T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TAM ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİ ÜZERİNE

Sibel KEPENEK

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TAM ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİ ÜZERİNE

Sibel KEPENEK

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans 70111314019 numaralı öğrencisi Sibel KEPENEK'ın hazırladığı "**Tam Analitik Fonksiyonlar Teorisi Üzerine**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/12/2016 Cuma günü saat 13:00 'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Jüri Üyesi (Danışman) : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. H. Fulya AKIZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..13./..12...2016 tarih ve 38.. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

..13./.12../2016

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

TAM ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİ ÜZERİNE

Sibel KEPENEK

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa: 113

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu çalışmada tam analitik fonksiyonların teorisinin esasları verildi.Tam fonksiyonlar ve onların özellikleri kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde geniş olarak ele alınmamaktadır. Bu tezde tam fonksiyonların özelliklerine bağlı bazı tanım, teorem ve sonuçlar ele alındı. Kompleks düzlemin her bir noktasında yakınsak olan kuvvet serisiyle ifade olunan ve kompleks düzlemin hiçbir sınırlı bölgesinde singüler (tekil) noktası olmayan analitik fonksiyon tam fonksiyon olarak adlandırılır.

Tam fonksiyonlar teorisinin metotları lineer sistemlerin birçok problemlerinin incelenmesinde, mesela lineer kontrol sistemlerinin birçok kontrol olunabilirlik problemlerinin incelenmesinde geniş olarak uygulanır.

Böylece bu tezde tam analitik fonksiyonlar teorisinin esasları verildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Tam Fonksiyonlar, Wiener-Paley Teoremi, Taylor Serisi.

ABOUT EXACT ANALYTİC FUNCTİON THEORY

Sibel KEPENEK

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2016; Page: 113

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study, the basic of the exact analytic functions theory are given. Exact functions and their features isn't taken place widely in the theory of complex variable functions. In this thesis, some definitions, theorem and its results which belong to the features of exact functions are discussed. The analytic functions which is explained with power series convergent on each points dots of comple plane and has not singular points in any bounded resion of complex plane is named as the exact function.

The methods of the exact functions theory are applied widely in examining the problems of a lot of lineer problems; for example in examining many problems of controlability of lineer control systems.

So, in this thesis the basics of the exact analytic functions theory are given.

Keywords: Analytic Function, Exact Functions, Wiener-Paley Theory, Taylor Series.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR, Öğr. Gör. Dr. Mehmet EKİCİ ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman arkamda duran canım aileme de sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{z = x + iy}$	:	Kompleks değişken
$\boldsymbol{\mathbb{C}}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z})$	:	Tanım kümesi Ω olan kompleks değişkenli fonksiyon
$\boldsymbol{e^z}$	:	Euler fonksiyonu
$\boldsymbol{Argz}$	:	z'nin argumenti
$\boldsymbol{M_f}(\boldsymbol{r})$	:	Tam f(z) fonksiyonunun modülünün maksimum fonksiyonu
$\lvert\boldsymbol{z}\rvert$	:	z karmaşık sayısının modülü $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$

1. GİRİŞ

Bu tezde tam analitik fonksiyonlar teorisinin esasları verildi. Tam analitik fonksiyonlar ve onların özellikleri ele alındı ve fonksiyonların özelliklerine bağlı bazı tanım, teorem ve sonuçlar ele alındı ve incelendi. Kompleks düzlemin her bir noktasında yakınsak olan kuvvet serisiyle ifade olunan ve kompleks düzlemin hiçbir sınırlı bölgesinde singüler (tekil) noktası olmayan analitik fonksiyon tam fonksiyon olarak adlandırılır. Tam fonksiyonlar birçok önemli özelliklere sahiptir. Bu fonksiyonlar polinomların birçok esas özelliklerini sağlamakla, "sonsuz büyük dereceli polinomlar" gibi algılanabilir. Böylece, matematik de ve onun uygulamalarında çok geniş kullanılan, polinomlar, üstel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar (sinüs ve kosinüs) ve başka bu gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlara aittirler.

