**T.C**
**BOZOK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

# FOURİER SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

**Necip AĞCA**

**Tez Danışmanı**
**Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

**Yozgat 2016**

T.C
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

# FOURİER SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

Necip AĞCA

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2016

T.C.

BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111313010 numaralı öğrencisi Necip AĞCA' nın hazırladığı **''Fourier Serilerinin Hausdorff Toplanabilmesi''** adlı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 04/02/2016 günü saat 11:00 de yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Muammer KULA

Üye: Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY

Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU (Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12/02 2016 tarih ve 06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12/02/2016

**Doç. Dr. Fuat KÖKSAL**
**Müdür**

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**ÖZET………………………………………………………………………..................iii**

**ABSTRACT……………………………………………………………………...….iv**

**TEŞEKKÜR…………………………………………………………………………v**

**SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ…………………………………...vi**

**1. GİRİŞ………………………………………………………………………….…..1**

**2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER……………………………….……3**

**3. FOURİER SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ……….................7**

**4. FOURİER SERİLERİNİN EŞLENİK SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ……………………………………………………….......14**

**5. FOURİER SERİLERİ İLE BU SERİLERİN EŞLENİK SERİLERİNİN EULER TOPLANABİLMESİ …………………………………………….........19**

**SONUÇ……………………………………………………………………..25**

**KAYNAKLAR…………………………………………………….……..26**

**ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………...27**

**FOURİER SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ**

**Necip AĞCA**

**Bozok Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**2016; Sayfa: 27**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

# ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı Fourier serilerinin Hausdorff toplanabilmesini incelemektir.

Birinci bölümde toplanabilme teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde Fourier serilerinin Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi. Bu teoremleri ispatlamak için kullanılan lemmalar verildi. Dördüncü bölümde Fourier serilerinin eşlenik serilerinin Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi. Beşinci bölümde ilk olarak Euler toplanabilme metodunun Fourier-effektif olmadığı gösterildi. Daha sonra Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin Euler toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi.

**Anahtar Kelimeler**: Fourier serisi, Hausdorff toplanabilme, Euler toplanabilme, Sınırlı salınımlılık, Regülerlik, Moment sabiti.

**HAUSDORFF SUMMABILITY OF FOURIER SERIES**

**Necip AĞCA**

**Bozok Universty**
**Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**
**Master of Science Thesis**

**2016; Page: 27**

**Thesis Supervisor: Assistant Professor Doctor Abdullah SONMEZOGLU**

# ABSTRACT

The aim of this study which compose of five parts, is to investigate Hausdorff summability of Fourier series.

In the first chapter, information about the historical development of the theory of summability is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems used in this study are given.

In the third chapter, the proof of a theorem with respect to Hausdorff summablity of Fourier series is investigated. Using lemmas to prove this theorem are given. In the fourth chapter, the proof of a theorem with respect to Hausdorff summablity of conjugate series of Fourier series is investigated.

In the fifth chapter, firstly it is shown that Euler summability method not Fourier-effective. Next, proof of theorems with respect to Euler summablity of Fourier series and its conjugate series are investigated.

**Keywords:** Fourier series, Hausdorff summability, Euler summability, Bounded variation, Regularity, Moment constant.

# TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm danışmanım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, ayrıca Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR, Arş. Gör. Hüseyin KAMACI ve Ali AĞCA' ya teşekkür ederim.

# SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{f}]$ : $f$ fonksiyonunun Fourier serisi

$\{\boldsymbol{s_n}\}$ : Reel veya kompleks sayılar dizisi

$(\boldsymbol{a_{nv}})$ : Satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris

$\boldsymbol{\mu_n}$ : Moment sabiti

$(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\mu})$ : Hausdorff dönüşümü

$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{\alpha})$ : $\alpha$. mertebeden Cesa'ro dönüşümü

$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\alpha})$ : $\alpha$. mertebeden Euler dönüşümü

$\boldsymbol{a_n}$ : Fourier katsayısı

$\boldsymbol{b_n}$ : Fourier katsayısı

$\boldsymbol{\chi}$ : Karakteristik fonksiyon

$\boldsymbol{BV}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ : $[0,1]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı

$\boldsymbol{g_\delta}^+(\boldsymbol{x})$ : $g$ fonksiyonunun $\delta$. mertebeden ileri kesirli integrali

$\boldsymbol{g_\delta}^-(\boldsymbol{x})$ : $g$ fonksiyonunun $\delta$. mertebeden geri kesirli integrali

$\boldsymbol{K_n}(\boldsymbol{t})$ : Dirichlet çekirdeği

$\Delta\boldsymbol{\mu_v} = \boldsymbol{\mu_v} - \boldsymbol{\mu_{v+1}}$ : $\mu_v$ nin simetrik farkı

$\boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{1})$ : $\{s_n\}$ dizisi sınırlı

$\boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{1})$ : $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$ : $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = 1$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^+)$ : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

$\boldsymbol{\Delta^n \mu_v} = \Delta^{n-1}\mu_v - \Delta^{n-1}\mu_{v+1}$

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t}) = \phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s,$$

$\boldsymbol{h(t)} = h_x(t) = \int_0^t \phi(u)du,$

$\boldsymbol{H(t)} = H_x(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du,$

$\boldsymbol{\psi(t)} = \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t),$

$\boldsymbol{G(t)} = G_x(t) = \int_0^t |\psi(u)|\, du,$

$\boldsymbol{g_\delta^+(x)} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^x (x-v)^{\delta-1} g(v)dv, \quad (\delta > 0),$

$\boldsymbol{g_\delta^-(x)} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1} g(v)dv, \quad (\delta > 0)$

# 1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi özel bir yakınsaklık türüdür. Analizde ve uygulamalı matematikte uygulamaları vardır. Serilerin yakınsaklığının incelenmesi çok eski bir bilim dalıdır. Serilerin yakınsaklığı ilk olarak özellikle yakınsaklık problemlerinin göreneksellliğiyle ilgilenen Leonard Euler (1707-1783) döneminde yapıldı ve bu serilerin yakınsak olmaması ya az ilgi gördü veya hiç ilgi görmedi. Aslında bu tip seriler özelikle gözleme dayalı gerçek dünya düşüncesine göre mantıksız olarak algılandı ve bu yüzden birinin bu serileri incelemeyi bırakması akılcı olacaktı.

Euler, $\boldsymbol{f(1)=s}$ ve küçük $\boldsymbol{z}$ değerleri için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $\boldsymbol{f(z)}$değerine yakınsaması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ıraksak serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şekline dönüştüren toplama metodunu geliştirdi. Bu yolla $|z|<1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

yakınsaması vardır. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = [\frac{1}{1+z}]_{z=1} = \frac{1}{2}$ dır. Bununla birlikte $z \neq 1$ için

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

ve

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = \frac{1+z}{1+z+z^2}$$

olduğundan

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

dır ve bunun sonucu olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \left[\frac{1+z}{1+z+z^2}\right]_{z=1} = \frac{2}{3}$$

dır. Bu şekilde birinin Eulerin yorumuyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisine neredeyse herhangi bir değer karşılık getirebileceği görünmektedir.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sonsuz işlemlerin matematik analizinde kullanılması fikrini tanıtmaya yardımcı olmuştur. Binom teoremi erken yaşlarda Gauss tarafından geliştirilmiştir ve bu ona bir kuvvet serisinin bir fonksiyona yakınsaması kavramıyla ilgilenmesine neden oldu. Bu tabiî ki öncelikle matematikçiler tarafından ortaya atılan bazı anlamsız fikirlerin ortadan kaldırdı.

