T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON METODU İLE BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Mehmet Fatih ATAYOĞLU

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON METODU İLE BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Mehmet Fatih ATAYOĞLU

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312024 numaralı öğrencisi Mehmet Fatih ATAYOĞLU'nun hazırladığı **"Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile bazı lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümü"** başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 04/02/2016 saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY

Üye :Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU (Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12/02/2016 tarih ve 06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12/02/2016

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON METODU İLE LİNEER OLMAYAN BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Mehmet Fatih ATAYOĞLU

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa: 26

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Bu çalışma dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci bölümde diferansiyel denklemlerin temel tanımlarına yer verilmiştir. İkinci bölümde eliptik integrallere değinilmiştir. Üçüncü bölümde Jacobi eliptik fonksiyonları, lineer olmayan dalga denklemlerinin tam periyodik çözümlerini elde etmek amacıyla Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu uygulanmıştır. Dördüncü bölümde ise kısmı diferansiyel denklemle tanımlı lineer olmayan geçişli daralan titreşimli iletim yollarının, çözümü için yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada yeni Jacobi eliptik fonksiyonları açılımları metodu kullanılarak lineer olmayan dalga denklemlerine ait yeni periyodik çözümler elde edilmiştir. Elde edilen çözümler şok dalga çözümler veya tekil dalga çözümler sınır şartlarındadır. Ayrıca bu çalışmada yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunun kullanım alanlarından örnekler sunulmuştur. Çalışmada kullanılan metotlar matematik ve fizik alanlarında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin, uygulanabilir açık ve basit metotlardır.

Anahtar Kelimeler: Jacobi eliptik fonksiyonları, Dalga denklemleri, KdV denklemi.

SOLUTION OF SOME NONLINEAR WAVE EQUATIONS WITH JACOBI ELLIPTIC FUNCTION METHOD

Mehmet Fatih ATAYOĞLU

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2016; Page:26

Thesis Supervisor: Assistant. Professor. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

This thesis consist of four chapters. The first chapter touches on fundemental definition of differantional equation. In the second chapter elliptic integrals is referred. In the third chapter new Jacobi elliptic functions are applied in Jacobi elliptic function expansion method to construct the exact periodic solutions of nonlinear wave equations It is shown that more new periodic solutions can be obtained by this method and more shock wave solutions or solitary wave solutions can be gained at their limit condition. In the last chapter a new Jacobi elliptic function expansion method is used to find the exact solutions of the following nonlinear PDE describing pulse narrowing nonlinear transmission lines. Additionally, the given methods in this thesis are straightforward and concise, can be applicable on nonlinear Partial differantial equation in mathematical physics.

Keywords: Jacobi elliptic functions, Wave equations,KdV equation.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU hocama teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

SEMBOLLER Ve KISALTMALAR LİSTESİ

Δ	**:** Delta
R	**:** Reel sayı sistemi
f	**:** Bir fonksiyon
u(x,t)	**:** Çözüm fonksiyonu
λ	**:** Lamda
ε	**:** Ebsilon
Ω	**:** Omega
ξ	**:** Xi
φ	**:** Phi
σ	**:** Sigma
KdV	**:** Korteweg-de Vries Denklemi
mKdV	**:** Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries Denklemi
KDD	**:** Kismi Diferansiyel Denklem

1.GİRİŞ

Bu çalışmada uygulamalı matematikte önemli yere sahip Jacobi eliptik fonksiyonların yeni bir türünü kullanarak dalga denklemlerinin çözümü incelenmiştir. Matematiksel fizikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler fiziksel bilimlerde ana konuyu oluşturur. Literatürde şu ana kadar bu konuyla ilgili yapılan çalışmalardan yararlanılarak çalışmalar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bulunan çözümler ayrıca bilgisayar programları (Mable, Mathematica) vasıtasıyla grafiksel çözümlerle desteklenmiştir.

1.1. Temel Tanımlar Ve Teoremler

Tanım 1.1.1

x ve y bağımsız değişkenler z bağımlı değişken olmak üzere bir kısmi türevli denklem,

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots.\right) = 0,$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 1.1.2

$u = u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, P ise u ve u' nun her mertebeden kısmı türevlerini içeren bir polinom olmak üzere lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem

$$P\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0$$

şeklindedir [2].

Tanım 1.1.3

Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla \mathrm{U} = 0,$$

denklemine hiperbolik türden dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve t zaman değişkenini göstermektedir. Buna göre 1,2,3- boyutlu dalga denklemleri;

$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0$,

$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0$,

$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0$

şeklinde olup bu denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [3].

Tanım 1.1.4

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \alpha \mathrm{u}^2 \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \beta \frac{\partial^3 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^3} = 0$$

denklemine $mKdV$ denklemi denir.

Teorem 1.1.5

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

diferansiyel denklemini ve $P(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ noktasını ele alalım.

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

fonksiyonları sürekli olsun. Bu durumda P noktasının bir komşuluğunda (1.1) denklemini ve

$$g(a) = b_1, g'(a) = b_2, \dots, g^{(n-1)}(x) = b_n$$

koşulunu sağlayan $y = g(x)$ bir tek çözümü vardır[4].

2.ELİPTİK İNTEGRALLER VE JACOBİ ELİPTİK FONKSİYONLARI

2.1.ELİPTİK İNTEGRALLER

2.1.1. Simgeleme

Eliptik integraller iki değişkenli fonksiyon olup bu değişkenler θ modüler açı ve k eliptik çarpan olarak adlandırılır.
Ayrıca $\emptyset$ genlik olmak üzere çalışma boyunca

$x = sin\emptyset = snu$

$\sqrt{1 - ksin^2\emptyset} = dnu$

gösterimleri kullanılacaktır [5].
Eliptik integrallerin Legendre formları aşağıdaki gibi sıralanır.

2.1.2. Birinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegraller

Bu tür integraller

$$u = F(k, \emptyset) = \int_0^{\emptyset} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} \qquad 0 < k < 1 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.1.3. İkinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral

Bir elipsin yay uzunluğunun hesabında kullanılan bu integraller

$$E(k, \emptyset) = \int_0^{\emptyset} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\; d\theta \qquad 0 < k < 1 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.1.4. Üçüncü Tür Tam Olmayan İntegraller

$n \neq 0$ olmak üzere bu integraller

$$\pi(k, n, \emptyset) = \int_0^{\emptyset} \frac{d\theta}{(1 - n^2 \sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \qquad 0 < k < 1 \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.1.5. Eliptik İntegrallerin Jacobi Formları

Eliptik integrallerin Legendre formlarında $\vartheta = sin\theta$ dönüşümü yapılması halinde

$$F_1(k,x)\int_0^x \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1-\vartheta^2)(1-k^2\vartheta^2)}} \tag{2.4}$$

$$E_1(k,x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2\vartheta^2}{1-\vartheta^2}}\; d\vartheta \tag{2.5}$$

$$\pi\,(k,n,x) = \int_0^x \frac{d\vartheta}{(1+n\vartheta^2)\sqrt{(1-\vartheta^2)(1-k^2\vartheta^2)}} \tag{2.6}$$

elde edilen integraller eliptik integrallerin Jacobi formlarını gösterir [5].