Tam fonksiyonlar teorisinin sonuçları lineer sistemlerin bir çok problemlerinin incelenmesinde, mesela lineer kontrol sistemlerinin kontrol olunabilirlik probleminin incelenmesinde, kontrol etkeninin inşa edilmesinde, anten teorisinin problemlerinin çözümünde geniş olarak uygulanır.

Bu tezin konusu bu açıdan güncel bir konudur ve bu tezin sonuçları birçok pratik ve teorik problemlerin çözümünde kullanılabilecektir.

Bu tezde önbilgiler olarak kuvvet serileri ele alındı ve kuvvet serilerinin özellikleri gösterildi. Özellikle Lioville Teoremi ve ondan alınan bazı sonuçlar verildi. Transendental Tam Fonksiyonların Artma Hızına Göre Sıralandırılması gösterildi. Tam Fonksiyonların Artma Hızı tanımlandı. Borel Dönüşümü ele alındı. Wiener-Paley Teoremi ele alındı ve ispatlandı. Wiener-Paley Teoreminin genelleştirilmesi gösterildi ve son olarak Weierstrass Formu yazıldı ve ispatlandı.

2.TEMEL BİLGİLER

2.1. Kuvvet Serileri

Kompleks sayılar kümesinde aşağıdaki şekilde tanımlanmış

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c_0)^k \tag{2.1.1}$$

serisini ele alalım. Burada a_k ,k=0,1,2,3, … ve c_0 verilmiş kompleks sayılar, z ise kompleks değişkendir. (2.1.1) şeklindeki serilere kuvvet serileri denir. (2.1.1) kuvvet serisinde her zaman yeni $z-c_0=\rho$ değişkeni dâhil edebildiğimizden bu seride $c_0=0$ olarak (2.1.1) serisini

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^k \tag{2.1.2}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.1.2) şeklinde olan serilerin tüm özelliklerinin (2.1.1) şeklinde olan kuvvet serileri içinde geçerli olduğu açıktır.

Kuvvet serileri kompleks değişkenli fonksiyonel serilerden en basitidir. Sonlu terimli

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k$$

toplamına (2.1.2) kuvvet serisinin kısmı toplamı denir.

(2.1.2) serisinin yakınsak olduğu tüm z noktalar kümesini Ω ile gösterelim. Ω kümesine (2.1.2) serisinin yakınsaklık bölgesi denir.

(2.1.2) serisinin $z\in\Omega$ noktasındaki toplamını S(z) ile gösterelim. S(z) tanım kümesi Ω olan kompleks değişkenli fonksiyondur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^k = S(z) \qquad (z\in\Omega)$$

Bu sonuncu eşitlik tüm $z \in \Omega$ için

$$\lim_{n \to \infty} S_n(z) = S(z)$$

anlamındadır.

(2.1.2) şeklindeki kuvvet serileri için $0 \in \Omega$ olduğundan serilerin yakınsaklık bölgesi boş değildir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.1 (Abel Teoremi). $z_0 \neq 0$ olmakla $z_0 \in \Omega$ olsun. O zaman $S_{|z_0|}(0)$ dairesi Ω kümesinde yerleşir. $0 \leq r \leq |z_0|$ olmakla her bir $S_r(0)$ dairesinde (2.1.2) serisi mutlak ve z- ye göre düzgün yakınsaktır.

