x_{iq}] \sqcap [x_{iq}] = [x_{iq}]$

ii. $[x_{iq}] \sqcap [\bar{0}] = [\bar{0}]$

iii. $[x_{iq}] \sqcap [\bar{1}] = [x_{iq}]$

iv. $[x_{iq}] \sqcap [y_{iq}] = [y_{iq}] \sqcap [x_{iq}]$

v. $([x_{iq}] \sqcap [y_{iq}]) \sqcap [z_{iq}] = [x_{iq}] \sqcap ([y_{iq}] \sqcap [z_{iq}])$

Önerme 4.2.7. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ kardinalite ters esnek matrisler olsun.

i. $[x_{iq}] \sqcup ([y_{iq}] \sqcap [z_{iq}]) = ([x_{iq}] \sqcup [y_{iq}]) \sqcap ([x_{iq}] \sqcup [z_{iq}])$

ii. $[x_{iq}] \sqcap ([y_{iq}] \sqcup [z_{iq}]) = ([x_{iq}] \sqcap [y_{iq}]) \sqcup ([x_{iq}] \sqcap [z_{iq}])$

Önerme 4.2.8. $[x_{iq}], [y_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu durumda aşağıdaki De-Morgan kuralları geçerlidir.

i. $([x_{iq}] \sqcup [y_{iq}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \sqcap [y_{iq}]^\circ$

ii. $([x_{iq}] \sqcap [y_{iq}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \sqcup [y_{iq}]^\circ$

İspat: i. $\forall i$ için

$$\begin{aligned}
([x_{iq}] \sqcup [y_{iq}])^\circ &= [max\{x_{iq}, y_{iq}\}]^\circ \\
&= \left[\begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} max\{x_{il}, y_{il}\} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} max\{x_{il}, y_{il}\} \end{cases}\right] \\
&= min\left[\begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \end{cases}, \begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} y_{il} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} y_{il} \end{cases}\right] \\
&= [x_{iq}]^\circ \sqcap [y_{iq}]^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\forall i$ için

$$\begin{aligned}
([x_{iq}] \sqcap [y_{iq}])^\circ &= [min\{x_{iq}, y_{iq}\}]^\circ \\
&= \left[\begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} min\{x_{il}, y_{il}\} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} min\{x_{il}, y_{il}\} \end{cases}\right] \\
&= max\left[\begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} x_{il} \end{cases}, \begin{cases} 1, & q \le n - \sum_{l=1}^{n} y_{il} \\ 0, & q > n - \sum_{l=1}^{n} y_{il} \end{cases}\right] \\
&= [x_{iq}]^\circ \sqcup [y_{iq}]^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.9. Örnek 4.2.3 deki kardinalite ters esnek matrisleri göz önüne alalım. Bu durumda

$$([x_{iq}] \sqcup [y_{iq}])^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x_{iq}]^\circ \sqcap [y_{iq}]^\circ,$$

$$([x_{iq}] \sqcap [y_{iq}])^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [x_{iq}]^\circ \sqcup [y_{iq}]^\circ$$

elde edilir.

4.3. Kardinalite Ters Esnek Matris Çarpımları

Bu bölümde kardinalite ters esnek matrisler için dört farklı çarpım tanımlanacaktır. Ayrıca bu çarpımların cebirsel yapıları kapsamlı olarak araştırılacaktır.

Tanım 4.3.1. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ ve $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu matrislerin "*ve çarpımı*"

$$\curlywedge : CISM_{m\times n_1} \times CISM_{m\times n_2} \longrightarrow CISM_{m\times n_1 n_2}, [x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}] = [z_{is}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ, $s \leq \mu n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeri olmak üzere $z_{is} = min\{x_{iq}, y_{ip}\}$ öyle ki $q = \mu,\ s = (\mu - 1)n_2 + p$ dir.

Tanım 4.3.2. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ ve $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu matrislerin "*veya çarpımı*"

$$\curlyvee : CISM_{m\times n_1} \times CISM_{m\times n_2} \longrightarrow CISM_{m\times n_1 n_2}, [x_{iq}] \curlyvee [y_{ip}] = [z_{is}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ, $s \leq \mu n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeri olmak üzere $z_{is} = max\{x_{iq}, y_{ip}\}$ öyle ki $q = \mu,\ s = (\mu - 1)n_2 + p$ dir.

Tanım 4.3.3. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ ve $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu matrislerin "*ve-değil çarpımı*"

$$\overline{\curlywedge} : CISM_{m\times n_1} \times CISM_{m\times n_2} \longrightarrow CISM_{m\times n_1 n_2}, [x_{iq}] \overline{\curlywedge} [y_{ip}] = [z_{is}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ, $s \leq \mu n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeri olmak üzere $z_{is} = min\{x_{iq}, 1 - y_{ip}\}$ öyle ki $q = \mu, s = (\mu - 1)n_2 + p$ dir.

Tanım 4.3.4. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ ve $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu matrislerin "*veya-değil çarpımı*"

$$\underline{\curlyvee}: CISM_{m\times n_1} \times CISM_{m\times n_2} \longrightarrow CISM_{m\times n_1 n_2},\ [x_{iq}]\ \underline{\curlyvee}\ [y_{ip}] = [z_{is}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu,\ s \leq \mu n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeri olmak üzere $z_{is} = max\{x_{iq}, 1 - y_{ip}\}$ öyle ki $q = \mu, s = (\mu - 1)n_2 + p$ dir.

Örnek 4.3.5. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ bir evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametrelerin cümlesi olsun. Ayrıca ters esnek cümleler

$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_2\}), (u_2, E), (u_3, \{e_2, e_3\}), (u_4, \{e_1, e_3\})\}$,

$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_1, e_4\}), (u_2, \{e_1, e_3\}), (u_3, \{e_4\}), (u_4, \emptyset)\}$

şeklinde oluşturulsun. Bu durumda, $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri sırasıyla

$$[x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. O halde, bu matrislerin "*ve çarpımı*"

$$[z_{is}] = [x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $[z_{is}]$ matrisinin tipi 4×9 dir.

Ayrıca, burada $z_{28} = min\{x_{23}, y_{22}\} = 1$ değeri $3 \leq |\overline{f^1}(u_2)|$ ve $2 \leq |\overline{f^2}(u_2)|$ anlamına gelir. Benzer düşünceyle $z_{29} = min\{x_{23}, y_{23}\} = 0$ değeri $3 \leq |\overline{f^1}(u_2)|$ iken $3 \nleq |\overline{f^2}(u_2)|$ anlamına gelmektedir.