2.1.6. Landen Dönüşümleri

Landen dönüşümleri

$$tg\emptyset = \frac{sin^2\emptyset_1}{k+cos^2\emptyset_2} \quad \text{veya} \quad \mathrm{k}\sin\theta = \sin(2\emptyset_1 - \emptyset) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümleri kullanarak

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\emptyset} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\emptyset}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\emptyset_1} \frac{d\emptyset_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\emptyset_1}} \tag{2.8}$$

olduğu gösterilebilir. (2.8) eşitliği

$$F(k,\emptyset) = \frac{2}{1+k}\,F(k,\emptyset_1) \tag{2.9}$$

şeklinde de yazılabilir.

Ayrıca $k < k_1 < 1$ olduğu görülebilir.. Landen dönüşümünün ardışık uygulanmasıyla $k < k_1 < \cdots < 1$ şeklinde modülü k_n olan bir dizi elde edilir ve $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ olduğu ispatlanabilir.

Böylece

$$F(k,\emptyset) = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3k_4 \ldots.}{k}} \int_0^{\Phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3k_4 \ldots.}{k}}\, tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}) \qquad (2.10)$$

sonucu çıkar.

Buradan $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ $\quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$ ve $\Phi = \lim_{n\to\infty} \emptyset_n$ (2.11)

dır.

2.2. Jacobi Eliptik Fonksiyonları

Karmaşık değişkenli çift periyodik eliptik fonksiyonlar mekanik ve elektroniğin çeşitli dallarında sorunların doğrudan çözümlerinde kullanılır. Lineer olmayan dalga denklemlerinin yeni periyodik çözümlerinin bulunmasında bu tür fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Bu nedenle bu bölümde eliptik fonksiyonlarla ilgili bilgiler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgiler Neville (1951), Milne – Thompson (1956), Jahnke ve Emde (1960), Whittaker ve Watson (1962), Erdelyi (1963), Abramowitz ve Stegun (1972) gibi modern analiz kitaplarında bulunabilir[6].

Ters fonksiyon özelliği taşıyan eliptik fonksiyonlar, Jacobi eliptik integrali ters çevirerek elde edilir.

Eğer $|k| < 1$ ayrıca $|w| < 1$ ise, I. tür eliptik integral aşağıdaki şekildedir.

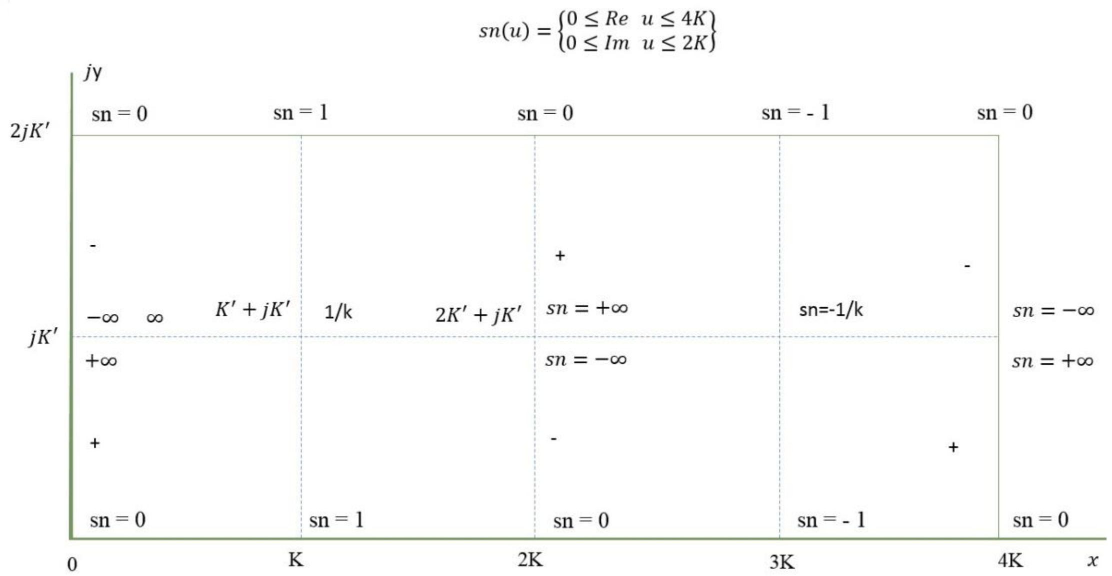
$$u = \int_0^{w} [(1-t^2)(1-k^2t^2]^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

Analitik süreklilikle w' nın tüm değerleri hesaplanabilir. Bu integral, $t = sin\phi$ ve $w = sin\phi$ (ϕ,modül açısı) olduğunda;

$$u(\phi,k) = u = \int_0^{\phi} [(1-k^2sin^2\phi)]^{-\frac{1}{2}}\, d\phi$$

dır. Burada $\phi = amp(u)$ ‘ye amplitüd ve k’ya modül adı verilir ve $0 < k < 1$ arasında değişir. Eğer $k = 0$ ise bu integral $u = sin^{-1}w$ veya $w = \sin u$ ifadesine eşit olur. Eğer $k \neq 0$ ise $w = snu$ veya $snu = sin\phi = sn(u, k)$ dır. snu fonksiyonuna Jacobi eliptik sinüs fonksiyonu adı verilir [6].

Reel periyodu $4K$ ve sanal periyodu $2jK'$ olan bu çift periyodik fonksiyon
$sn(u + 4K) = sn(u)$ ve $sn(u + 2jK') = sn(u)$
fonksiyonlar, Şekil 2.2.1 de görüldüğü gibi kutuplar $(jK', 2K + jK')$ hariç düzlemin her noktasına analitiktirler [6].



Şekil 2.2.1. Jacobi Eliptik sn fonksiyonunun karmaşık ve u düzleminin kafes noktalarındaki değeri

Ayrıca çift periyodik özelliklerinden dolayı,her kafesteki iki sıfır(0) ve iki kutup (X) gerçel ve sanal eksenler boyunca sonsuz defa tekrar eder.

$sn\xi = sn(\xi, m)$, $cn\xi = cn(\xi, m)$ ve $dn\xi = dn(\xi, m)$ sırasıyla Jacobi eliptik sinüs fonksiyonu, Jacobi eliptik kosinüs fonksiyonu ve üçüncüsü de Jacobi eliptik fonksiyon olarak adlandırılır.
Jacobi eliptik fonksiyonlarının gösterimleri ve özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir [7].

(1) $sn\xi = sn(\xi, m),\ cn\xi = cn(\xi, m),\ dn\xi = dn(\xi, m)$

(2) $ns\xi = \frac{1}{sn\xi},\ nc\xi = \frac{1}{nc\xi}\ ,\ nd\xi = \frac{1}{nd\xi}$

(3) $sc\xi = \frac{sn\xi}{cn\xi},\ sd\xi = \frac{sn\xi}{dn\xi}\ ,\ cd\xi = \frac{cn\xi}{dn\xi}$

(4) $cs\xi = \frac{1}{sc\xi},\ ds\xi = \frac{1}{sd\xi}\ ,\ dc\xi = \frac{1}{cd\xi}$

(5) $sn^2\xi + cn^2\xi = 1\ ,\ dn^2\xi + m^2 sn^2\xi = 1\ ,\ m^2(cn^2\xi - 1) = dn^2\xi - 1$

(6) $ns^2\xi - cs^2\xi = 1\ ,\ ns^2\xi - ds^2\xi = m^2,\ ds^2\xi - cs^2\xi = 1 - m^2,$

(7) $nc^2\xi - sc^2\xi = 1\ ,\ dc^2\xi - (1 - m^2)sc^2\xi = 1,\ dc^2\xi(1 - m^2)nc^2\xi = m^2$