Halen gördüğümüz bu şekildeki anlamsız fikirler bu zamana öncelikli sır olarak terkedilmiştir.

Gauss hayatı boyunca matematik dünyasına başka katkılar da yaptı. Bunların arasında hipergeometrik seriler ve bu şekildeki serilerin yakınsaklığı tartışması olmuştur.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Gauss ve Abel ile birlikte matematik analizine dikkat çekilmesini tanıtmada öncülük etmiştir. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığıyla ilgili fikirlerini şekillendirmiştir. Onun çalışmalarının çoğu günümüzdeki birçok matematiksel aktivite için bir temel oluşturur.

Niels Henrik Abel (1802-1829), 19.yüzyılın ilk zamanında yakınsaklık ve ıraksaklıkla ilgili fikirlere katkı yapan üçüncü öncülerdendi. Onun en önemli teoremi olarak bilinen Abel teoremi günümüzde çokça kullanılır.

Öncelikle Cauchy, Gauss ve Abel'e atfedilen ıraksak serilere olan ilgi 19.yüzyılın ikinci yarısında azaldı. Ama daha sonraki zamanlarda ıraksak serilere olan ilgi arttı. Iraksak serilerin yeniden incelenmesini başlatanların arasında 1890 yılında $(\boldsymbol{C},\mathbf{1})$ yakınsaklık fikrini tanıtan E. Cesa'ro idi. Bu matematikçilere iki sonsuz serinin Cauchy çarpımının yakınsaklığını tartışma gibi imkan verdi. Bu zamandan itibaren birçok matematikçi ıraksak serilerin araştırılmasında kapsamlı çalışmalar yayınladı.

Literatürde öncelikle özel trigonometrik seri olarak bilinen Fourier serileri ile bu serilerin conjugate (eşlenik) serilerinin iyi bilinen toplanabilme metodu olan $(\boldsymbol{C},\mathbf{1})$ toplanabilme metodu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra bu serilerin $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}$ olmak üzere $\boldsymbol{\alpha}.$ mertebeden $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha})$ Cesa'ro toplanabilme metodu ve $\boldsymbol{\alpha}.$ mertebeden $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})$ toplanabilme metodu araştırılmıştır. Her iki toplanabilme metodu da $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\mu})$ Hausdorff metodunun özel şeklidir. Bu çalışmada, Fourier serilerinin ve bu serilerin eşlenik serilerinin $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\mu})$ Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili literatürde yapılan teoremlerin ispatı incelendi. Bu teoremlerin ispatı incelenirken M. Riesz teoreminde ele alınan $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha})$ metodunun metodunun bir özel durumu olduğu görüldü. Ayrıca bu teoremlerin ispatındaki benzer tekniklerle $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\mu})$ metodunun özel durumu olan $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})$ toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı da incelendi.

# 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1:** $\boldsymbol{F}$ reel veya kompleks sayıların kümesi $\boldsymbol{v = 0, 1, 2, \ldots}$ için $\boldsymbol{a_{nv} \in F}$ olmak üzere $\boldsymbol{A = (a_{nv})}$ sonsuz matris ve $\{\boldsymbol{s_n}\}$ dizisi $\boldsymbol{F}$ de bir dizi olsun. $\{\boldsymbol{s_n}\}$ dizisinden $\{\boldsymbol{t_n}\}$ dizisine bir dönüşüm

$$\boldsymbol{t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v} \qquad\qquad (\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots})$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\{t_n\}$ dizisine $\{s_n\}$ dizisinin $A$- dönüşüm dizisi denir. Bu dönüşümün var olabilmesi her $n$ için $\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v$ serisinin yakınsaklığına bağlıdır [1].

**Tanım 2.2:** Bir $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer $A$ matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa $A$ matrisine regüler matris denir [1].

**Teorem 2.3:** Bir $A$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

i) Her $v$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nv} = 0$ ,

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1$,

iii) Her $n$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \le M$ olacak şekilde $n$ den bağımsız bir $M$ pozitif reel sabiti vardır.

Bu teoreme Silvermann-Toeplitz teoremi denir [1].

**Tanım 2.4:** Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olsun. Ayrıca $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisi yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya $\{s_n\}$ dizisinin $\{t_n\}$ dönüşüm dizisi

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v$$

olarak tanımlanmak üzere $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya $\{s_n\}$ dizisine $s$ değerine $A$-limitlenebilir (toplanabilir) denir [1].

**Tanım 2.5:** $\{\mu_n\}$ dizisine karşılık gelen $\{s_n\}$ dizisinin Hausdorff dönüşümü

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v s_v$$

ile tanımlanır [2].

**Tanım 2.6 :** $\{s_n\}$ dizisi verilsin. Her $k = 0,1,2, \ldots$ için $\{S_n{}^k\}$ dizisi

$$S_n{}^0 = s_n\ ,\ S_n{}^k = \sum_{v=0}^{n} S_v{}^{k-1} \qquad (k = 1,2, \dots, n = 0,1,2, \dots)$$

şartlarıyla tanımlansın.

Benzer şekilde $k = 0,1,2, \dots$ için $\{A_n{}^k\}$ dizisi

$$A_n{}^0 = 1\ ,\ A_n{}^k = \sum_{v=0}^{n} A_v{}^{k-1} \qquad (k = 1,2, \dots,\quad n = 0,1,2, \dots)$$

şartlarıyla tanımlansın. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n{}^k}{A_n{}^k} = s$$

ise $\{s_n\}$ dizisine $s$ değerine $k$. mertebeden Cesa'ro aritmetik ortalama ile toplanabilir veya kısaca $s$ değerine $(C, k)$ toplanabilirdir denir [3].

**Tanım 2.7:** $f(x)$ , $(-\pi, \pi)$ aralığında $L$ (Lebesgue anlamında) integrallenebilen $2\pi$ periyotlu periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v cosvx + b_v sinvx) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v\,(x) \qquad (2.1)$$

ile tanımlanır. Ayrıca (2.1) Fourier serisinin eşlenik serisi ise

$$\sum_{v=1}^{\infty} (a_v sinvx - b_v cosvx) \qquad (2.2)$$

ile tanımlanır [3].

**Teorem 2.8:** (Riemann-Lebesgue Teoremi) **:** $f(x)$ , $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx = 0$$

dır [3].

**Teorem 2.9:** (1. Ortalama Değer Teoremi): $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mathrm{f(c)} \int_a^b g(x) dx$$

olacak şekilde en az bir $c \epsilon (a, b)$ vardır.

Bu teoremde özel olarak $g(x) = 1$ alınırsa

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir ki bu iyi bilinen ortalama değer teoremi olur [4].

**Teorem 2.10:** (2. Ortalama Değer Teoremi): $g: [a,b] \to R$ pozitif, monoton olarak azalan bir fonksiyon ve $f: [a,b] \to R$ integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a^+) \int_a^x f(t)dt$$

olacak şekilde $x\epsilon(a,b)$ vardır [4].

**Teorem 2.11**: $G: [a,b] \to R$ monoton ve pozitif bir fonksiyon olsun. $h: [a,b] \to R$ integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b G(t)h(t)dt = G(a^+) \int_a^x h(t)dt + G(b^-) \int_x^b h(t)dt$$

olacak şekilde $x\epsilon(a,b)$ vardır [4].