Not: Genel olarak kardinalite ters esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımları değişmeli değildir.

Örnek 4.3.6. Örnek 4.3.5 deki $[x_{iq}]$, $[y_{ip}]$ ve $[z_{is}]$ matrislerini alalım. Bu durumda

$$[w_{is}] = [y_{ip}] \curlywedge [x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan görülür ki $[z_{is}] \neq [w_{is}]$ dir.

Önerme 4.3.7. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ ve $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ iki kardinalite ters esnek matris olsun. Bu durumda aşağıdaki De Morgan kuralları sağlanır:

i. $([x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \curlyvee [y_{ip}]^\circ$

ii. $([x_{iq}] \curlyvee [y_{ip}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \curlywedge [y_{ip}]^\circ$

iii. $([x_{iq}] \barwedge [y_{ip}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \underline{\curlyvee} [y_{ip}]^\circ$

iv. $([x_{iq}] \underline{\curlyvee} [y_{ip}])^\circ = [x_{iq}]^\circ \barwedge [y_{ip}]^\circ$

İspat: **i.** $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}, [y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ ve $[z_{is}] = ([x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}])^\circ$, $[w_{is}] = [x_{iq}]^\circ \curlyvee [y_{ip}]^\circ$ olsun. Tanım 4.3.1 ve Tanım 4.3.2 den $[z_{is}]$ ve $[w_{is}]$, $m \times n_1 n_2$ tipindedir ve $\forall\, i, q, r$ için $z_{is} = 1 - \min\{x_{iq}, y_{ip}\} = max\{1 - x_{iq}, 1 - y_{ip}\} = w_{is}$ dir. Dolayısıyla, $[z_{is}] = [w_{is}]$ elde edilir.

Benzer şekilde **ii.**, **iii.** ve **iv.** ispatlanabilir.

Teorem 4.3.8. $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ olsun. Bu durumda

i. $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ ise $[x_{iq}] \curlywedge [z_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}] \curlywedge [z_{iq}]$ dir.

ii. $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ ise $[x_{iq}] \curlyvee [z_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}] \curlyvee [z_{iq}]$ dir.

Fakat **i.** ve **ii.** nin tersi doğru değildir.

İspat: $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{m\times n}$ olsun.

i. $[v_{iq}] = [x_{iq}] \curlywedge [z_{iq}]$ ve $[w_{iq}] = [y_{iq}] \curlywedge [z_{iq}]$ olsun. Eğer $[x_{iq}] \sqsubseteq [y_{iq}]$ ise $\forall i,q$ için $x_{iq} \le y_{iq}$ dir. Bu durumda, Tanım 4.3.1 den $\forall i, q$ için $v_{iq} = \min\{x_{iq}, z_{iq}\} \le \min\{y_{iq}, z_{iq}\} = w_{iq}$ elde edilir. Ayrıca $[v_{iq}]$ ve $[w_{iq}]$ matrisleri $m \times n^2$ tipindedir. Bu durumda $[v_{iq}] \sqsubseteq [w_{iq}]$ elde edilir.

Benzer şekilde **ii.** ispatlanabilir.

İspatın geri kalanı için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.3.9. **i.** Varsayalım ki $[x_{iq}], [y_{iq}], [z_{iq}] \in CISM_{4\times 3}$ olsun.

$$[x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [y_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [z_{iq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan görüyoruz ki $[x_{iq}] \curlywedge [z_{iq}] = [y_{iq}] \curlywedge [z_{iq}]$, fakat $[x_{iq}] \not\sqsubseteq [y_{iq}]$ dir.

ii. Varsayalım ki $[x_{iq}]$, $[y_{iq}]$, $[z_{iq}] \in CISM_{3\times 3}$ olsun.

$$[x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [y_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [z_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan görüyoruz ki $[x_{iq}] \curlyvee [z_{iq}] = [y_{iq}] \curlyvee [z_{iq}]$, fakat $[x_{iq}] \not\subseteq [y_{iq}]$ dir.

Teorem 4.3.10. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$, $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ ve $[z_{ir}] \in CISM_{m\times n_3}$ olsun. Bu durumda

$$([x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}]) \curlywedge [z_{ir}] = [x_{iq}] \curlywedge ([y_{ip}] \curlywedge [z_{ir}])$$

dır. Yani kardinalite ters esnek matrislerin *ve-çarpımı* birleşmelidir.

İspat: $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$, $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ ve $[z_{ir}] \in CISM_{m\times n_3}$ olsun. Tanım 4.3.1 den $[x_{iq}] \curlywedge [y_{ip}] = [t_{is}] \in CISM_{m\times n_1 n_2}$ yazılabilir, burada $t_{is} = \min\{x_{iq}, y_{ip}\}$ öyle ki $q = \mu_1$, $s = (\mu_1 - 1)n_2 + p$ ve $\mu_1, s \leq \mu_1 n_2$ yi sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Daha sonra, $[t_{is}] \curlywedge [z_{ir}] = [w_{is'}] \in CISM_{m\times n_1 n_2 n_3}$ yazılabilir, burada $w_{is'} = \min\{t_{is}, z_{ir}\}$ öyle ki $s = \mu_2$, $s' = (\mu_2 - 1)n_3 + r$ ve $\mu_2, s' \leq \mu_2 n_3$ yi sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} s' &= (\mu_2 - 1)n_3 + r \\ &= (s-1)n_3 + r \\ &= \big((\mu_1 - 1)n_2 + p - 1\big)n_3 + r \\ &= \big((\mu_1 - 1)n_2 n_3 + (p - 1\big)n_3 + r \\ &= \big((q - 1)n_2 n_3 + (p - 1\big)n_3 + r \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde $[y_{ip}] \curlywedge [z_{ir}] = [t'_{ik}] \in CISM_{m\times n_2 n_3}$ yazılabilir, burada $t'_{ik} = \min\{y_{ip}, z_{ir}\}$ öyle ki $p = \mu_3$, $k = (\mu_3 - 1)n_3 + r$ ve $\mu_3, k \leq \mu_3 n_3$ yi sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Daha sonra, $[x_{iq}] \curlywedge [t'_{ik}] = [v_{ik'}] \in CISM_{m\times n_1 n_2 n_3}$ yazılabilir, burada $v_{ik'} = \min\{x_{iq}, t'_{ik}\}$ öyle ki $q = \mu_4$, $k' = (\mu_4 - 1)n_2 n_3 + k$ ve $\mu_4, k' \leq \mu_4 n_2 n_3$ yi sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} k' &= (\mu_4 - 1)n_2 n_3 + k \\ &= (\mu_4 - 1)n_2 n_3 + (\mu_3 - 1)n_3 + r \\ &= (q - 1)n_2 n_3 + (p - 1)n_3 + r \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. O halde, $min\{min\{x_{iq}, y_{ip}\}, z_{ir}\} = min\{x_{iq}, min\{y_{ip}, z_{ir}\}\}$ olduğundan ve ayrıca (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden $[w_{is'}] = [v_{ik'}]$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.11. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$, $[y_{ip}] \in CISM_{m\times n_2}$ ve $[z_{ir}] \in CISM_{m\times n_3}$ olsun. Bu durumda