(8) $cd^2\xi + (1 - m^2)sd^2\xi = 1\ ,\ nd^2\xi - m^2 sd^2\xi = 1, m^2 cd^2\xi + (1 - m^2)nd^2\xi = 1$

(9) $(sn\xi)' = cn\xi dn\xi\ ,\ (cn\xi)' = -sn\xi dn\xi\ ,\ (dn\xi)' = -m^2 sn\xi cn\xi$

(10) $(ns\xi)' = -cs\xi ds\xi\ ,\ (cs\xi)' = -ns\xi dn\xi\ ,\ (ds\xi)' = -ns\xi cs\xi$

(11) $(sc\xi)' = nc\xi dc\xi\ ,(nc\xi)' = sc\xi dc\xi\ ,\ (dc\xi)' = (1 - m^2)nc\xi sc\xi$

(12) $(sd\xi)' = nd\xi cd\xi\ ,\ (cd\xi)' = (m^2 - 1)sd\xi nd\xi\ ,\ (nd\xi)' = m^2 cd\xi sd\xi$

Jacobi eliptik fonksiyonların m modülü $m \to 0$ ve $m \to 1$ için aşağıdaki trigonometrik fonksiyonlara dönüşür:

$m \to 0$ için $sn\xi \to sin\xi\ , cn\xi \to cos\xi\ ,\ sc\xi \to tan\xi,\ cs\xi \to cot\xi\ , nc\xi \to sec\xi$

$m \to 1$ için $sn\xi \to tanh\xi\ , cn\xi \to sech\xi\ ,\ sc\xi \to sinh\xi,\ cs\xi \to csch\xi\ ,$

$nc\xi \to cosh\xi$

Lineer olmayan problemleri anlamada önemli rolleri olduğu için lineer olmayan denklemlerinin tam çözümlerinin oluşturulması çok emek sarf ettirir. Son zamanlarda homojenlik balans metodu [8-10], hiperbolik tanjant açılım metodu [11-13], trial fonksiyon metodu [14-15],lineer olmayan dönüşüm metodu [16-17] ve sin-cos [18] gibi metotlar önerildi. Birçok tam çözümler elde edilmiştir ama bu metotlar sadece şok ve tek dalga çözümler elde edebilmiş olup lineer olmayan dalga denklemlerinin periyodik çözümlerini elde edememiştir. Porubov [19-21] bazı lineer olmayan dalga denklemlerine bazı tam periyodik çözümler bulmasına rağmen Weierstrass eliptik fonksiyonu kullanmış ve karmaşık sonuçlar ortaya çıkarmıştır. S.K. Liu, Z.T. Fu, S.D. Liu [22] Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunu önermiş ve bu metodu bazı lineer olmayan dalga denklemlerine uygulamıştır. Bazı şok dalga çözümleri ve tekil dalga çözümleri içeren bu metotla sonlu Jacobi sin fonksiyon açılımına dayanan birçok periyodik çözümler elde edilmiştir. Daha sonraki çalışmalar göstermiştir ki farklı Jacobi eliptik fonksiyon açılımları uygulandığında bazı lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümünde yeni periyodik çözümler elde edilebilir. Bu çalışmada, yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılımları ve yeni periyodik çözümler hakkındaki ayrıntılar incelenecektir.

3. JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON AÇILIM METODU

3.1. JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON AÇILIM METODU [23]

Aşağıda verilen lineer olmayan bir dalga denklemini göz önüne alındığında;

$$N\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0, \tag{3.1}$$

Bu denklemin

$$u = u(\xi), \quad \xi = \mathrm{k}(\mathrm{x} - \mathrm{ct}), \tag{3.2}$$

şeklinde dalga çözümleri araştırılacaktır. Burada sırasıyla k ve c dalga sayısı ve dalga hızıdır.

$$\frac{d\xi}{dx} = k\,, \ \frac{d\xi}{dt} = -ck \tag{3.3}$$

[22] de $u(\xi)$, Jacobi eliptik sin fonksiyonunun yani $sn\xi$ nin sonlu bir serisi olarak ifade edilmektedir. Yani keyfi

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, sn^j\, \xi \tag{3.4}$$

alınır ve bunun en yüksek derecesi

$$O\big(u(\xi)\big) = n \tag{3.5}$$

dır.

Dikkat edelim ki; $cn\xi$ ve $dn\xi$ sırasıyla Jacobi eliptik kosinüs fonksiyonu ve üçüncü tip Jacobi eliptik fonksiyon olmak üzere

$$\frac{du}{d\xi} = \sum_{j=0}^{n} j a_j\, \mathrm{sn}^{j-1}\,\xi\, \mathrm{cn}\xi\, \mathrm{dn}\xi \tag{3.6}$$

dır. m $(0 < m < 1)$ modülü ile

$$\mathrm{cn}^2\,\xi = 1 - \mathrm{sn}^2\xi\,, \quad \mathrm{dn}^2\,\xi = 1 - \mathrm{m}^2\mathrm{sn}^2\xi \tag{3.7}$$

dır.

$$\frac{d}{d\xi}\, sn\xi = \mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \qquad \frac{d}{d\xi}\, cn\xi = -\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\, dn\xi = -m^2\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi\mathrm{cn}\xi \tag{3.8}$$

$$cn\xi = \sqrt{1 - sn^2\xi}\,, \quad dn = \sqrt{1 - m^2 sn^2\xi} \tag{3.9}$$

olduğundan $\frac{du}{d\xi}$ en büyük derecesi olarak

$$O\left(\frac{du}{d\xi}\right) = n + 1 \tag{3.10}$$

ve

$$O\left(u\frac{du}{d\xi}\right) = 2n + 1 \quad O\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right) = n + 2, \quad O\left(\frac{d^3u}{d\xi^3}\right) = n + 3 \tag{3.11}$$

alınır.

Böylece (3.1) deki en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi ve en yüksek mertebeden türev terimini balans etmek için (3.4) de n seçilebilir.

$m \to 1$ iken $sn\xi \to tanh\xi$ olduğundan (3.4) aşağıdaki gibi dejenere olur.

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \tanh^j \xi. \tag{3.12}$$

Böylece Jacobi eliptik fonksiyon metoduyla şok dalga veya tekil dalga çözümler de elde edilebilir. Seçilmiş n için bazı lineer olmayan dalga denklemlerine periyodik çözümler ve tekil çözümler bulunabilir. Gerçekten bazı lineer olmayan dalga denklemleri için farklı Jacobi eliptik fonksiyonlara bağlı aynı periyodik çözümler(tekil dalga çözümler içeren) bulabiliriz. [22] deki ayrıntılı sonuçlar göstermiştir ki aynı çözüm farklı Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Fakat bazı diğer lineer olmayan dalga denklemleri için farklı Jacobi eliptik fonksiyonlara bağlı farklı periyodik çözümler ve tekil dalga çözümler elde edilir. Aşağıda $mKdv$ denklemi ve lineer olmayan Klein-Gordon denklemleri için ayrıntılı sonuçlar incelenmiştir.

3.2. Açılım Metodları

3.2.1. mKdV denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{3.13}$$

(3.2) denklemi (3.13) denkleminde yazılırsa

$$-c\frac{du}{d\xi} + \alpha u^2 \frac{du}{d\xi} + \beta k^2 \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0 \tag{3.14}$$

elde edilir.