**Teorem 2.12:** $\{\mu_n\}$ dizisi tarafından üretilen bir Hausdorff dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart $\chi(0) = \chi(0^+) = 0$ , $\chi(1) = 1$ ve $\mu_n = \int_0^1 x^n \, d\chi(x)$ olacak şekilde $[0,1]$ aralığında tanımlı bir $\chi(t)$ sınırlı salınımlı fonksiyonun bulunmasıdır [4].

**Teorem 2.13:** $\mu_n=\int_0^1 x^n d\chi(x)$ moment sabiti olmak üzere

i) $(H,\mu)$ Hausdorf metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $\mu_n$ nin regüler moment sabiti olmasıdır.

ii) $(H,\mu)$ nin yakınsaklığı koruyan dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\mu_n$nin moment sabiti olmasıdır [4].

**Teorem 2.14: (**Fejer Teoremi**):** $f(x_0 \pm 0)$ limitlerinin ( ve her ikisi sonsuz, ikisi de aynı işaretli) var olduğu $x_0$ noktasında $S[f]$ nın $(C,1)$ ortalamasını gösteren

$$\sigma_n(x_0) = \sigma_n(x_0,f) = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2sin\frac{t}{2}} \right\}^2 dt,$$

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

değerine yakınsaktır.

Özel olarak $f$ fonksiyonunun her süreklilik noktasında $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ dır. Süreklilik noktasının her bir kapalı aralığı üzerinde $\sigma_n$ nin yakınsaklığı düzgündür [3].

**Teorem 2.15: (**Lebesgue Teoremi**):**

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \, dt = o(h)$$

olmak üzere her $x$ noktasında $S[f]$ , $f(x)$ değerine $(C,1)$ toplanabilirdir (özel olarak hemen hemen her yerde) [3].

**Teorem 2.16: (**M.Riesz Teoremi**):** $(C,1)$ toplanabilme yerine $\alpha > 0$ için $(C,\alpha)$ toplanabilme alınırsa Fejer ve Lebesgue teoremleri sağlanır [3].

**Teorem 2.17:** Bir $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\theta + b_n sinn\theta)$ Fourier serisinin $\tau_m = \sum c_{mn}s_n$ veya $\tau(x) = \sum c_n(x)s_n$ ile verilen $T$ metoduyla toplanabilmesi

$$K_m(t) = \sum c_{mn} \frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

veya

$$K(x,t) = \sum c_n(x) \frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

çekirdeği (kernel) nin özelliklerine bağlıdır [3].

**Teorem 2.18:** $\int_0^{\pi}|K_n(t)|dt < H$ ise $g_c(t) \to 0$ olması $c$ değerine $T$ toplanabilme için yeter şarttır. Burada $g_c(t) = \frac{1}{2}\{f(\theta+t) + f(\theta-t) - 2c\}$ dır [3].

**Tanım 2.19:** $\int_0^{\pi} t|K_n'(t)|\,dt < H$ sağlanıyorsa $T$ toplanabilme metoduna Fourier - effektiftir denir. $\int_0^{\pi}|K_n(t)|dt < H$ şartı $\int_0^{\pi} t|K_n'(t)|\,dt < H$ sağlanmak üzere gerçekleşir [3].

**Teorem 2.20 :** $|K_n(t)| \le K_n{}^*(t)$ yani $K_n{}^*(t)$ mutlak sürekli ( orjin hariç), $|K_n^*(\pi)| < H$ ve $\int_0^{\pi} t\left|K_n^{*\prime}(t)\right|dt < H$ ise bu durumda $c$ değerine $T$ toplanabilme için $\int_0^{t}|g_c(u)|du = o(t)$ yeter şarttır [3].

**Teorem 2.21:** Özel olarak $T$ regüler $K$ −metodu ise Hardy ve Rogosinzki anlamında yani $T$ regüler ve $\sum n\left|c_{m,n}\right| < \infty$ veya $\sum n|c_n(x)| < \infty$ ise bu takdirde her $m$ veya $x$ için $c$ değerine toplanabilmesi için gerek ve yeter şart $\int_0^{\delta} g_c\,(t)K_m(t)dt \to 0$ veya $\int_0^{\delta} g_c\,(t)K(x,t)dt \to 0$ olmasıdır [3].

# 3. FOURİER SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

Bu bölümü oluşturan esas teoremi ifade etmeden önce teoremin ispatında kullanılacak aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

**Lemma 3.1** : $\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} v\, x^v (1-x)^{n-v} = nx$ dır [5].

**İspat**: $\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} = 1$ olup, türevi alınırsa

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} v x^{v-1} (1-x)^{n-v} - \binom{n}{v} (n-v) x^v (1-x)^{n-v-1} = 0$$

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^{v-1} (1-x)^{n-v-1} [v(1-x) - (n-v)x] = 0$$

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^{v-1} (1-x)^{n-v-1} [v - xv - nx + vx] = 0$$

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^{v-1} (1-x)^{n-v-1} v = n \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v-1}$$

$$\sum_{v=1}^{n} v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} = nx \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}$$

$$\sum_{v=1}^{n} v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} = nx$$

elde edilir.

**Lemma 3.2:** $0 < \delta < 1$ ve $z$ kompleks sayı olmak üzere $|z-1| \leq 1$ olsun. Bu durumda $n$ yeteri derecede büyük olmak üzere $0 \leq x \leq 1$ için düzgün olarak

$$\int_0^x (x-v)^{\delta-1} (1-vz)^n \, dv = O\left(\frac{1}{(n|z|)^\delta}\right)$$

dır [6].

**İspat:** $\int_0^x (x-v)^{\delta-1} (1-vz)^n \, dv = I_1 + I_2$ olsun. Burada $I_2$,

$$max\left(0, x - \frac{1}{n|z|}\right) < v < x$$

aralığına ait integrali göstermektedir ki burada $x \leq \frac{1}{n|z|}$ olduğunda $I_1 = 0$ dır.

$|z-1| \leq 1$ olduğundan $0 \leq v \leq 1$ için $|1 - vz| \leq 1$ olup

$$|I_2| \leq \int_{x-\frac{1}{n|z|}}^{x} (x-v)^{\delta-1} \, dv = O\left(\frac{1}{(n|z|)^\delta}\right)$$

dır.

Eğer $x \leq \frac{1}{n|z|}$ ise bu istenen sonucu yani $I = O\left(\frac{1}{(n|z|)^\delta}\right)$ olduğunu verir.

Eğer $x > \frac{1}{n|z|}$ ise $|z-1| \leq 1$ olduğunu ve kısmi integrasyonu kullanarak

$$I_1 = -\frac{1}{(n+1)z}\left[(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^{n+1}\right]_0^{x-\frac{1}{n|z|}}$$

$$+\frac{(1-\delta)}{(n+1)z}\int_0^{x-\frac{1}{n|z|}}(x-v)^{\delta-2}(1-vz)^{n+1}dv$$

$$= O\left(\frac{1}{(n|z|)^{\delta}}\right)$$

elde edilir ki, bu da $I = O\left(\frac{1}{(n|z|)^{\delta}}\right)$ olduğunu gösterir.

**Teorem 3.3:** $h(t) = o(t)$, $H(t) = O(t)$ ise bu durumda $\sum_{v=0}^{\infty} A_v\,(x)$ serisi $s$ değerine $(C,\alpha)$ $(\alpha > 0)$ toplanabilirdir [3].