$$([x_{iq}] \curlyvee [y_{ip}]) \curlyvee [z_{ir}] = [x_{iq}] \curlyvee ([y_{ip}] \curlyvee [z_{ir}])$$

dır. Yani, kardinalite ters esnek matrislerin *veya-çarpımı* birleşmelidir.

İspat: Teorem 4.3.10 un ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 4.3.12. Varsayalım ki $[x_{iq}] \in CISM_{3\times 3}$, $[y_{ip}] \in CISM_{3\times 2}$ ve $[z_{ir}] \in CISM_{3\times 1}$ kardinalite ters esnek matrisleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$[x_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [y_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [z_{ir}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu durumda

$$([x_{iq}] \barwedge [y_{ip}]) \barwedge [z_{ir}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[x_{iq}] \barwedge ([y_{ip}] \barwedge [z_{ir}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $([x_{iq}] \barwedge [y_{ip}]) \barwedge [z_{ir}] \neq [x_{iq}] \barwedge ([y_{ip}] \barwedge [z_{ir}])$ elde edilir.

Benzer şekilde

$$([x_{iq}] \underline{\curlyvee} [y_{ip}]) \underline{\curlyvee} [z_{ir}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[x_{iq}] \underline{\curlyvee} ([y_{ip}] \underline{\curlyvee} [z_{ir}]) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $([x_{iq}] \underline{\curlyvee} [y_{ip}]) \underline{\curlyvee} [z_{ir}] \neq [x_{iq}] \underline{\curlyvee} ([y_{ip}] \underline{\curlyvee} [z_{ir}])$ elde edilir.

Önerme 4.3.13. i. Ve-çarpıma göre $[1]_{m\times 1}$ kardinalite ters esnek matrisi $CISM(U)$ nun birim elemanıdır.

ii. Veya-çarpıma göre $[0]_{m\times 1}$ kardinalite ters esnek matrisi $CISM(U)$ nun birim elemanıdır.

İspat: i. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ kardinalite ters esnek matris ve $[z_{iq}] = [x_{iq}] \curlywedge [1]_{m\times 1}$ olsun. Tanım 4.3.1 den $[z_{iq}]$ kardinalite ters esnek matrisi $m \times n_1$ tipindedir ve $z_{iq} = \min\{x_{iq}, 1\} = x_{iq}$ dur. O halde $[z_{iq}]$ =$[x_{iq}]$ elde edilir.
Benzer şekilde **ii.** ispatlanabilir.

Teorem 4.3.14. i. Ve-çarpıma göre $CISM(U)$ bir monoiddir.
ii. Veya-çarpıma göre $CISM(U)$ bir monoiddir.
İspat: Teorem 4.3.10, 4.3.11 ve Önerme 4.3.13 den aşikardır.

4.4. Esnek Toplam-Satır Karar Verme Metodu

Bu bölümde ilk olarak esnek toplam-satır fonksiyonu tanımlanacaktır. Daha sonra bu fonksiyon ve kardinalite ters esnek matrisin 've çarpım' işlemi kullanılarak yeni bir karar verme algoritması oluşturulacaktır.

Tanım 4.4.1. $[x_{iq}] \in CISM_{m\times n_1}$ bir kardinalite ters esnek matris olsun. Bu durumda,

$$\Re_s : CISM_{m\times n} \longrightarrow R^m$$
$$[x_{iq}] \longrightarrow \Re_s([x_{iq}]) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \rangle$$

şeklinde tanımlanan $\Re_s$ fonksiyonuna *esnek toplam-satır fonksiyonu* denir. Burada, $i = 1,2,\dots,m$ için $\lambda_i = \sum_{q=1}^{n} x_{iq}$ şeklindedir.

Örnek 4.4.2. Farz edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ve $\overline{\mathfrak{F}} = \{(u_1, \{e_1, e_6\}, (u_2, \{e_3\}, (u_3, \{e_1, e_2, e_4, e_5\}), (u_4, \emptyset), (u_5, \{e_2, e_3\})\}$ olsun. Bu ters esnek cümlenin kardinalite ters esnek matrisi

$$[x_{iq}]_{5\times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\Re_s([x_{ip}]) = \langle 2,1,4,0,2 \rangle$ şeklinde elde edilir.

Tanım 4.4.3. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ alternatiflerin cümlesi olsun.

i. $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin cümlesi olsun. $\overline{\mathfrak{F}^1}$, $\overline{\mathfrak{F}^2}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ aynı parametre cümlesinden (E cümlesinden) üretilmiş ters esnek cümleler ve $[x_{iq}^1]_{m\times n}$, $[x_{iq}^2]_{m\times n}$,…, $[x_{iq}^l]_{m\times n}$ matrisleri de sırasıyla bu ters esnek cümlelere karşılık gelen kardinalite ters esnek matrisler olsun. $[v_{iq}] = \sqcap_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]$, $[z_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]$ ve $[w_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]^\circ$ olmak üzere

$$\mathfrak{D} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$$
$$= \Re_s([z_{is}]) - \Re_s([w_{is}]) + l \times \Re_s([v_{iq}]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{l} \Re_s([x_{iq}^{k}]) - \langle \underbrace{(l-1)n, (l-1)n, \dots, (l-1)n}_{m\ tane} \rangle \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{k=1}^{l} \Re_s([x_{iq}^{k}]) - \langle \underbrace{(l-1)n, (l-1)n, \dots, (l-1)n}_{m\ tane} \rangle \right| \right)$$

vektörü U nun *karar vektörü* olarak isimlendirilir.