3.2.2. Jacobi Eliptik Sinüs Fonksiyon Açılımı

(3.13) te en yüksek mertebeli türev terimi ve lineer olmayan terimi balans etmek için (3.5), (3.10) ve (3.11) göz önüne alınarak

$$n = 1 \tag{3.15}$$

elde edilir.

Böylece $sn\xi$ cinsinden (3.13)'ün keyfi bir çözümü

$$u = a_0 + a_1 sn\xi. \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) , (3.14) de yerine yazılarak;

$$[-c+\alpha a_0^2-\beta(1+m^2)k^2]a_1 cn\xi dn\xi + 2\alpha a_0 a_1^2 sn\xi dn\xi$$
$$+(\alpha a_1^2+6\beta m^2k^2)a_1 \,\mathrm{sn}^2\,\xi\; cn\xi dn\xi = 0 \qquad (3.17)$$

elde edilir ve buradan

$$a_0 = 0,\;\; a_1 = \mp\sqrt{-\frac{6\beta}{a}}mk,\;\; c=-\beta(1+m^2)k^2 \qquad (3.18)$$

sonuçları çıkar.

Böylece (3.13) denkleminin periyodik çözümü,

$c>0,\; a>0,\; \beta<0$ veya $c<0,\; a<0,\; \beta>0$

şartları altında

$$u=\mp\sqrt{-\frac{6\beta}{a}}mksn\xi=\mp\sqrt{\frac{6c}{a(1+m^2)}}m\, sn\,\sqrt{-\frac{c}{\beta(1+m^2)}}\,(x-ct), \qquad (3.19)$$

dır. Böylece (3.13)' ün uyumlu şok dalga çözümü ise;

$$u=\mp\sqrt{-\frac{6\beta}{a}}ktanh\,\xi=\mp\sqrt{\frac{3c}{a}}\; tanh\,\sqrt{-\frac{c}{2\beta}}\,(x-ct), \qquad (3.20)$$

dır.

3.2.3. Jacobi Eliptik Kosinüs Açılımı

Jacobi eliptik sinüs fonksiyon açılımından başka lineer olmayan dalga denklemlerinin periyodik çözümlerini oluşturmak için diğer Jacobi eliptik fonksiyon açılımları da uygulanabilir. Keyfi çözüm Jacobi eliptik cosinüs fonksiyonu açılım cinsinden;

$$u(\xi)=\sum_{j=0}^{n} b_j\,\mathrm{cn}^j\,\xi\,. \qquad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. (3.13) de yüksek mertebeli türev terimi ve lineer olmayan terimi ve lineer olmayan terimi balans etmek için $cn\xi$ cinsinden (3.13)'in keyfi çözümünü

$$u=b_0+b_1cn\xi \qquad (3.22)$$

(3.22) denklemini (3.14) te yerine koyarak

$$u=\mp\sqrt{-\frac{6c}{a(2m^2-1)}}mcn\sqrt{\frac{c}{\beta(2m^2-1)}}\,(x-ct), \qquad (3.23)$$

denklemini elde ederiz.

Bu (3.13)'ün diğer bir periyodik çözümüdür. $m\to 1$ iken $cn\xi\to sech\xi$ olduğundan (3.23) aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$u = \mp\sqrt{\frac{6c}{a}}\, sech\sqrt{\frac{c}{\beta}}(x - ct) \tag{3.24}$$

Bu çözüm (3.13)'ün tekil çözümüdür.

3.2.4. Üçüncü Tip Jacobi Eliptik Fonksiyonu Açılımı

Üçüncü tip Jacobi eliptik fonksiyon açılım cinsinden keyfi çözüm

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} c_j \,\mathrm{dn}^j\, \xi\,. \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.13) de yüksek mertebeli türev terimi ve lineer olmayan terimi balans etmek için $dn\xi$ cinsinden (3.13) in keyfi çözümünü

$$u = c_0 + c_1 dn\xi. \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26) denklemini (3.14) denkleminde yerine koyarak

$$u = \mp\sqrt{\frac{6c}{a(2-m^2)}}\, dn\sqrt{\frac{c}{\beta(2-m^2)}}\ (x - ct), \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu (3.13) in diğer bir periyodik çözümüdür. $m \to 1, dn\xi \to sech\xi$ olup böylece (3.27), (3.13) in tekil çözümü olan (3.24) gibi dejenere olur.

3.2.5. Jacobi Eliptik $cs\xi$ Fonksiyon Açılımı

Jacobi eliptik $cs\xi$ fonksiyon açılımı cinsinden keyfi bir çözüm $cs\xi = \frac{cn\xi}{sn\xi}$ olmak üzere

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} d_j \,\mathrm{cs}^j\, \xi\,. \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir. (3.13) de en yüksek mertebeli türev terimi ve lineer olmayan terimi balans etmek için $cs\xi$ cinsinden (3.13) ün keyfi çözümü

$$u = d_0 + d_1 cs\xi. \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29) denklemini (3.14) denkleminde yerine koyarak

$$u = \mp\sqrt{-\frac{6c}{a(2-m^2)}}\, cs\, \sqrt{\frac{c}{\beta(2-m^2)}}\ (x - ct), \tag{3.30}$$

elde edilir ederiz. Bu (3.13)'ün diğer bir periyodik çözümüdür.

$m \to 1$ iken $cs\xi \to csch\xi$ olduğundan (3.30), (3.13)'ün diğer tekil çözümü olan

$$u = \mp\sqrt{-\frac{6c}{a}}\, csch\, \sqrt{\frac{c}{\beta}}\ (x - ct) \tag{3.31}$$

gibi dejenere olur.

3.2.6. Lineer Olmayan Klein- Gordon Denklemi

Aşağıda lineer olmayan Klein - Gordon denklemi incelenmiştir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - \beta u^3 = 0 \tag{3.32}$$

(3.2)denklemi (3.32) denkleminde yerine yazıldığında

$$k^2(c^2 - c_0^2)\frac{d^2 u}{d\xi^2} + au - \beta u^3 = 0 \tag{3.33}$$

sağlanır. (3.33) denkleminin $sn\xi$ cinsinden uyumlu keyfi çözümü (3.16) denklemidir ve tam periyodik çözümü ise

$a > 0,\ \ \beta > 0,\ \ c^2 > c_0^2$ veya $a < 0,\ \ \beta < 0\ ,\ \ c^2 < c_0^2$

şartları sağlanmak üzere

$$u = \mp\sqrt{\frac{2m^2 a}{\beta(1+m^2)}}\, sn\, \sqrt{\frac{a}{(c^2-c_0^2)(1+m^2)}}\ (x - ct) \tag{3.34}$$

olarak elde edilir. (3.33) denkleminin şok dalga çözümü

$$u = \mp\sqrt{-\frac{a}{\beta}}\, tanh\, \sqrt{\frac{a}{2(c^2-c_0^2)}}\ (x - ct) \tag{3.35}$$

dır. (3.33) denkleminin $cn\xi$ cinsinden keyfi çözümü (3.22) denklemidir ve tam periyodik çözümü ise

$$u = \mp\sqrt{\frac{2m^2 a}{\beta(2m^2-1)}}\, cn\, \sqrt{\frac{a}{(c^2-c_0^2)(2m^2-1)}}\ (x - ct) \tag{3.36}$$

şeklindedir. Buna göre (3.33) denkleminin uyumlu tekil dalga çözümü

$$u = \mp\sqrt{\frac{2a}{\beta}}\, sech\, \sqrt{\frac{a}{(c^2-c_0^2)}}\ (x - ct) \tag{3.37}$$

dır. $dn\xi$ cinsinden (3.33) denklemine ait keyfi çözüm (3.26) denklemidir ve tam periyodik çözüm

$$u = \mp\sqrt{\frac{2a}{\beta(2-m^2)}}\, dn\, \sqrt{\frac{a}{(c^2-c_0^2)(2-m^2)}}\ (x - ct) \tag{3.38}$$

ve uyumlu olduğu tekil dalga çözüm ise (3.37) denklemidir.