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.3 ün in iyi bilinen bir sonucun genellemesi olarak Teorem 3.3 ü özel bir durum olarak içerir. Ayrıca aşağıdaki teoremden başlayarak çalışma boyunca bütün teoremlerde $(H,\mu)$ Hausdorff dönüşümünün regüler olduğu kabul edilecektir.

**Teorem 3.4 :** $h(t) = o(t)$, $H(t) = O(t)$ ise bu takdirde $g(x)$, $[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olmak üzere

$$\chi(x) = g_{1+\delta}^{+}(x) + c \quad (\delta > 0)$$

veya

$$\chi(x) = g_{1+\delta}^{-}(x) + c \quad (\delta > 0) \tag{3.1}$$

ile $\sum_{v=0}^{\infty} A_v\,(x)$ serisi $s$ değerine Hausdorff toplanabilirdir [7].

**İspat:** (1) Fourier serisinin $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisinin Hausdorff dönüşümü $h_n$(x) olsun. O halde

$$s_n(\mathrm{x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k\, sinkx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cosktcoskxdt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sinktsinkxdt)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cosk(t-x)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} coskt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t) + \int_{0}^{\pi} f(x+t)\right]\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} coskt\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} coskt\right]dt$$

yazılabilir. O halde

$$s_n(x)-s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} coskt\right]dt - \frac{2}{\pi}s\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2s]\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} coskt\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} coskt\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}du$$

dır. $\varepsilon$ , $\pi$ den daha küçük bir sabit olsun. Bu durumda bazen

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)\frac{sinnt}{t}dt + o(1)$$

$$s_n(x)-s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\phi(t)\frac{sinnt}{t}dt + o(1)$$

formüllerini kullanmak daha uygun olur. Buna göre

$$s_n(x)-s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u)\frac{sinnu}{u}dt + o(1)$$

olduğundan $A > 1$ keyfi sabit , $n > \frac{A}{\pi}$ ve

$$K_n(u) = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}(\Delta^{n-v}\mu_v)\frac{sinvu}{u}$$

olmak üzere $h_n(x) - s =$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u)\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}(\Delta^{n-v}\mu_v)\frac{sinvu}{u}du + o(1)$ $=$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u)K_n(u)du + o(1)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{A/n}+\int_{A/n}^{\pi}\right)\phi(u)K_n(u)du + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}(I_n{}' + I_n{}'' + I_n{}''') + o(1) \qquad (3.2)$$

yazılabilir.

$0 < \lambda \leq 1$ olduğunda $\frac{sin\lambda u}{u}$, $u$ nun monoton azalan fonksiyonudur. Gerçekten

$0 < \lambda \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ ve $g(u) = \frac{sin\lambda u}{u}$ olmak üzere

$$g'(u) = \frac{\lambda u cos\lambda u - sin\lambda u}{u^2} = \frac{cos\lambda u(\lambda u - tan\lambda u)}{u^2} < 0$$

dır. Çünkü $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ için $\lambda u - tan\lambda u < 0$ dır.

Bu yüzden ortalama değer teoreminden

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\phi(u)g(u)du = g(0^+)\int_0^{\frac{\delta_n}{n}}\phi(u)du = \lambda\int_0^{\frac{\delta_n}{n}}\phi(u)du$$

olacak şekilde $\frac{\delta_n}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \delta_n \in [0,1]$ vardır. O halde

$$I_n{}' = \int_0^{\frac{1}{n}} \phi(u) \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v \frac{sinvu}{u} du$$

$$= \sum_{v=0}^{n} v \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v \int_0^{\frac{\delta_n}{n}} \phi(u) du$$

dır. Kabulden $h(t) = o(t)$ olduğundan

$$\int_0^{\frac{\delta_n}{n}} \phi(u) du = o(\frac{\delta_n}{n}) = o(\frac{1}{n})$$

yazılabilir. Ayrıca $(H, \mu)$ Hausdorff dönüşümünün regülerliğini ve $\chi$ nın sınırlı salınımlı olmasını kullanarak

$$I_n{}' = o\left(\frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{v=0}^{n} v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} d\chi(x)\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{v=0}^{n} v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} |d\chi(x)|\right)$$

dır. Lemma 3.1 den

$$\sum_{v=0}^{n} v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} = nx$$

olduğundan

$$I_n{}' = o\left(\frac{1}{n} \int_0^1 nx |d\chi(x)|\right)$$

$$= o\left(\int_0^1 x |d\chi(x)|\right)$$

yazılabilir. $\chi \epsilon BV[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 |d\chi(x)| < M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. $0 \leq x \leq 1$ ve $\chi \epsilon BV[0,1]$ olmasından

$$I_n{}' = o\left(\int_0^1 x |d\chi(x)|\right)$$

$$= o(1) \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$I_n{}'' = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}} \phi(t) K_n(t) dt$$

integraline kısmi integrasyon metodu uygularsak yani $K_n(t) = u$, $\phi(t)dt = dv$ dersek

$$v = \int_0^t \phi(u) du = h(t)$$

olup $I_n{}'' = [h(t) K_n(t)]_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}} -$

$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}} h(t) \frac{d}{dt} K_n(t) dt$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}|K_n(t)| &= \left|\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\frac{sinvt}{t}\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^1\left|\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}d\chi(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^1|d\chi(x)|\end{aligned}$$

olup $|K_n(t)| \leq \frac{M}{t}$ elde edilir ki bu $K_n(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ anlamına gelir.

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}K_n(t) &= -\frac{d}{dt}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\frac{sinvt}{t} \\ &= -\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\left\{\frac{vtcosvt-sinvt}{t^2}\right\} \\ &= \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\frac{cosvt(-vt+tanvt)}{t^2} \\ &\leq -\frac{1}{t}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v \\ &\leq -\frac{1}{t}\sum_{v=0}^{n}v\binom{n}{v}\int_0^1 x^v(1-x)^{n-v}d\chi(x) \\ &\leq -\frac{1}{t}\int_0^1\sum_{v=0}^{n}v\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}d\chi(x) \\ &\leq -\frac{n}{t}\int_0^1 x|d\chi(x)| \leq -\frac{n}{t}M\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak $I_n{}'' =$

$$\begin{aligned}&\left[o(t)O\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}} o\,(t)O\left(\frac{n}{t}\right)dt \\ &= o\left(\frac{A}{n}\right)O\left(\frac{n}{A}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right)O(n) + o(n)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{A}{n}}dt \\ &= o(1) - o(1) + o(n)\left(\frac{A-1}{n}\right) \\ &= o(1) \qquad (3.4)\end{aligned}$$

elde edilir.

Genelliği bozmaksızın 0$< \delta < 1$ olduğunu kabul edebiliriz.