ii. $E_k = \{e_1, e_2, \dots, e_{n_k}\}$ $(k = 1,2, \dots, l)$ farklı parametre cümleler olsun. $\overline{\mathfrak{F}^1}$, $\overline{\mathfrak{F}^2}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ bu farklı parametre cümlelerinden (E_k, $k = 1,2, \dots, l$) üretilmiş ters esnek cümleler ve $[x_{iq_1}^1]_{m\times n_1}$, $[x_{iq_2}^2]_{m\times n_2}$,…, $[x_{iq_l}^l]_{m\times n_l}$ matrisleri de sırasıyla bu ters esnek cümlelere karşılık gelen kardinalite ters esnek matrisler olsun. $[z_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq_k}^k]$ ve $[w_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq_k}^k]^\circ$ olmak üzere

$$\mathfrak{D} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle = \Re_s([z_{is}]) - \Re_s([w_{is}])$$

vektörü U nun *karar vektörü* olarak isimlendirilir.

Tanım 4.4.4. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ alternatiflerin cümlesi ve $\mathfrak{D}$, U nun karar vektörü olsun. Bu karar vektörü kullanılarak elde edilen

$$opt_{\mathfrak{D}}(U) = \{u_i : u_i \in U\ ve\ \forall j \neq i\ için\ \alpha_i > \alpha_j\}$$

cümleye U nun bir *optimum cümlesi* denir.

Ayrıca, bu alternatiflerin seçim sırası

$$\alpha_{i_1} > \alpha_{i_2} > \cdots > \alpha_{i_m} \text{ ise } u_{i_1} \succ u_{i_2} \succ \cdots \succ u_{i_m}$$

şeklinde verilebilir.

Şimdi bu tanımları kullanarak esnek toplam-satır karar verme metodunun algoritmasını verelim.

Algoritma:

Adım 1. $\overline{\mathfrak{F}^1}$, $\overline{\mathfrak{F}^2}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ ters esnek cümleleri oluşturulur.

Adım 2. Bu esnek cümlelere karşılık gelen $[x_{iq}^1]$, $[x_{iq}^2]$,…, $[x_{iq}^l]$ kardinalite ters esnek matrisleri oluşturulur.

Adım 3. Bu kardinalite ters esnek matrislerin kesişimi, yani $[v_{iq}] = \sqcap_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]$ bulunur.

Adım 4. "$\curlywedge$" işlemi kullanılarak, $[z_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]$ ve $[w_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{l} [x_{iq}^k]^\circ$ matrisleri elde edilir.

Adım 5. Bu matrisler kullanılarak, karar vektörü $\mathfrak{D}$ elde edilir.

Adım 6. U nun bir optimum cümlesi bulunur ve ayrıca alternatiflerin seçim sırası belirlenir.

Uyarı: Bu algoritmada $\overline{\mathfrak{F}^1}$, $\overline{\mathfrak{F}^2}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ ters esnek cümleleri $\bigcap_{k=1}^{l} E_k = \emptyset$ olacak şekildeki E_1, E_2,…, E_l parametre cümlelerinden oluşuyorsa bu taktirde Adım 5 de $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_s([z_{is}]) - \mathfrak{R}_s([w_{is}])$ alınır, ve ayrıca Adım 3 algoritmadan çıkarılır.

Bu algoritmayı özellikle çok sayıda alternatif veya parametre içeren karar verme problemleri için uygulamak zordur. Bu nedenle bu algoritmanın çözüm adımlarında hesaplamaları daha pratik hale getiren Scilab (Matlab) kodlarını verelim.

Scilab (Matlap) Algoritması:

Adım 1. $\overline{\mathfrak{F}^1}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ ters esnek cümleleri oluşturunuz.

Adım 2. Bu esnek cümlelere karşılık gelen x_1, x_2,…, x_l matrislerini giriniz.

Adım 3. $[v_{iq}]$ matrisini elde etmek için kodlar:

```
function v = carint(x_1, x_2)
[m, n] = size(x_1);
[m, n] = size(x_2);
v = zeros(m, n);
   for  i = 1: m
      for  q = 1: n
         v(i, q) = min(x_1(i, q), x_2(i, q));
      end
   end
endfunction
```

Eğer matris sayısı ikiden fazla ise bu koda aşağıdaki kod eklenir:

```
function V = carintmulti(varargin)
r = argn(2);
Q = varargin(1);
   for  i = 2: r
      Q = carint(Q, varargin(i));
   end
V = Q
endfunction
```

Adım 4. $[Z_{is}]$ matrisini elde etmek için kodlar:

```
function z = carand(x_1, x_2)
[m, n1] = size(x_1);
[m, n2] = size(x_2);
 z = zeros(m, n1 * n2);
    for  i = 1: m
       for  q = 1: n1
          for  p = 1: n2
              t = (q − 1) * n2 + p;
              z(i, s) = min(x_1(i, q), x_2(i, p));
          end
       end
    end
endfunction
```

Eğer matris sayısı ikiden fazla ise bu koda aşağıdaki kod eklenir:

```
function Z = carandmulti(varargin)
r = argn(2);
 X = carand(varargin(1), varargin(2));
    for  i = 3: r
       X = carand(X, varargin(i));
    end
Z = X
endfunction
```

$[w_{is}]$ matrisini elde etmek için kodlar:

```
function w1 = carandnot(x_1, x_2)
[m, n1] = size(x_1);
[m, n2] = size(x_2);
z = zeros(m, n1 * n2);
   for  i = 1: m
      for  q = 1: n1
         for  p = 1: n2
             t = (n1 − (q − 1) − 1) * n2 + n2 − (p − 1);
             w1(i, s) = min(1 − x_1(i, q),1 − x_2(i, p));
         end
      end
   end
endfunction
```

Eğer matris sayısı ikiden fazla ise bu koda aşağıdaki kodlar eklenir:

```
function w2 = andnot(x_1, x_2)
[m, n1] = size(x_1);
```

```
[m, n2] = size(x_2);
z = zeros(m, n1 * n2);
  for  i = 1: m
    for  q = 1: n1
      for  p = 1: n2
        t = (q − 1) * n2 + n2 − (p − 1);
        w2(i, s) = min(x_1(i, q),1 − x_2(i, p));
      end
    end
  end
endfunction
```

```
function W = carandnotmulti(varargin)
r = argn(2);
 X = carandnot(varargin(1), varargin(2));
  for  i = 3: r
    X = andnot(X, varargin(i));
  end
W = X
endfunction
```