(3.33) denkleminin $cs\xi$ cinsinden keyfi çözümü (3.29) ve tam periyodik çözümü ise;

$$u = \mp\sqrt{\frac{2a}{\beta(2-m^2)}}\, cs\, \sqrt{\frac{a}{(c^2-c_0^2)(2-m^2)}}\ (x - ct) \tag{3.39}$$

dır. (3.39), (3.33) denkleminin tekil dalga çözümü olan

$$u = \mp\sqrt{-\frac{2a}{\beta}}\, csch\, \sqrt{-\frac{a}{(c^2-c_0^2)}}\ (x - ct) \tag{3.40}$$

gibi dejenere olur.

4. (KDD) TANIMLI LİNEER OLMAYAN GEÇİŞLİ DARALAN TİTREŞİMLİ İLETİM YOLLARININ, ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ JACOBİ ELİPTİK FONKSİYON AÇILIM METODU

4.1.Kısmı Diferansiyel Denklemle Tanımlı Lineer Olmayan Geçişli Daralan Titreşimli İletim Yollarının, Çözümü İçin Yeni Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılım Metodu

Son zamanlarda, kısmı diferansiyel denklemle tanımlı lineer olmayan geçişli daralan titreşimli iletim yollarının, çözümlerin bulunması için birçok metot gösterildi. Bunlardan bazıları tanh-sech, genelleştirilmiş tanh açılım metodu, sine-cosine metodu, homojen balans metodu [24-25], Jacobi eliptik fonksiyon metodu [26-29], F-açılım metodu, üslü fonksiyon açılım metodu, trigonometrik fonksiyon serileri metodu, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu, modifiye edilmiş basit denklem metodu, modifiye edilmiş haritalama medotu, birinci tip integral metodu, katlı, üslü fonksiyon algoritması metodu, dönüşümlü kesirli denklem metodu, Frobenius ayrıştırma tekniği, lokal kesirli varyasyonlu tekrarlama metodu [30], lokal kesirli seri açılım metodu [31] dur.

Bu bölümde, 3. Bölümle bağlantılı olarak bir kısmi diferansiyel denklemle tanımlı lineer olmayan geçişli daralan titreşimli iletim yollarının [31], çözümü için yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunun kullanılmasına değinilmiştir [32].

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{LC_0}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \frac{b_1}{2}\frac{\partial^2 V^2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{12LC_0}\frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} = 0 \qquad (4.1)$$

L, C_0, δ, b_1 sabitlerdir. $V(x,t)$ titreşimin voltajını belirler. (4.1) denkleminin türevlerinin fiziksel şekilleri, ayrıntılı bir şekilde Kirchhoff kanunlarında kullanılır. Bu çalışmada Kirchhoff kanunlarına basit bir şekilde değinilmiştir.

$$V(x,t) = \frac{3(v^2 - v_0^2)}{b_1 v^2} sech^2\left[\frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0}\left(\frac{(x - vt)}{\delta}\right)\right] \qquad (4.2)$$

4.2. Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılım Metodu Tanımı

$V = V(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon P ise V ve en yüksek mertebeden türevleri ve lineer olmayan terimleri içeren V'nin kısmi türevlerinin polinomu olmak üzere

$$P(V, V_x, V_t, V_{xx}, V_{tt}, \dots) = 0 \tag{4.2.1}$$

lineer olmayan kısmi bir diferansiyel denklem göz önüne alalım.

Şimdi Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunun esas adımlarını verelim [33].

1.Adım: Titreşimin yayılım hızı v olmak üzere

$$V(x,t) = V(\xi), \;\; \xi = x - vt \tag{4.2.2}$$

hareket formunda olan titreşimin $V(x,t)$ voltajı verilsin.

$' = d/d\xi H$ ve H ise $V(\xi)$ ve $V'(\xi), V''(\xi), \dots$ türevlerinin polinomu olmak üzere (4.2.1) denklemini, aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgemek için $V(x,t)$ voltajını inceleyelim.

$$H(V, V', V'', \dots) = 0 \tag{4.2.3}$$

2.Adım: (4.2.3) denkleminin çözümünü aşağıdaki şekildeki gibi kabul edelim.

$$V(\xi) = g_0 + \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{z(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right]^{i-1} \left\{ g_i \left(\frac{z(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right) + f_i \left(\frac{1-z^2(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right) \right\} \tag{4.2.4}$$

Buradaki $z(\xi)$,

$$\left(z'(\xi)\right)^2 = a + bz^2(\xi) + cz^4(\xi), \tag{4.2.5}$$

Jacobi eliptik denklemini sağlamaktadır. Ayrıca buradaki

$a, b, c, g_0, g_i, f_i \;\; (i = 1,2, \dots N)$ sabitleri $g_N \neq 0$ veya $f_N \neq 0$ olacak şekilde daha sonradan belirlenecek olan sabitlerdir.

3.Adım: (4.2.3) denklemindeki en yüksek mertebeden türevleri ve lineer olmayan terimleri balans ederek (4.2.4) denklemindeki N pozitif tamsayısını belirleyelim.

4.Adım: (4.2.4) denklemini (4.2.5) denklemi ile beraber (4.2.3) denkleminde yerine koyarak ve $z^i(\xi)$ $(i = 0,1,2, \dots)$ nin bütün katsayılarını düzenleyerek böylece bu katsayıları sıfıra eşitleyerek cebirsel denklem sistemini elde edelim.

5.Adım: Maple veya Mathematica programını kullanarak $v, a, b, c, g_0, g_i, f_i$ değerlerini bulmak için 4. Adımdaki cebirsel denklemi çözelim.

6. Adım : (4.2.5) denkleminin iyi bilinen bir çok çözüm ailesi aşağıdaki gibidir [32].

NO	a	b	c	$z(\xi)$
1	1	$-(1+m^2)$	m^2	$sn\xi$
2	$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$cn\xi$
3	m^2	$-(1+m^2)$	1	$ns\xi = (sn\xi)^{-1}$
4	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$nc\xi = (cn\xi)^{-1}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns\xi \pm cn\xi$ or $\frac{sn\xi}{1\pm cn\xi}$
6	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc\xi \pm sc\xi$ or $\frac{cn\xi}{1\pm sn\xi}$
7	m^2-1	$2-m^2$	-1	$dn\xi$
8	-1	$2-m^2$	m^2-1	$nd\xi = (dn\xi)^{-1}$
9	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$sc\xi = \frac{sn\xi}{cn\xi}$
10	1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$sd\xi = \frac{sn\xi}{dn\xi}$
11	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$cs\xi = \frac{cn\xi}{sn\xi}$
12	$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$ds\xi = \frac{dn\xi}{sn\xi}$
13	$\frac{-(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$mcn\xi \pm dn\xi$
14	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{sn\xi}{cn\xi \pm dn\xi}$

Tablo 4.2: (4.2.5) denkleminin iyi bilinen bir çok çözüm ailesi.