Eğer $\chi(x)$=$g_{1+\delta}^{+}(x) + c$ ise

$$g_{1+\delta}^{+}(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x(x-v)^{\delta}g(v)dv$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}d\chi(x) &= \chi'(x)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x\delta(x-v)^{\delta-1}g(v)dvdx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x(x-v)^{\delta-1}g(v)dvdx\end{aligned}$$

$$= g_\delta^+(x)dx$$

dır. O halde $K_n(u) =$

$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\int_0^1 x^v\,(1-x)^{n-v}\frac{sinvu}{u}d\chi(x) =$

$\frac{1}{u}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}sinvu\int_0^1 x^v\,(1-x)^{n-v}d\chi(x)$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1 N_n(x,u)\,d\chi(x)$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1 N_n(x,u)\,g_\delta^+(x)dx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1 N_n(x,u)\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-v)^{\delta-1}g(v)\,dvdx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1\int_0^x N_n(x,u)(x-v)^{\delta-1}g(v)\frac{1}{\Gamma(\delta)}dvdx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1\int_0^x N_n(x,u)\,(x-v)^{\delta-1}g(v)\frac{1}{\Gamma(\delta)}dvdx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1\int_v^1 N_n(x,u)\,(x-v)^{\delta-1}g(v)\frac{1}{\Gamma(\delta)}dxdv$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 N_n(v,u)\,(v-x)^{\delta-1}g(x)dvdx$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^1 N^-_{n^\delta}\,(x,u)g(x)dx$$

diyelim. $0 \le x \le 1$ için düzgün olarak

$$N^-_{n^\delta}(x,u) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 (v-x)^{\delta-1}N_n\,(v,u)dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 (v-x)^{\delta-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}v^j(1-v)^{n-j}sinjudv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 (v-x)^{\delta-1}Im\left\{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-v)^{n-j}v^je^{iju}\right\}dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 (v-x)^{\delta-1}Im\big(1-v+ve^{iu}\big)^n\,dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 (v-x)^{\delta-1}Im\{e^{iun}\big(v+(1-v)e^{-iu}\big)^n\}dv$$

$v - x = t$ dönüşümü yapılarak

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{1-x} t^{\delta-1}Im\{e^{iun}\big(x+t+(1-x-t)e^{-iu}\big)^n\}\,dt$$

$1 - x - t = v$ dönüşümü yapılarak

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{1-x}(1-x-v)^{\delta-1}Im\{e^{iun}\big(1-v+ve^{-iu}\big)^n\}\,dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{1-x}(1-x-v)^{\delta-1}\,Im\{e^{iun}(1-vz)^n\}dv$$

elde edilir. $z = 1 - e^{-iu}$ denilirse $|1 - z| = 1$ ve $|1 - e^{-iu}| \sim u \;\; (u \to 0)$

olup Lemma 3.2 den

$$N^{-}_{n^{\delta}}(x,u) = O\left(\frac{1}{n^{\delta}|z|^{\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{u^{\delta}n^{\delta}}\right)$$

yazılabilir. O halde

$$K_n(u) = \frac{1}{u}\int_0^1 O\left(\frac{1}{u^{\delta}n^{\delta}}\right)dx = O\left(\frac{1}{n^{\delta}u^{\delta+1}}\right)$$

olup

$$I_n''' = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{A}{n}}^{\pi} \phi(u)K_n(u)du$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\int_{\frac{A}{n}}^{\pi}\frac{|\phi(u)|du}{u^{1+\delta}}\right)$$

yazılabilir. Kısmi integrasyon metodu kullanarak $|\phi(u)|du = dv$ , $\frac{1}{u^{1+\delta}} = \tilde{u}$ dersek

$$v = \int_0^u |\phi(t)|dt = H(u),\ d\tilde{u} = (-1-\delta)u^{-\delta-2}$$

olacağından

$$I_n''' = O\left\{\frac{1}{n^{\delta}}\left[\frac{H(u)}{u^{1+\delta}}\right]_{\frac{A}{n}}^{\pi} + \frac{1+\delta}{n^{\delta}}\int_{\frac{A}{n}}^{\pi}\frac{H(u)du}{u^{2+\delta}}\right\}$$

dır. Hipotezden $H(t) = O(t)$ olduğunu ele alarak

$$I_n''' = O\left\{\frac{1}{n^{\delta}}\left(\frac{O(1)}{\pi^{\delta}} - \frac{O(1)}{\left(\frac{A}{n}\right)^{\delta}}\right) + \frac{1+\delta}{n^{\delta}}\int_{\frac{A}{n}}^{\pi}\frac{O(1)du}{u^{1+\delta}}\right\}$$

$$= O\left\{\frac{O(1)}{n^{\delta}\left(\frac{A}{n}\right)^{\delta}} + \frac{1+\delta}{n^{\delta}}\int_{\frac{A}{n}}^{\pi}\frac{O(1)du}{u^{1+\delta}}\right\}$$

$$= O\left\{\frac{O(1)}{A^{\delta}} + \frac{1+\delta}{\delta n^{\delta}}O(1)\left[\frac{1}{u^{\delta}}\right]_{\frac{A}{n}}^{\pi}\right\}$$

$$= O\left(A^{-\delta}\right) + O(1)\frac{1}{n^{\delta}}\left(\frac{1}{\pi^{\delta}} - \frac{1}{\left(\frac{A}{n}\right)^{\delta}}\right)$$

$$= O\left(A^{-\delta}\right) \qquad (3.5)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.2) ,(3.3), (3.4) ve (3.5) den

$$h_n(x) - s = O\left(A^{-\delta}\right) + o(1)$$

ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} sup|h_n(x) - s| = O\left(A^{-\delta}\right)$

olup $A$ yeteri derece büyük $(A > 1)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = s$ dır.

Diğer durum olan $\chi(x) = g^{-}_{1+\delta}(x) + c$ olması halinde teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

# 4. FOURİER SERİLERİNİN EŞLENİK SERİLERİNİN HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

Bu bölümü oluşturan teoremin ispatında 3. bölümde kullanılan lemmalardan faydalanılacaktır. Ayrıca kullanılacak ispat tekniği de 3. bölümdeki ispat tekniğine benzer olacaktır.

**Teorem 4.1:** $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$\Psi_x(h) = \int_0^h \psi(u)du = o(h)$$

şartını sağlayan her $x$ noktasında

$$\widetilde{\sigma_n}^{\alpha} - \tilde{f}\left(x, \frac{1}{n}\right) = o(1)$$

dır.

Özel olarak (2.2) serisi hemen hemen her yerde $\tilde{f}(x)$ fonksiyonuna $(C, \alpha)$ toplanabilirdir [3].

Bu teoremin bir genellemesi olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.2:** $G(t) = o(t)$ ise bu durumda (2.2) serisinin $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ kısmı toplamlar dizisinin (3.1) ile tanımlanan $\chi(x)$ ile Hausdorff dönüşümü $\overline{h_n}(x)$ ve

$$\bar{f}(x, h) = -\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \frac{\psi(u)du}{2tan\left(\frac{u}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\alpha}{n}\right) = O(1) \qquad (\alpha > 0)$$

dır [7].

**İspat:**

(2.2) serisinin kısmı toplamlar dizisi $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ olsun.