Adım 5. Esnek karar vektörünü elde etmek için kodlar:

```
function D = carrowsum(z, w1, x_1, x_2)
[m, n] = size(x_1);
D = sum(z,' c') − sum(w1,' c') + 2 * sum(v,' c') + 1/2 * ((sum(x_1, 'c')
    +(sum(x_2,' c') − (2 − 1) * n) + abs((sum(x_1, 'c') + (sum(x_2,' c')
    −(2 − 1) * n)));
endfunction
```

Eğer matris sayısı ikiden fazla ise aşağıdaki kod kullanılır:

```
function D = carrowsum(Z, W, x_1, x_2, … , x_l)
[m, n] = size(x_1);
D = sum(Z,' c') − sum(W,' c') + l * sum(v,' c') + 1/2 * ((sum(x_1,' c')
    +(sum(x_2,' c') + ⋯ + (sum(x_l,' c') − (l − 1) * n) + abs((sum(x_1,' c')
    +(sum(x_2,' c') + ⋯ + (sum(x_l,' c') − (l − 1) * n)));
endfunction
```

Burada l değeri yerine Adım 2 deki matris sayısı yazılmalıdır.

Adım 6. Esnek karar vektöründen U nun bir optimum cümlesi bulunur ve ayrıca alternatiflerin seçim sırası belirlenir.

Uyarı: Eğer $\overline{\mathfrak{F}^1}$, $\overline{\mathfrak{F}^2}$,…, $\overline{\mathfrak{F}^l}$ ters esnek cümleleri $\bigcap_{k=1}^{l} E_k = \emptyset$ olacak şekildeki E_1, E_2,…, E_l parametre cümlelerinden oluşuyorsa bu taktirde Scilab-Matlab algoritmasında Adım 3 silinir ve Adım 5 için aşağıdaki kodlar kullanılır:

$function\ D = carrowsum(z, w1)$
$D = sum(z,'c') - sum(w1,'c');$
$endfunction$

Eğer matris sayısı ikiden fazla ise aşağıdaki kod kullanılır:

$function\ D = carrowsum(Z, W)$
$D = sum(Z,'c') - sum(W,'c');$
$endfunction$

4.5. Esnek Toplam-Satır Karar Verme Metodunun Uygulamaları

Esnek toplam-satır karar verme metodunu çeşitli alanlardaki karar problemlerini çözmek için uygulayalım:

Örnek 4.5.1. Örnek 3.2.3 ü göz önüne alalım. Bu karar probleminin çözümü için esnek toplam-satır karar verme metodunu uygulayalım.

Adım 1. İki mühendisin ters esnek cümleleri sırasıyla

$$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_1, e_4\}), (u_2, \{e_1, e_2, e_5\}), (u_3, \{e_1, e_2, e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_2, e_5\}), (u_6, \{e_1, e_5\}), (u_7, \{e_4\}), (u_8, \{e_1, e_2\})\}$$ ve

$$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_3\}), (u_2, \{e_3, e_5\}), (u_3, \{e_5\}), (u_4, \{e_2\}), (u_5, \{e_3, e_5\}), (u_6, \{e_3, e_5\}), (u_7, \{e_2, e_5\}), (u_8, \{e_2\})\}$$

dir.

Adım 2. $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri

$$[x_{iq}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [x_{iq}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3. $[x_{iq}^1]$ ve $[x_{iq}^2]$ kardinalite ters esnek matrislerin kesişimi

$$
[v_{iq}] = \sqcap_{k=1}^{2}[x_{iq}^{k}] = [x_{iq}^{1}] \sqcap [x_{iq}^{2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

dir.

Adım 4. "⅄" işlemi kullanılarak,

$[z_{is}] = ⅄_{k=1}^{2} [x_{iq}^{k}] = [x_{iq}^{1}] ⅄ [x_{iq}^{2}] =$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$[w_{is}] = ⅄_{k=1}^{2} [x_{iq}^{k}]^{\circ} = [x_{iq}^{1}]^{\circ} ⅄ [x_{iq}^{2}]^{\circ} =$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

elde edilir.

Adım 5. $[x_{iq}^{1}]$, $[x_{iq}^{2}]$, $[v_{iq}]$, $[z_{is}]$ ve $[w_{is}]$ matrislerinden kullanılarak karar vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \rangle \\
&= \Re_s([z_{is}]) - \Re_s([w_{is}]) + 2 \times \Re_s([v_{iq}]) + \tfrac{1}{2}\Big(\textstyle\sum_{k=1}^{2} \Re_s([x_{iq}^{k}]) - \langle 5,5,5,5,5,5,5,5 \rangle \\
&\quad + \big| \textstyle\sum_{k=1}^{2} \Re_s([x_{iq}^{k}]) - \langle 5,5,5,5,5,5,5,5 \rangle \big| \Big) \\
&= \langle 2,6,3,1,4,4,2,2 \rangle - \langle 12,6,8,16,9,9,12,12 \rangle + \langle 2,4,2,2,4,4,2,2 \rangle + \langle 0,0,0,0,0,0 \rangle \\
&= \langle -8, 4, -3, -13, -1, -1, -8, -8 \rangle
\end{aligned}
$$

Adım 6. Böylelikle U nun optimum cümlesi $opt_{\mathfrak{D}}(U) = \{u_2\}$ şeklinde bulunur. Bu durumda fabrikanın teknisyen olarak işe alabileceği en uygun aday u_2 dir. Ayrıca $\alpha_2 > \alpha_5 = \alpha_6 > \alpha_3 > \alpha_1 = \alpha_7 = \alpha_8 > \alpha_4$ olduğundan bu adayların seçim sırası $u_2 \succ u_5 = u_6 \succ u_3 \succ u_1 = u_7 = u_8 \succ u_4$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.5.2. Kabul edelim ki, bir çift (Bay ve Bayan X) yaz tatili için bir otel rezervasyonu yapmak istiyor. Bunun için daha önce tatil için bulundukları yedi farklı otel arasından $E = \{e_1 = çeşitli\ aktiviteleri\ mevcut,\ e_2 = fiyatı\ uygun,\ e_3 = açık\ büfe,\ e_4 = geniş\ havuza\ sahip,\ e_5 = denize\ sıfır\}$ şeklinde belirledikleri parametrelere göre bir oteli seçmeyi istiyorlar. Bu otellerin cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ olmak üzere bu çift esnek toplam-satır karar verme metodunu aşağıdaki gibi uygulayarak bu seçimi gerçekleştirebilir.