Bu tabloda $sn\xi = sn(\xi,m), cn\xi = cn(\xi,m), dn\xi = dn(\xi,m), ns\xi = ns(\xi,m),$ $cs\xi = cs(\xi,m), ds\xi = ds(\xi,m), sc\xi = sc(\xi,m), sd\xi = sd(\xi,m) \quad 0 < m < 1$ oldugunda Jacobi eliptik fonksiyonunun modülüdür. Bu fonksiyonlar m→1 iken aşağıdaki gibi dejenere olur.

$sn'\xi = cn\xi dn\xi, cn'\xi = sn\xi dn\xi, dn'\xi = -m^2 sn\xi cn\xi, cd' = -(1-m^2)sd\xi nd\xi,$
$ns'\xi = -cs\xi ds\xi, dc'\xi = (1-m^2)nc\xi sc\xi, cn'\xi = sc\xi dc\xi, nd'\xi = m^2 cd\xi sd\xi,$
$sc'\xi = dc\xi nc\xi, cs'\xi = -ns\xi ds\xi, ds'\xi = -cs\xi ns\xi, sd'\xi = nd\xi cd\xi$

7.Adım: 6.adımdaki çözüm (4.2.4) denkleminde yerine konulursa (4.2.1) denkleminin tam çözümü elde edilir.

4.3. Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılım Metodu Kullanarak (4.1) Denkleminin Tam Çözümü [33]

Bu bölümde, 4.2. bölümündeki Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunu (4.1) denkleminin tam çözümünü elde etmek için uygulayacağız. Bu amaçla, (4.1) denklemini iki kere integral alarak aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgemek için (4.2.2) dönüşümünü kullanalım.

$$V''(\xi) + k_1 V(\xi) + k_2 V^2(\xi) = 0 \qquad (4.3.1)$$

Burada

$$k_1 = -\frac{12(v^2 - v_0^2)}{\delta^2 v_0^2}, \qquad k_2 = \frac{6b_1 v^2}{\delta^2 v_0^2} \qquad (4.3.2)$$

dır.

V'' ile V^2 terimleri arasında balans yapıldığında $N = 2$ bulunur ve bundan dolayı (4.2.4) denklemi aşağıdaki şekle indirgenir.

$$V(\xi) = g_0 + g_1\left(\frac{z(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right) + f_1\left(\frac{1-z^2(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right) + g_2\left(\frac{z(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right)^2 + f_2\left(\frac{z(\xi)-z^3(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right) \qquad (4.3.3)$$

Burada $g_0, g_1, g_2, f_1, ve\ f_2$, $g_2 \neq 0\ veya\ f_2 \neq 0$ olacak şekilde belirlenen sabitlerdir.

(4.3.3) denklemini (4.2.5) denklemi ile birlikte (4.3.1) denkleminde yerine koyarak ve $z^{(i)}(\xi)$ $(i = 0,1,\ldots,8)$ nin bütün katsayılarını toplar ve bunları sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklemleri elde ederiz.

$\mathbf{z^8}$: $f_1^2 k_2 + g_0^2 k_2 + 4cf_1 + 2cg_2 - f_1 k_1 + g_0 k_1 - 2f_1 g_0 k_2 = 0$

$\mathbf{z^7}$: $bg_1 - bf_2 + 18cf_2 - 6cg_1 - f_2 k_1 + g_1 k_1 + 2f_1 f_2 k_2 - 2f_1 g_1 k_2 - 2f_2 g_0 k_2 + 2g_0 g_1 k_2 = 0$

$\mathbf{z^6}$: $f_2^2k_2 + 4g_0^2k_2 + g_1^2k_2 + 8bf_1 - 8cf_1 + 4bg_2 - 16cg_2 - 2f_1k_1 + 4g_0k_1 + g_2k_1 - 4f_1g_0k_2 - 2f_1g_2k_2 - 2f_2g_1k_2 + 2g_0g_2k_2 = 0$

$\mathbf{z^5}$: $2ag_1 - 2af_2 + 23bf_2 - 5bg_1 - 28cf_2 - 4cg_1 - f_2k_1 + 3g_1k_1 - 2f_1f_2k_2 - 2f_1g_1k_2 - 2f_2g_0k_2 + 6g_0g_1k_2 - 2f_2g_2k_2 + 2g_1g_2k_2 = 0$

$\mathbf{z^4}$: $6g_0^2k_2 - 2f_2^2k_2 - 2f_1^2k_2 + 2g_1^2k_2 + g_2^2k_2 + 12af_1 + 6ag_2 - 12cf_1 - 16bg_2 + 6cg_2 + 6g_0k_1 + 2g_2k_1 + 4g_0g_2k_2 = 0$

$\mathbf{z^3}$: $28af_2 - 4ag_1 - 23bf_2 - 5bg_1 + 2cf_2 + 2cg_1 + f_2k_1 + 3g_1k_1 - 2f_1f_2k_2 + 2f_1g_1k_2 + 2f_2g_0k_2 + 6g_0g_1k_2 + 2f_2g_2k_2 + 2g_1g_2k_2 = 0$

$\mathbf{z^2}$: $f_2^2k_2 + 4g_0^2k_2 + g_1^2k_2 + 8af_1 - 8bf_1 - 16ag_2 + 4bg_2 + 2f_1k_1 + 4g_0k_1 + g_2k_1 + 4f_1g_0k_2 + 2f_1g_2k_2 + 2f_2g_1k_2 + 2g_0g_2k_2 = 0$

$\mathbf{z}$: $bf_2 - 6ag_1 - 18af_2 + bg_1 + f_2k_1 + g_1k_1 + 2f_1f_2k_2 + 2f_1g_1k_2 + 2f_2g_0k_2 + 2g_0g_1k_2 = 0$

$\mathbf{z^0}$: $f_1^2k_2 + g_0^2k_2 - 4af_1 + 2ag_2 + f_1k_1 + g_0k_1 + 2f_1g_0k_2 = 0$ (4.3.4)

Yukarıdaki (4.3.4) cebirsel denklemleri Mapple veya Matematica programlarıyla çözerek aşağıdaki çözümleri elde ederiz.

$a = c,\ b = b,\ g_0 = \frac{2(6c-b\pm\sqrt{b^2+12c^2}}{k_2},\quad g_1 = 0,\quad g_2 = \frac{24(b-2c)}{k_2},$

$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ k_1 = \mp\frac{4(b^2+12c^2+b\sqrt{b^2+12c^2}}{b+\sqrt{b^2+12c^2}},$ (4.3.5)

(4.3.3) ve (4.3.5) denklemlerinden (4.3.1) denkleminin tam çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$V(\xi) = \frac{2(6c-b\pm\sqrt{b^2+12c^2}}{k_2} + \frac{24(b-2c)}{k_2}\left[\frac{z(\xi)}{1+z^2(\xi)}\right]^2 \qquad (b \neq 2c) \qquad (4.3.6)$$

$a = c$ olduğundan, (4.2) bölümdeki tablodan iki farklı durum elde edilebilir.