$$\widetilde{s_n}(x) = \sum_{v=1}^{n}(a_v sinvx - b_v cosvx)$$

$$= \sum_{v=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos vt\; sinvx - \sin vt\; cosvx)dt$$

$$= \sum_{v=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; sinv(t-x)dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{v=1}^{n} sinv(t-x)\,dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sum_{v=1}^{n} sinvu\,du$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{v=1}^{n}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x+u)sinvudu - \int_0^{\pi} f(x+u)sinvu\,du\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\sum_{v=1}^{n} sinvtdt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\sum_{v=1}^{n} sinvtdt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\left[\frac{cos\frac{t}{2}-cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2sin\frac{t}{2}}\right]dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\left[\frac{1-cosnt}{2tan\frac{t}{2}}+\frac{sinnt}{2}\right]dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{sin^2\frac{nt}{2}}{tan\frac{t}{2}}dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\,sinntdt$$

dır. Riemann-Lebesgue teoreminden $b_n = o(1)$ olduğundan

$$\widetilde{s_n}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{sin^2\frac{nt}{2}}{tan\frac{t}{2}}dt + o(1)$$

yazılabilir. $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ dizisinin Hausdorff dönüşümü $\overline{h_n}(x)$ olsun. Hausdorff dönüşümünün regüler olduğu göz önüne alınarak

$$\overline{h_n}(x)-\bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v sin^2\frac{vu}{2}du$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}}du + o(1)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v sin^2\frac{vu}{2}du$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v sin^2\frac{vu}{2}du$$
$$+\ \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v sin^2\frac{vu}{2}du + o(1)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v sin^2\frac{vu}{2}du$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v cosvudu + o(1)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{\psi(u)}{tan\left(\frac{u}{2}\right)}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\, sin^2\frac{vu}{2}du\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{|\psi(u)|}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\frac{v^2u^2}{4}du$$

$$\le \frac{n^2}{4\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{u^2|\psi(u)|}{tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\int_0^1 x^v(1-x)^{n-v}d\chi(x)\,du\ \le$$

$$\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{\frac{u}{2}}{tan\frac{u}{2}}u|\psi(u)|\int_0^1\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}d\chi(x)du \quad \le$$

$K\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|\int_0^1 d\chi(x)du$

$\leq K\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|du$

olup

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{\psi(u)}{tan\left(\frac{u}{2}\right)}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\, sin^2\frac{vu}{2}du = O\left(n^2\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|du\right)$$

dır. O halde $\overline{h_n}(x)-\bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right) = \qquad O\left(n^2\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|du\right)+$

$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v cosvudu + o(1)$

yazılabilir. Kısmi integrasyon metodunu kullanarak

$$\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|du = [uG(u)]_0^{\frac{a}{n}} - \int_0^{\frac{a}{n}} G(u)\,du = \frac{a}{n}G\left(\frac{a}{n}\right) - \int_0^{\frac{a}{n}} o(u)\,du$$

$$= \frac{a}{n}o\left(\frac{a}{n}\right) - o\left(\frac{a^2}{2n^2}\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz ki bu

$$O\left(n^2\int_0^{\frac{a}{n}} u\,|\psi(u)|du\right) = o(1)$$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan

$$L_n(u) = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v cosvu$$

dersek, $(H,\mu)$ metodunun regülerliğinden

$$L_n(u) = \int_0^1\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}cosvu\;\; d\chi(x)$$

$$= \int_0^1 M_n(x,u)\;\; d\chi(x)$$

yazılabilir. İlk olarak $\chi(x) = g_{1+\delta}^{+}(x) + c$ olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$L_n(u) = \int_0^1 M_n(x,u)\;\; g_\delta^{+}(x)dx \qquad =$

$\int_0^1 M_n(x,u)\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-v)^{\delta-1}g(v)dvdx \qquad =$

$\int_0^1\int_v^1\frac{M_n(x,u)}{\Gamma(\delta)}(x-v)^{\delta-1}g(v)dxdv \qquad =$

$\int_0^1\int_x^1\frac{M_n(v,u)}{\Gamma(\delta)}(v-x)^{\delta-1}g(x)dvdx \qquad = \int_0^1\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1 M_n(v,u)\,(v-$

$x)^{\delta-1} g(x) Re\left\{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{v} v^{j}(1-v)^{n-j} e^{iju}\right\} dvdx \qquad =$

$\int_0^1 \frac{g(x)}{\Gamma(\delta)} \int_0^{1-x} M_n(v,u)\,(1-v-x)^{\delta-1} Re\left\{e^{inu}(1-vz)^n\right\} dvdx$

dır [6]. $z = 1 - e^{-iu}$ dersek $|1-z| = 1$ ve $\left|1-e^{-iu}\right| \cong u \quad (u \to 0)$ olduğunu ve Lemma 3.2 den

$$M_{n^\delta}^{-}(x,u) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{1-x} M_n(v,u)\,(1-v-x)^{\delta-1} Re\left\{e^{inu}(1-vz)^n\right\} dv$$
$$= O\left(\frac{1}{(n|z|)^\delta}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{(nu)^\delta}\right)$$

olup $g \in L(0,1)$ olduğunu da göz önünde bulundurarak

$$L_n(u) = \int_0^1 M_{n^\delta}^{-}(x,u)\; g(x)dx$$
$$= O\left(\frac{1}{(nu)^\delta}\right)$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}} L_n(u)du + o(1)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \frac{u\psi(u)}{2utan\frac{u}{2}} L_n(u)du + o(1)$$
$$= O\left(n^{-\delta}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \frac{|\psi(u)|}{u^{1+\delta}} du\right) + o(1)$$

yazılabilir. Kısmi integrasyon metodu kullanılarak

$$\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right) = O\left\{\frac{1}{n^\delta}\left[\frac{G(u)}{u^{1+\delta}}\right]_{\frac{a}{n}}^{\pi} + \frac{1+\delta}{n^\delta}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \frac{G(u)du}{u^{2+\delta}}\right\} + o(1)$$
$$= O\left(a^{-\delta}\right) + o(1)$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} sup\left|\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right)\right| = O\left(a^{-\delta}\right)$$

ve $a$ yeteri derecede büyük seçilerek

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right)\right) = 0$$

elde edilir ki bu

$$\overline{h_n}(x) - \bar{f}\left(x,\frac{a}{n}\right) = o(1)$$

olduğunu gösterir.

Diğer durum olan $\chi(x) = g_{1+\delta}^{-}(x) + c$ olması halinde teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

# 5. FOURİER SERİLERİ İLE BU SERİLERİN EŞLENİK SERİLERİNİN EULER TOPLANABİLMESİ

0< $\alpha < 1$ olmak üzere $\chi(x)$ , $\alpha \leq t \leq 1$ kapalı aralığının karakteristik bir fonksiyonu ise bu durumda $\mu_v=\alpha^v$ ve Hausdorff dönüşümü

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

Euler dönüşümüne indirgenir. Gerçekten

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \, d\chi(x) = \int_0^{\alpha} x^n \, d\chi(x) + \int_{\alpha}^1 x^n d\chi(x)$$

kısmi integrasyonla $\mu_n =$

$[x^n \chi(x)]_0^{\alpha} - n\int_0^{\alpha} x^{n-1} \chi(x)dx + [x^n \chi(x)]_{\alpha}^1 - n\int_{\alpha}^1 x^{n-1}\chi(x)\, dx$ $=$

$\alpha^n \chi(\alpha) - 0 - n\int_0^{\alpha} x^{n-1}\, 0dx + \chi(1) - \alpha^n \chi(\alpha) - n\int_{\alpha}^1 x^{n-1}\, dx$ $=$

$$\begin{aligned} &\alpha^n \chi(\alpha) + 1 - \alpha^n \chi(\alpha) - [x^n]_{\alpha}^1 \\ &= \alpha^n \chi(\alpha) + 1 - \alpha^n \chi(\alpha) - 1 + \alpha^n \\ &= \alpha^n \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Delta^{n-v} \mu_v = \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}$$

dır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \Delta\mu_v &= \mu_v - \mu_{v+1} = \alpha^v - \alpha^{v+1} \\ &= \alpha^v (1-\alpha)\,, \\ \Delta^2 \mu_v &= \Delta\mu_v - \Delta\mu_{v+1} \\ &= \alpha^v (1-\alpha) - \alpha^{v+1}(1-\alpha) \\ &= (1-\alpha)^2 \alpha^v \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \end{aligned}$$

$$\Delta^{n-v} \mu_v = \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v s_v = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

olup bu Hausdorff dönüşümünün Euler dönüşümüne indirgendiğini gösterir. Euler metodunun Fourier effektif olmadığı [4] bilinir.