Adım 1. Bay ve Bayan X ters esnek cümlelerini sırasıyla aşağıdaki gibi belirler:

$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{e_1, e_4\}), (u_2, \{e_1, e_2, e_4, e_5\}), (u_3, \{e_2, e_5\}), (u_4, \{e_1, e_3, e_4, e_5\}), (u_5, E),$
$(u_6, \{e_1, e_3, e_5\}\}$ ve

$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{e_2, e_5\}), (u_2, \{e_4\}), (u_3, \{e_3, e_4, e_5\}), (u_4, \{e_1, e_3, e_4, e_5\}), (u_5, \{e_1, e_3 e_5\}),$
$(u_6, \{e_2, e_3, e_4, e_5\}\}$.

Adım 2. $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ve $\overline{\mathfrak{F}^2}$ ters esnek cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri

$$[x_{iq}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [x_{iq}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3. Bu kardinalite ters esnek matrislerin kesişimi

$$[v_{iq}] = \sqcap_{k=1}^{2} [x_{iq}^k] = [x_{iq}^1] \sqcap [x_{iq}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 4. "⅄" işlemi kullanılarak,

$[z_{is}] = ⅄_{k=1}^{2} [x_{iq}^k] = [x_{iq}^1] ⅄ [x_{iq}^2] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[w_{is}] = ⅄_{k=1}^{2} [x_{iq}^k]^\circ = [x_{iq}^1]^\circ ⅄ [x_{iq}^2]^\circ =$

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

Adım 5. $[x_{iq}^1]$, $[x_{iq}^2]$, $[v_{iq}]$, $[z_{is}]$ve $[w_{is}]$ matrislerinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle \\ &= \Re_s([z_{is}]) - \Re_s([w_{is}]) + 2 \times \Re_s([v_{iq}]) + \frac{1}{2}\Big(\textstyle\sum_{k=1}^{2} \Re_s([x_{iq}^k]) - \langle 5,5,5,5,5,5 \rangle \\ &\quad + \big| \textstyle\sum_{k=1}^{2} \Re_s([x_{iq}^k]) - \langle 5,5,5,5,5,5 \rangle \big| \Big) \\ &= \langle 4,4,6,16,15,12 \rangle - \langle 9,4,6,1,0,2 \rangle + \langle 4,2,4,8,6,6 \rangle + \langle 0,0,1,3,3,2 \rangle \\ &= \langle -1,2,5,26,24,18 \rangle \end{aligned}$$

karar vektörü hesaplanır.

Adım 6. Son olarak, U nun optimum cümlesi $opt_{\mathfrak{D}}(U) = \{u_4\}$ şeklinde bulunur. Buradan anlaşılır ki çiftin oluşturdukları ters esnek cümlelere göre seçebilecekleri en uygun otel u_4 tür. Ayrıca, $\alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ olduğundan bu otellerin seçim sırası $u_4 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_3 \succ u_2 \succ u_1$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.5.3. Varsayalım ki bir otomotiv şirketi Y kendi şirketinin üretmiş olduğu son model bir otomobili altı farklı otomotiv şirketinin son model otomobilleriyle karşılaştırmak istiyor. Böylece şirketinin üretmiş olduğu otomobilin durumunu belirlemeyi amaçlıyor. Şirket bu amaç doğrultusunda dört uzman görevlendiriyor.

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_6\}$ altı farklı otomotiv şirketinin son model otomobillerini gösteren bir cümle olsun. E_1, E_2, E_3 ve E_4 sırasıyla uzmanların parametre cümleleri olmak üzere bu cümleler sırasıyla otomobilin performansını, görüntü-donanımını, ekonomikliğini ve satış sonrası avantajlarını değerlendirmede kullanılacak parametreleri içersin. Bu parametre cümleleri aşağıdaki gibi verilsin:

$E_1 = \{a_1 = tork\ , a_2 = motor\ gücü\}$,

$E_2 = \{b_1 = konfor\ , b_2 = tasarım,\ b_3 = güvenlik\}$,

$E_3 = \{c_1 = satış\ ücreti\ , c_2 = yakıt\ tüketimi\}$

$E_4 = \{d_1 = servis\ olanakları\ , d_2 = vergi, d_3 = pazarlama\}$

Bu durumda Y şirketi esnek toplam-satır karar verme yöntemini kullanarak otomobilinin durumunu belirleyebilir.

Adım1. Belirtilen parametrelere göre uzmanlar sırasıyla U üzerinde aşağıdaki dört ters esnek cümleyi oluştururlar.

$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(u_1, \{a_2\}), (u_2, E_1), (u_3, \{a_2\}), (u_4, \{a_2\}), (u_5, \{a_1\}), (u_6, \{a_2\})\}$

$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(u_1, \{b_1, b_2\}), (u_2, \{b_3\}), (u_4, E_2), (u_5, \{b_1\}), (u_6, \{b_1, b_3\})$

$\overline{\mathfrak{F}^3} = \{(u_1, \{c_2\}), (u_2, \{c_2\}), (u_3, \{c_1\}), (u_4, \{c_2\}), (u_5, E_3), (u_6, \{c_1\})\}$

$\overline{\mathfrak{F}^4} = \{(u_1, \{d_1\}), (u_2, \{d_1, d_2\}), (u_3, \{d_1, d_2\}), (u_4, \{d_3\}), (u_5, \{d_3\}), (u_6, \{d_1, d_2\})\}$

Burada, $\overline{\mathfrak{F}^1}$ ters esnek cümlesindeki $(u_5, \{a_1\})$ ikilisi ile birinci uzman, u_5 şirketinin otomobilinin torkunun Y şirketinin otomobilinin torkundan daha yüksek olduğunu fakat u_5 şirketinin otomobilinin motor gücünün Y şirketinin otomobilinin motor gücünden daha düşük olduğunu ifade etmektedir.