1. **Durum**

Eğer

$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1-2m^2}{2},\ c = \frac{1}{4}\ ve\ z(\xi) = ns\xi \pm cs\xi\ veya\ \ z(\xi) = sn\,\xi/(1 \pm cn\xi)$

olursa aşağıdaki Jacobi Eliptik çözümü elde edilir.

$$V(\xi) = \frac{2(1+m^2)\pm\sqrt{(1-2m^2)^2+3}}{k_2} - \ \frac{24m^2}{k_2}\left[\frac{ns\xi\pm cs\xi}{1+(ns\xi\pm cs\xi)^2}\right]^2 \quad (4.3.7)$$

veya,

$$V(\xi) = \frac{2(1+m^2)\pm\sqrt{(1-2m^2)^2+3}}{k_2} - \ \frac{6m^2}{k_2}sn^2\xi \quad (4.3.8)$$

olur

Eğer $m \longrightarrow 1$ ise $k_1 = \mp 4$ olmak üzere

$a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4}$

ve

$z(\xi) = \coth(\xi) \pm cosech(\xi)$ veya $z(\xi) = \frac{\tanh(\xi)}{1\pm sech(\xi)}$

elde edilir. Bu takdirde (4.3.7) ve (4.3.8) sırasıyla aşağıdaki hiperbolik çözümlere indirgenir.

$$V_1(\xi) = \frac{6}{k_2} - \frac{24}{k_2}\left[\frac{\coth(\xi)+cosech(\xi)}{1+(\coth(\xi)+cosech(\xi))^2}\right]^2 \quad (4.3.9)$$

$$V_2(\xi) = \frac{2}{k_2} - \frac{24}{k_2}\left[\frac{\coth(\xi)-cosech(\xi)}{1+(\coth(\xi)-cosech(\xi))^2}\right]^2 \quad (4.3.10)$$

veya

$$V_3(\xi) = \frac{6}{k_2}sech^2(\xi) \quad (4.3.11)$$

$$V_4(\xi) = \frac{2}{k_2} - \frac{6}{k_2}tanh^2(\xi) \quad (4.3.12)$$

2. **Durum**

Eğer

$a = \frac{(1-m^2)}{4}, b = \frac{(1+m^2)}{2},\ c = \frac{(1-m^2)}{4}$ ve

$z(\xi) = nc\xi \pm sc\xi$ veya $z(\xi) = cn\,\xi/(1 \pm sn\xi)$

olursa sırasıyla aşağıdaki Jacobi eliptik çözümler elde ederiz.

$$V(\xi)=\frac{2-4m^2\pm2\sqrt{m^4-m^2+1}}{k_2}+\frac{24m^2}{k_2}\left[\frac{nc\xi\pm sc\xi}{1+(nc\xi\pm sc\xi)^2}\right]^2 \tag{4.3.13}$$

veya

$$V(\xi)=\frac{2-4m^2\pm2\sqrt{m^4-m^2+1}}{k_2}+\frac{6m^2}{k_2}cn^2\xi \tag{4.3.14}$$

Eğer $m\longrightarrow1$ ise $k_1=\mp4$ olmak üzere

$a=0,\ b=1,\ c=0$ ve

$z(\xi)=\cosh(\xi)\pm sinh(\xi)$ veya $z(\xi)=\mathrm{sech}(\xi)/(1\pm tanh(\xi))$

dır. Bu durumda (4.3.13) ve (4.3.14) sırasıyla aşağıdaki hiperbolik çözümlere indirgenir.

$$V_1(\xi)=\frac{24}{k_2}\left[\frac{\cosh(\xi)+sinh(\xi)}{1+(\cosh(\xi)+sinh(\xi))^2}\right]^2 \tag{4.3.15}$$

$$V_2(\xi)=\frac{-4}{k_2}+\frac{24}{k_2}\left[\frac{\cosh(\xi)-sinh(\xi)}{1+(\cosh(\xi)-sinh(\xi))^2}\right]^2 \tag{4.3.16}$$

veya

$$V_3(\xi)=\frac{6}{k_2}sech^2(\xi) \tag{4.3.17}$$

$$V_4(\xi)=\frac{-4}{k_2}+\frac{6}{k_2}sech^2(\xi) \tag{4.3.18}$$

1. **Uyarı:** 1. ve 2. durumlardan $k_1=-4$ olduğunda aşağıdaki çözüme sahip olduğumuzu göstermiş oluruz.

$$V_3(x,t)=\frac{6}{k_2}sech^2(\xi)(x-vt)=\frac{24}{4k_2}sech^2\left[\frac{\sqrt{4}}{2}(x-vt)\right] \tag{4.3.19}$$

(4.3.2) denkleminin yardımıyla aşağıdaki sonucu çıkarırız.

$$V_3(x,t)=\frac{3(v^2-v_0^2)}{b_1v^2}sech^2\left[\left(\frac{\sqrt{3(v^2-v_0^2)}}{v_0}\frac{(x-vt)}{\delta}\right)\right] \tag{4.3.20}$$

Bu [31] den elde edilen iyi bilinen (4.1.2) denklemine denk olacaktır.

2. **Uyarı :** (4.3.1) denklemi direkt metodu kullanarak aşağıdaki gibi çözülebilir.

(4.3.1) denklemini $V'(\xi)$ ile çarparak ve integrasyon sabitini sıfır alıp integral alarak $a = -k_1$ ve $\beta = -2k_2/3$ olmak üzere

$$V'^2(\xi) = \propto V^2(\xi) + \beta V^3(\xi) \tag{4.3.21}$$

elde ederiz. (4.3.2) denklemi yardımıyla çözümü bulmak kolay olur.

$$V(\xi) = -\frac{3k_1}{2k_2} sech^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-k_1}\xi\right) \tag{4.3.22}$$

çözümünü elde etmek kolaydır.

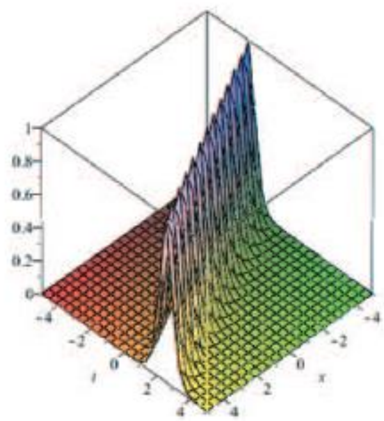
(4.3.2) denklemi yardımıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz [68].

$$V(x,t) = \frac{3(v^2 - v_0^2)}{b_1 v^2} sech^2\left[\frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0}\left(\frac{(x - vt)}{\delta}\right)\right] \tag{4.3.23}$$

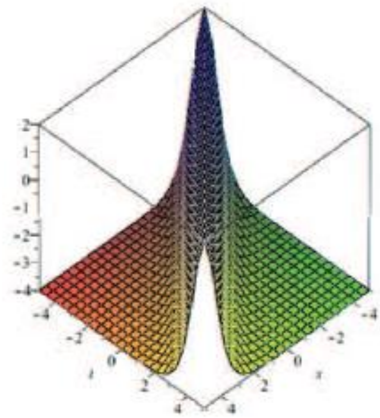
Bu [31] den elde edilen iyi bilinen (4.1.2) denklemine denk olacaktır.