Gerçekten

$$(E,\alpha) = \left(E, \frac{1}{2}\right)$$

alınırsa

$$K_n(t) = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{\sin\left(v+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{1}{2^n} = \frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

elde edilir. Bu yüzden $\int_0^{\pi} |K_n(t)| dt$ sınırlı olamaz ve bunun sonucu olarak $(E,\alpha)$ Fourier effektif olamaz.

Böyle olmakla beraber aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.1 :** $H(t) = o(t(lnt^{-1})^{-1})$ ise bu durumda $\sum_{v=0}^{\infty} A_v(\mathrm{x})$ serisi $s$ değerine Euler toplanabilirdir [7].

**İspat:** $E_n(x)$, $\{s_n(x)\}$ dizisinin Euler dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} E_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(u)}{u} \left[\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} sinvu\right] du + o(1) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{lnn}{n}} + \int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi}\right) + o(1) \\ &= (I_n' + I_n'' + I_n''')\frac{1}{\pi} + o(1) \end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. $sinvu \leq vu$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{v=1}^{n} v \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} = O(n)$$

olmasından dolayı

$$I_n' = \int_0^{\frac{lnn}{n}} \frac{\phi(u)}{u} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} sinvudu$$

ifadesinden

$$I_n' = O\left(n \int_0^{\frac{lnn}{n}} |\phi(u)|\, du\right)$$

dır. Kabulden $H(t) = o(t(lnt^{-1})^{-1})$ olduğundan

$$I_n' = O\left(no\left(\frac{lnn}{nln\frac{n}{lnn}}\right)\right) = o(1) \tag{5.2}$$

elde edilir.

$$I_n'' = \int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{\phi(u)}{u} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} sinvudu$$

olduğundan

$$I_n'' = O\left(\int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{\phi(u)}{u} du\right)$$

dır. Kısmi integrasyonla

$$I_n'' = O\left\{\left[\frac{H(u)}{u}\right]_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{H(u)}{u^2} du\right\}$$

yazılabilir. Hipotezden $H(t) = o(t(lnt^{-1})^{-1})$ olduğundan

$$\begin{aligned}
I_n'' &= O\left\{\left[o\left(\frac{1}{lnu^{-1}}\right)\right]_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{o\left(\frac{u}{lnu^{-1}}\right)}{u^2} du\right\} \\
&= O\left\{\left[o\left(\frac{1}{ln\frac{\sqrt{n}}{lnn}}\right) - o\left(\frac{1}{ln\frac{n}{lnn}}\right)\right] - \int_{\frac{lnn}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{o(1)}{ulnu} du\right\} \\
&= o(1) + O\left\{o[ln(lnu)]_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\frac{lnn}{n}}\right\} \\
&= o(1) + O\left\{o\left(ln\frac{ln\frac{lnn}{n}}{ln\frac{lnn}{\sqrt{n}}}\right)\right\} \\
&= o(1) + o(1) \\
&= o(1)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

elde edilir.

$$\rho(u) = \sqrt{1 - 4\alpha(1-\alpha)sin^2\frac{u}{2}}$$

$$\theta(u) = arctan\left(\frac{\alpha sinu}{1-\alpha+\alpha cosu}\right)$$

olsun.

$$\begin{aligned}
I_n''' &= \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{\phi(u)}{u} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} sinvudu \\
&= \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{\phi(u)}{u} Im\{1-\alpha+\alpha e^{iu}\}^n du
\end{aligned}$$

dır. Demovre formülünü kullanarak $\left(1-\alpha+\alpha e^{iu}\right)^n =$

$$\sqrt{(1-\alpha+\alpha cosu)^2 + (\alpha sinu)^2}^{\,n} e^{inarctan\left(\frac{\alpha sinu}{1-\alpha+\alpha cosu}\right)} =$$

$$\left[1 - 2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha)\left(1 - 2sin^2\frac{u}{2} + \alpha^2\right)\right]^{\frac{n}{2}} e^{inarctan\left(\frac{\alpha sinu}{1-\alpha+\alpha cosu}\right)}$$

$$= \left[1 - 4\alpha(1-\alpha)sin^2\frac{u}{2}\right]^{\frac{n}{2}} e^{inarctan\left(\frac{\alpha sinu}{1-\alpha+\alpha cosu}\right)} = \rho^n(u)e^{in\theta(u)}$$

yazılabilir. Bu yüzden

$$I_n''' = \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{\phi(u)}{u} \rho^n(u) sinn\theta(u) du$$

dır. O halde bu yüzden $c$ pozitif bir sabit olmak üzere $\rho(u) \leq e^{-cu^2}$ dır. Gerçekten

$$F(t) = 1 - 4\alpha(1-\alpha) sin^2 \frac{t}{2} - e^{-2ct^2}$$

fonksiyonu $[0, u]$ aralığında ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar. Bu durumda $\frac{lnn}{\sqrt{n}} < u < \pi$ olduğunu da göz önüne alarak $\frac{F(u)-F(0)}{u-0} = F'(d)$ olacak şekilde $d \in (0, u)$ vardır. O halde

$$\frac{1-4\alpha(1-\alpha)sin^2\frac{u}{2} - e^{-2cu^2} - 0}{u-0} = -2\alpha(1-\alpha) sind + 2cde^{-2cd^2}$$

$$1 - 4\alpha(1-\alpha) sin^2 \frac{u}{2} - e^{-2cu^2} = u\left[\frac{2cd - 2\alpha(1-\alpha)e^{2cd^2} sind}{e^{2cd^2}}\right]$$

$$1 - 4\alpha(1-\alpha) sin^2 \frac{u}{2} - e^{-2cu^2} < 0$$

$$\rho^2(u) \leq e^{-2cu^2}$$

$$\rho(u) \leq e^{-cu^2}$$

olmasından dolayı

$$|I_n'''| = \left| \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{\phi(u)}{u} \rho^n(u) sinn\theta(u) du \right|$$

$$\leq \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{|\phi(u)| e^{-cnu^2}}{u} du$$

elde edilir. $g(u) = \frac{e^{-cnu^2}}{u}$ monoton azalandır. Gerçekten $\frac{lnn}{\sqrt{n}} < u < \pi$ olmak üzere

$$g'(u) = -\frac{2cnu^2 e^{-cnu^2} + e^{-cnu^2}}{u^2} < 0$$

dır. Buna göre ortalama değer teoreminden

$$|I_n'''| \leq g\left(\frac{lnn^+}{\sqrt{n}}\right) \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\xi_n} |\phi(u)| \, du$$

$$I_n''' = O\left(\frac{\sqrt{n} e^{-cln^2 n}}{lnn}\right) \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\xi_n} |\phi(u)| \, du$$

olacak şekilde $\xi_n \in \left(\frac{lnn}{\sqrt{n}}, \pi\right)$ vardır.

Sonuç olarak $\frac{lnn}{\sqrt{n}} < \xi_n < \pi$ ve $\frac{\sqrt{n} e^{-cln^2 n}}{lnn} = o(1)$ olduğundan

$$I_n''' = O\left(\frac{\sqrt{n} e^{-cln^2 n}}{lnn} o\left(\xi_n \left(ln\xi_n{}^{-1}\right)^{-1}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{n}e^{-cln^2 n}}{lnn} o\left(\frac{\xi_n}{-ln\xi_n}\right)\right) = o(1) \tag{5.4}$$

elde edilir ki bu teoremin ispatını tamamlar.