Adım 2. Bu cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri

$$[x^1_{iq_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [x^2_{iq_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [x^3_{iq_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [x^4_{iq_4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 3. Ve çarpım işlemi kullanılarak aşağıdaki matrisler elde edilir.

$[z_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{4} [x^k_{iq_k}] =$

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

$[w_{is}] = \curlywedge_{k=1}^{4} [x^k_{iq_k}]^{\circ} =$

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Adım 4: $[z_{is}]$ ve $[w_{is}]$ kullanılarak

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_s([z_{is}]) - \mathfrak{R}_s([w_{is}]) = \langle 0,4,-3,3,2,3 \rangle$$

esnek karar vektörü elde edilir.

Adım 5: O halde otomobillerin sıralaması şu şekildedir:

$u_2 \succ u_4 = u_6 \succ u_5 \succ u_1 \succ u_3$ Y şirketinin otomobili

Örnek 4.5.3. Bir marketler zinciri olan Z şirketinin İç Anadolu bölgesindeki Kayseri, Yozgat, Sivas ve Nevşehir'de birçok marketi mevcuttur. Bu şirket bu bölgede hem ürün dağıtımını kolaylaştıracak hem de üretim için ham maddeyi kolaylıkla sağlayabileceği bir fabrika (aynı zamanda dağıtım merkezi) kurmayı hedeflemektedir. Şirket bu fabrika için önceden dört yer (lokasyon) belirlemiştir. Bu lokasyonlar sırasıyla Ankara-Elmadağ (l_1), Yozgat-Merkez (l_2), Kayseri-Talas (l_3), Sivas-Merkez (l_4) dür. Bu lokasyonların her birinin bazı avantajları ve dezavantajları vardır. Lokasyonların her biri farklı ve spesifik özelliklere sahip olduğundan şirket bu özelliklerin her birini değerlendirerek bir karara ulaşmak istiyor. Şirket yerleri (lokasyonları) değerlendirmede göz önüne alacağı kriterleri aşağıdaki gibi belirliyor:

KRİTERLER					
E_1= Nicel Kriterler			E_2= Nitel Kriterler		
A_1= Yatırım Masrafları	A_2= İşletme Masrafları	A_3= Ulaşım Masrafları	B_1= Tedarik Zinciri ve Lojistik Faktörler	B_2= Stratejik Faktörler	B_3= Diğer Faktörler
a_{11}= inşaat maliyeti a_{12}=ekipman maliyeti a_{13}= arazi maliyeti	a_{21}= taşıma giderleri a_{22}= depolama giderleri a_{23}=yönetim giderleri	a_{31}= toplam geliş güzergahı maliyetleri a_{32}= toplam gidiş güzergahı maliyetleri	b_{11}= tedarik zincirini optimize etme b_{12}= tedarik zincirinin dayanıklılığı üzerindeki etkiler b_{13}= tedarik zincirinin duyarlılığı üzerindeki etkiler b_{14}= trafik yoğunluğu ve ulaşım şatları b_{15}= depo kapasitesini genişletme olanağı	b_{21}= rekabet ortamı b_{22}= yeni taleplerin geliştirilmesi b_{23}= tedarik zincirinin ayarlanması b_{24}=ürün konumlandırma b_{25}=daha iyi üretim b_{26}= yerin (lokasyonun) ekonomik çekiciliği	b_{31}=personel temin edebilme b_{32}= emniyet ve güvenlik b_{33}= halk tarafından çekiciliği b_{34}= elverişli altyapı b_{35}= şirketin değerine etkisi

Şirket esnek toplam-satır karar vermenin algoritmalarını kullanarak en uygun lokasyonu aşağıdaki gibi elde eder:

Adım 1. Şirket her bir alt kriter cümlesine göre lokasyonları değerlendirdikten sonra

$\overline{\mathfrak{F}^1} = \{(l_1,\{a_{11},a_{13}\}),(l_2,\{a_{11},a_{12}\}),(l_3,\{a_{12},a_{13}\}),(l_4,A_1)\}$,
$\overline{\mathfrak{F}^2} = \{(l_1,\{a_{21},a_{22}\}),(l_2,\{a_{21}\}),(l_3,\{a_{21},a_{22}\}),(l_4,\{a_{21}\})\}$,

$\overline{\mathfrak{F}^3} = \{(l_1, A_3), (l_2, \{a_{31}\}), (l_3, \{a_{32}\}), (l_4, A_3)\}$,

$\overline{\mathfrak{F}^4}$=$\{(l_1, \{b_{11}, b_{13}, b_{14}, b_{15}\}), (l_2, \{b_{14}, b_{15}\})(l_3, \{b_{11}, b_{13}, b_{14}, b_{15}\}), (l_4, \{b_{11}, b_{14}\})\}$

$\overline{\mathfrak{F}^5} = \{(l_1, \{b_{22}, b_{25}, b_{26}\}), (l_2, \{b_{21}, b_{24}, b_{25}, b_{26}\}), (l_3, \{b_{21}, b_{22}, b_{24}, b_{26}\}),$
$(l_4, \{b_{21}, b_{24}, b_{25}\})\}$,

$\overline{\mathfrak{F}^6} = \{(l_1, \{b_{32}, b_{34}\}), (l_2, \{b_{32}, b_{33}\}), (l_3, \{b_{31}, b_{32}, b_{35}\}), (l_4, \{b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{35}\})\}$.

şeklinde ters esnek cümleleri elde eder.

Adım 2. Bu cümlelerin kardinalite ters esnek matrisleri sırasıyla

$$[x^1_{iq_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [x^2_{iq_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [x^3_{iq_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [x^4_{iq_4}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[x^5_{iq_5}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [x^6_{iq_6}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Adım 3. Bu matrislerin çarpımı olan $[z_{is}]_{4\times2700} = \curlywedge_{k=1}^{6} [x^k_{iq_k}]$ ve $[w_{is}]_{4\times2700} = \curlywedge_{k=1}^{6} [x^k_{iq_k}]^{\circ}$ matrislerini elde etmeliyiz. Fakat $[z_{is}]$ ve $[w_{is}]$ boyutu 4×2700 dür. Dolayısıyla bu matrisleri klasik hesaplamalarla elde etmemiz oldukça zordur. Fakat Scilab kodları kullanılarak bu matrisler kolaylıkla elde edilir ve sonuç olarak

$\mathfrak{R}_s([z_{is}]) = \langle 192,32,192,144 \rangle$ ve $\mathfrak{R}_s([w_{is}]) = \langle 0,36,4,0 \rangle$ elde edilir.