4.4. Elde Edilen Bazı Sonuçların Fiziksel Açıklaması

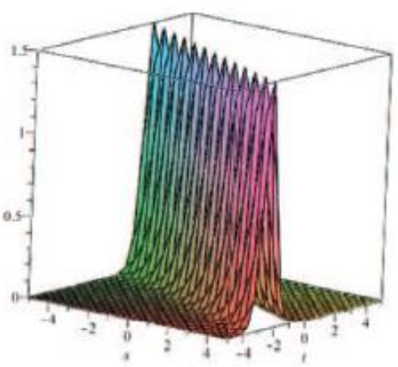
Bu bölümde, (4.3.9), (4.3.12), (4.3.15), (4.3.17) denklemlerinin tam çözümleri bazı grafiklerle gösterildi ve (4.1.1) denkleminin mekanizmasını görselleştirebilmek için bilinmeyen değerlere ilişkili, uygun değerler alınarak inşa edildi. Bu çözümler yanlamasına dalgalı, tekil yanlamasına dalgalı soliton çözümleri, çan şeklinde soliton çözümleri, tekil çan şeklinde soliton çözümleri ve hiperbolik çözümleridir.



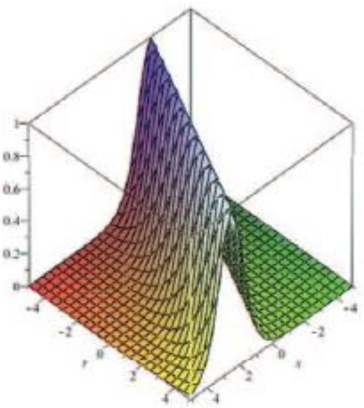
(a) $k_2 = 6, v = 2$ olduğunda (4.3.9) denkleminin grafiği



(b) $k_2 = 1, v = 1$ olduğunda (4.3.12) denkleminin grafiği



(c) $k_2 = 4, v = 2$ olduğunda (4.3.15) denkleminin grafiği



(d) $k_2 = 6, v = \frac{1}{2}$ olduğunda (4.3.17) denkleminin grafiği

5. SONUÇ

Bu çalışmada, farklı Jacobi eliptik fonksiyonlara dayandırılan Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu uygulanarak lineer olmayan kısmı diferensiyel denklemlerin çözümü incelendi. Bu metot 3. Bölümde bazı lineer dalga denklemlerine uygulandı. Farklı Jacobi eliptik fonksiyonlar üzerine kurulan Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ile elde edilen periyodik dalga çözümlerin farklı olabileceği, böylece birçok yeni periyodik, şok dalga veya tekil dalga çözümler elde edilebileceği gösterildi. 4. Bölümde ise yine lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemle tanımlı, lineer olmayan geçişli daralan titreşimli iletim yollarının (4.1.1) çözümü için yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunun kullanımı gösterildi. Yapılan çözümlerde balans metodu uygulandı. Bu çalışmada kullanılan yeni Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu bazı dalga denklemlerinin çözümlerini elde etmek için etkilidir ve matematiksel fizikte diğer lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümünü bulmak için uygulanabilir. Ayrıca bu metot yardımıyla bulunan çözümlerin matematiksel fizikte önemli rol oynadığı şekillerle gösterildi.

KAYNAKLAR

1. Yaşar İ. B., 2005, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara

2. Zayed E.M.E., Alurrfi K.A.E.,Journal of Partial Differential Equations Vol.28, No.2, pp.128-138, June 2015

3. Çakar Ö., 1992, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Döner Sermaye İşletmesi, No:3, Ankara.

4. Erdem, Arzu., Adi Diferansiyel Denklemler Notlari, 2009/2010 Güz dönemi mühendislik notları, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli,25 Ağustos 2009.

5. WEB_1,(2009) https://tr.wikipedia.org/wiki/Eliptik_integral, 12.03.2015, 17.[47]

6. Güngör A.Taktak,, 1989, Infite Impuls Response Digital Elliptic Filters. Muhendislik ve Mimarlık Fakultesi, Dokuz Eylül Üniversitesi Bornova/Izmir

7. El-Sabbagh M. F., Ali A. T., 2006, New generalized Jacobi elliptic function expansion method, Department of Mathematics, Faculty of Science , Minia Universty, Egypt.

8. Wang M.L., Phys. Lett. A 199 (1995) 169.

9. Wang M.L., Y.B. Zhou, Z.B. Li, Phys. Lett. A 216 (1996) 67.

10. Yang L., Zhu Z., Wang Y., Lett. A 260 (1999) 55.

11. Yang L., Liu J., Yang K., Phys. Lett. A 278 (2001) 267.

12. Parkes E.J., Duffy B.R., Phys. Lett. A 229 (1997) 217.

13. Fan E., Phys. Lett. A 277 (2000) 212.

14. Hirota R., J. Math. Phys. 14 (1973) 810.

15. Kudryashov N.A., Phys. Lett. A 147 (1990) 287.

16. Otwinowski M., Paul R., Laidlaw W.G., Phys. Lett. A 128 (1988) 483.

17. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D., Zhao Q., Appl. Math. Mech. 22 (2001) 326.

18. Yan C., Phys. Lett. A 224 (1996) 77.

19. Porubov A. V., Phys. Lett. A 221 (1996) 391.

20. Porubov A. V., Velarde M.G., J. Math. Phys. 40 (1999) 884.

21. Porubov A. V., Parker D. F., Wave Motion 29 (1999) 97.

22. Liu S. K., Fu Z.T., Liu S.D. et al. (2001), submitted.

23. Zuntao Fu., Liu Shikuo., Liu Shida., Zhao Qiang, New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations, Physics Letters A 290 (2001) 72-76.

24. Fan E., Zhang H., A note on the homogeneous balance method. *Phys. Lett.* A 246 (1998),403-406.

25. Wang M. L., Exct solutions for a compound KdV-Burgers equation. *Phys. Lett.* A 213 (1996), 279-287.

26. Dai C. Q., Zhang J. F., Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations. *Chaos Solutions Fractals* 27 (2006), 1042-1049.

27. Fan E., Zhang J., Applications of the Jacobi elliptic functionmethod to special-type nonlinear equations. *Phys. Lett.* A 305 (2002), 383-392.

28. Liu S., Fu Z., Liu S. and Zhao Q., Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Phys. Lett.* A 289 (2001), 69-74.

29. Zhao X. Q., Zhi H. Y., Zhang H. Q., Improved Jacobi-function method with symbolic computation to construct new double-periodic solutions for the generalized Ito system. *Chaos Solitons Fractals* 28 (2006), 112-126.

30. Yang A. M., Yang X. J. and Li Z. B., Local fractional series expansion method for solving wave and diffusion equations on cantor sets. *Abst. Appl. Analy.* 2013 Article ID 351057, 5pages.

31. Afshari E., Hajimiri A., Nonlinear transmission lines for pulse shaping in Silicon. *IEEE J.Solid state circuits* 40 (2005), 744-752.

32. MA H. C., Zhang Z. P. and Deng A. P., A new periodic solution to Jacobi elliptic functions of MKdV equation and BBMequation. *ActaMath. Appl. Sinica* English series, 28 (2012), 409-415.

33. Zayed E.M.E., Alurrfi K.A.E.,Journal of Partial Differential Equations Vol.28, No.2, pp.128-138, June 2015

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Mardin'de doğan Mehmet Fatih ATAYOĞLU, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Cumhuriyet İlkokulu, Hikmet Uluğbay İlkokulu, Mardin Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Siirt Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2011 yılında başarıyla bitirmiştir.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

2011 yılından beri Irak'ın Kerkük kentinde Matematik öğretmeni olarak çalışmakta olan Mehmet Fatih ATAYOĞLU, evli ve 1 çocuk babasıdır.

İletişim Bilgileri

Adres: Özel Kerkük Çağ Erkek Koleji Kerkük/IRAK.

Telefon: (505) 119 05 94

E-posta: m.fatih.atayoglu@fezalar.org