**Teorem 5.2:** $G(t) = o(t(lnt^{-1})^{-1})$ ise bu durumda $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ dizisinin Euler dönüşümü $\overline{E_n}(x)$ olmak üzere

$$\overline{E_n}(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\alpha}{n}\right) = o(1) \qquad (\alpha > 0)$$

dır [7].

**İspat:**(2.2) serisinin kısmı toplamlar dizisi $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ olmak üzere $\{\widetilde{s_n}(x)\}$ dizisinin Euler dönüşümü $\overline{E_n}(x)$ olsun. Bu durumda

$$\overline{E_n}(x) - \bar{f}\left(x, \frac{a}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}} \frac{\psi(u)}{tan\frac{u}{2}} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} sin^2 \frac{vu}{2} du$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} cosvudu + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{\psi(u)}{2tan\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} cosvudu$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi} \frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} cosvudu$$

$$+O(n^2)\int_0^{\frac{a}{n}} u|\psi(u)|\,du + o(1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{\psi(u)}{2tan\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} cosvudu\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{|\psi(u)|du}{u}$$

olup

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{\psi(u)}{2tan\left(\frac{u}{2}\right)} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} cosvudu = O\left(\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{|\psi(u)|du}{u}\right)$$

dır. Hipotezden $G(t) = o(t(lnt^{-1})^{-1})$ olduğundan

$$O\left(\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{|\psi(u)|du}{u}\right) = O\left(\left[\frac{G(u)}{u}\right]_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{G(u)du}{u^2}\right)$$

$$= O\left(\left[o\left(\frac{1}{lnu^{-1}}\right)\right]_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{o\left(\frac{1}{lnu^{-1}}\right)du}{u^2}\right)$$

$$= O\left(\left[o\left(\frac{1}{ln\frac{\sqrt{n}}{lnn}}\right) - o\left(\frac{1}{ln\frac{n}{a}}\right)\right] - \int_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}} \frac{o(1)du}{ulnu}\right)$$

$$= o(1) + O\left\{o[-ln(lnu)]_{\frac{a}{n}}^{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}\right\}$$

$$= o(1) + O\left\{o\left(ln\frac{ln\frac{a}{n}}{ln\frac{lnn}{\sqrt{n}}}\right)\right\}$$

$$= o(1)$$

elde edilir.

$$\rho(u) = \sqrt{1 - 4\alpha(1-\alpha)sin^2\frac{u}{2}}$$

$$\theta(u) = arctan\left(\frac{\alpha sinu}{1-\alpha+\alpha cosu}\right)$$

olmak üzere, pozitif $c$ sabiti için $\rho(u) \leq e^{-cu^2}$ olduğundan ve ortalama değer teoreminden

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}cosvudu = \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}Re\{1-\alpha+\alpha e^{iu}\}^n$$

$$= \int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\pi}\frac{\psi(u)}{2tan\frac{u}{2}}\rho^n cosn\theta(u)du$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{n}e^{-cln^2n}}{lnn}\int_{\frac{lnn}{\sqrt{n}}}^{\xi_n'}|\psi(u)|du\right)$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{n}e^{-cln^2n}}{lnn}o\left(\frac{\xi_n'}{-ln\xi_n'}\right)\right)$$

$$= o(1)$$

olacak şekilde $\xi_n' \epsilon \left(\frac{lnn}{\sqrt{n}}, \pi\right)$ vardır.

O halde sonuç olarak

$$\overline{E_n}(x) - \bar{f}\left(x, \frac{a}{n}\right) = o(1)$$

elde edilir ki bu teoremin ispatını tamamlar.

# SONUÇ

Bu çalışmada Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin $(H, \mu)$ Hausdorff toplanabilmesi incelendi. Bu metotla ilgili teoremlerin ispatını yapmak için faydalanılan lemmaların ispatı incelendi. Hausdorff metodunun özel durumu olan $(C, \alpha)$ metodu ile ilgili literatürde yapılan teoremlerin sadece ifadesi verildi. Çünkü bu teoremler çalışmanın esas kısmını oluşturan Hausdorff metodunun özel durumlarından oluşmaktadır. Çalışma boyunca kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildikten sonra lemmaların ve teoremlerin ispatında nasıl kullanılacağı tartışıldı. İspatı incelenen teoremlerdeki hipotezlerin ve faydalanılan lemmaların az olmasının teoremlerin niteliğini arttırdığı sonucunu çıkardığı gözlemlendi. Karakteristik fonksiyon üzerinde bulunan sınırlı salınımlı olma şartının kaldırılamayacağı gözlemlendi. Ayrıca Hausdorff metodunun regüler olması şartı altında teoremlerin ispatında önemli rolleri tartışıldı ve bu regülerlik şartının kaldırılması halinde ispatların yapılmasında zorluklar yaşanacağı görüldü. Hausdorff toplanabilme metodu ile Euler toplanabilme metodu arasındaki ilişkide regüler moment sabitinin önemi vurgulandı. Hausdorff metodunun diğer özel durumu olan $(E, \alpha)$ Euler metodunun Fourier-effektif olmadığı gösterildi. Euler metodu Fourier-effektif olmadığı halde Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin Euler toplanabilmesine olanak sağlayan teoremlerin ispatı da incelendi. Sınırlılık, sıfır dizisi ve denklik kavramlarının çalışma boyunca oynamış olduğu önemli rolleri tartışıldı. $\delta$. mertebeden ileri ve geri kesirli integraller ile sınırlı salınımlılık arasındaki ilişki tartışıldı. Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin kısmı toplamlar dizisinin yakınsaklık şartları ve bu dizilerin yeniden düzenlenerek teoremlerin ispatında sağlamış olduğu kolaylıklar gözlemlendi. Çalışma boyunca ortalama değer teoreminin uygulamalarda ve teoremlerin ispatındaki rolünün önemi vurgulandı. Bu çalışmadan yararlanarak belli hipotezlerle literatürde olmayan çalışmaların yapılması mümkün olabilir. Çalışma boyunca ispatları incelenen teoremler ve lemmalardan yararlanarak literatürde olmayan Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı mümkün olabilir.

## KAYNAKLAR


1. Petersen, G. M., Regular matrix transformations, Cambridge, 1966.
2. Hausdorff, F., Summationmethoden und Momentfolgen I., Math. Z., 9, 74-109,1921.
3. Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge, 1959.
4. Hardy, G. H., Divergent series, Oxford, 1949.
5. Widder, D. V., The Laplace Transform", 152, Princeton, 1946.
6. Tripathy, N., On the Absolute Hausdorff summability of Fourier series, J. London Math. Soc., 44, 15- 25, 1969.
7. Kwee, B., The Hausdorff summability of Fourier series, Proc. Amer. Math. Soc, (2), 586-592, 1970.

## ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Yozgat'ta doğan Necip AĞCA ilköğretimini Atatürk ilköğretim okulu lise öğrenimi ise Yozgat Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2008 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2012 yılında tamamlamıştır.

2014 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

**<u>İletişim Bilgileri:</u>**

**Adres:** Tekke Mahallesi Mehmet Akif Caddesi Mehtap Apartmanı B blok 4. kat. No:7 66200 YOZGAT

**Telefon:** 05419522831 / 03542127468

**E-posta:** necip.66.66@hotmail.com