Adım 4. Dolayısıyla karar vektörü şu şekilde hesaplanır:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_s([z_{is}]) - \mathfrak{R}_s([w_{is}]) = \langle 192, -4, 188,144 \rangle$$

Adım 5. Sonuç olarak, $\mathfrak{D}$ esnek karar vektöründen $opt_{\mathfrak{D}} = \{l_1\}$ olduğu görülür. Böylelikle anlaşılır ki; fabrika için en uygun lokasyon l_1 dir.

Ayrıca lokasyonların seçim sırası $l_1 \succ l_3 \succ l_4 \succ l_2$ olarak elde edilir.

SONUÇ

Bu tezde, kardinalite ters esnek matrisler ve onların işlemleri tanımlandı. Ayrıca bu işlemlerin çeşitli özellikleri ve cebirsel yapıları araştırıldı. Daha sonra, kardinalite ters esnek matris ve işlemleri kullanılarak karar verme problemlerinin hemen hemen hepsi için bir çözüm sunan yeni bir karar verme algoritması oluşturuldu. Karar vericilerin aynı parametrelere veya farklı parametrelere göre karar vermesi durumunda bu algoritmanın kullanılabileceği ileri sürüldü ve bu durumu pekiştiren üç farklı örnek verildi. Böylelikle farklı parametreler altında karar vermede ilk kez esnek yapılar kullanıldı.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Inform Control, 8,338-353, 1965.

2. Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Set Syst, 20, 87-96, 1986.

3. Gau, W.L., Buehrer, D.J., Vague sets, IEEE Tran Syst Man Cybern, 23, 610-614, 1993.

4. Pawlak, Z., Rough sets, Int J Inform Comput. Sci, 11, 341-356, 1982.

5. Molodtsov, D., Soft set theory-first results, Comput Math Appl, 37, 19-31, 1999.

6. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft set theory, Comput Math Appl, 45, 555-562, 2003.

7. Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem, Comput Math Appl, 44, 1077-1083, 2002.

8. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft set theory and uni-int decision making, Eur J Oper Res, 207, 848-855, 2010.

9. Feng, F., Li, Y., Çağman, N., Generalized uni-int decision making schemes based on choice value soft sets, Eur J Oper Res, 220, 162-170, 2012.

10. Han, B.-H., Geng, S.-L., Pruning method for optimal solutions of int^mint^n decision making scheme, Eur J Oper Res 231, 779-783, 2013.

11. Zou, Y., Xiao, Z., Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, Knowl-Based Syst, 21, 941-945, 2008.

12. Han, B.-H., Li, Y.-M., Liu, J., Geng, S.-L., Li. H.-Y., Elicitation criterions for restricted intersection of two incomplete soft sets. Knowl- Based Syst, 59, 121-131, 2014.

13. Qin, H., Ma, T., Herewan. J. Zain, Data filling approach of soft sets under incomplete information, editors: In Ngoc Thanh Nguyen, Chong-Gun Kim, Adam Janiak, Intelligent Information and Database Sytsems, Lect Notes Comput Sc, 6592, 302-311, 2011.

14. Alcantud, J.C.R., Santos-Garcia, G., A new criterion for soft set based decisionmaking problems under incomplete information, Int J Comput Int Sys, 10, 394-404, 2017.

15. Kharal, A., Soft approximations and uni-int decision making, The Scientific World J, 2014, 7 sayfa, 2014.

16. Gong, K., Xiao, Z., Zhang, X., The bijective soft set with its operations, Comput Math Appl, 60, 2270-2278, 2010.

17. Xiao, Z., Gong, K., Xia, S., Zou, Y., Exclusive disjunctive soft sets. Comput Math Appl, 59, 2128-2137, 2010.

18. Zhang, X., On interval soft sets with applications, International Journal of Computational Intelligence Systems, 7, 186-196, 2014.

19. Fatimah, F., Rosadi, D., Hakim, R.B.F., Alcantud, J.C.R., Probabilistic soft set and dual probabilistic soft set in decision making, Neural Comput Appl (in pres), doi:10.1007/s00521017-3011-y.

20. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft matrix theory and its decision making, Comput Math Appl 59, 3308-3314, 2010.

21. Vijayabalaji, S., Ramesh, A., Anwe decision making theoryin soft matrices. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 86, 927-939, 2013.

22. Basu, T.M., Mahapatra, N.M., Mondal, S.K., Matrices in soft set theory and their applications in decision making problems, Sout Asian J Math, 2,126-143, 2012.

23. Atagün, A.O., Kamacı, H., Oktay, O., Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, Neural Comput Appl, 29, 445-456, 2018.

24. Herewan, T., Soft set-based decision making for patients suspected influenza-like illness, Int J Mod Phys: Conference Series, 1, 1-5, 2010.

25. Herawan, T., Deries, M.M., Soft decision making for patients suspected influenza, In D. Taniar et al. (Eds.): ICCSA 2010, Part III, Lect Notes Comput Sc, 6018, 405-418, 2010.

26. Donjuma, S., Herewan, T., Ismail, M.A., Chiroma, H., Abubakar, A.I., Zeki, A.M., A.reviev on soft set-based parameter reduction and decision making, IEEE Access, 5, 4671-4689, 2017.

27. Zhan, J., Zhu, K., Reviews on decision making methods based on (fuzzy) soft sets and rough soft stes, J Intell Fuzzy Syts, 29, 1169-1176, 2015.

28. Çetkin, V., Aygünoğlu, A., Aygün, H., A new approach in handling soft decision making problems, J Nonlinear Sci Appl, 9, 231-239, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Aslen Karslı olan ve 1990 yılında Kocaeli ilinin Gebze ilçesinde dünyaya gelen Kader SALTIK, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Fevzi Çakmak İlköğretim Okulu ve Atatürk Lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında bitirmiştir. 2015 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.

2013 yılından bu yana çeşitli kurumlarda matematik ve geometri öğretmenliği yapmıştır. Şu anda ise özel bir kurumda iş hayatına devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Aşağı Nohutlu Mahallesi Öğretmen Vehbi Ulusoy Caddesi Elit Stüdyo

66100 YOZGAT

Telefon: (531) 632 21 26

E-posta: kader-saltik@hotmail.com