İspat: $z_0 \in \Omega$ olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ serisi yakınsaktır. Bu yüzden yakınsak serinin genel terimi olan $a_k z_0^k, k \to \infty$ şartında sıfıra yakınsar, yani

$$\lim_{k \to \infty} a_k z_0^k = 0$$

olur. Böylece, $\{ a_n z_0^n \}$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır, yani öyle M>0 sabiti var ki, her bir n = 0,1,2,… için $|a_n z_0^n| \leq M$ Şimdi $|z| < |z_0|$ olduğunu var sayalım. O zaman

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

dır. Böylece, $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$ olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^k$ serisi geometrik seri olduğundan yakınsaktır. Bu yüzden verilmiş, z için (2.1.2) sersisi de mutlak yakınsaktır. Böylece, $S_{|z_0|}(0) = \{ z : |z| < |z_0| \}$ dairesi Ω yakınsaklık bölgesinde yerleşir. Eğer $|z| \leq r < |z_0|$ olursa, o zaman daha güçlü aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\left| a_n z^n \right| \le \mathrm{M} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \le \mathrm{M} \left(\frac{r}{z_0} \right)^n$$

ve buradan da Weierestrass kriterine esasen (2.1.2) serisinin mutlak yakınsaklığı ve z değişkenine göre S_r (0) dairesinde düzgün yakınsaklığı bulunur.

Şimdi aşağıdaki

$$R = \sup_{z \in \Omega} \left| z \right|$$

formülü ile kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını tanımlayalım.

Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R-nin tanımından ve Abel teoreminden aşağıdaki sonuçlar alınır:

1) Eğer R=0 olursa, $\Omega = \{0\}$ ve bu halde seri tek bir $z = 0$ noktasında yakınsaktır.

2) Eğer $0 < R < +\infty$ olursa, $S_R(0)$ dairesi Ω yakınsaklık bölgesinde yerleşir,yani $S_R(0) \subset \Omega$. $S_R(0)$ dairesinin sınırında kuvvet sersinin yakınsak olduğu ve olmadığı noktalar olabilir.

3) Eğer $R = +\infty$ olursa, o zaman (2.1.2) kuvvet serisi her bir z için yakınsaktır, yani (2.1.2) serisinin yakınsaklık bölgesi Ω tüm kompleks düzlem olur.

$S_R(0)$ dairesine (2.1.2) serisinin yakınsaklık dairesi denir. (2.1.2) serisinin yakınsaklık dairesinin yarıçapı için Cauchy-Hadamart formülü

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left| a_n \right|}}$$

doğrudur. Burada $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} c_n$ işareti c_n dizisinin üst limitini gösterir, yani $\{c_n\}$ dizisinin en sağda yerleşen limit noktasıdır. Özel halde sonlu veya sonsuz $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| a_n \right|} = \ell$ limiti varsa, o zaman $R = \frac{1}{\ell}$ olur.

Bazı hallerde R için aşağıda değerlendirme yapmak faydalı olur.

Aşağıdaki lemma bu amaca ulaşmada yardımcı olabilir.

Lemma 2.1. Varsayalım ki, öyle M>0 ve $\alpha > 0$ sayıları var ki, $|a_n| \le M\alpha^n$ eşitsizliği bir N>0 numarasından başlayarak ve tüm n>N için sağlanır. O zaman (2.1.2) serisinin yakınsaklık yarıçapı için $\frac{1}{\alpha} \le R$ eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemmayı ispatlamak için (2.1.2) serisinin $|z| < \frac{1}{\alpha}$ dairesinde yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

$|z|\alpha = q < 1$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\left|a_n z^n\right| = |a_n|\,|z|^n \le M\alpha^n |z|^n = M\left|(\alpha z)\right|^n = M q^n \quad .$$

dır. Buradan görüyoruz ki, (2.1.2) serisi yakınsak olan seri ile değerlendirilir. Böylece $|z| < \frac{1}{\alpha}$ dairesinde (2.1.2) serisi yakınsaktır. Böylece Lemmayı ispatlamış olduk.

Kuvvet serileri için aşağıdaki teklik teoremi uygulamada çok önemi vardır.

Teorem 2.2. Aşağıdaki iki,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

kuvvet serilerinin $S_R(0)$, R>0 dairesinde birbirlerine eşit olduklarını varsayalım.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{2.1.3}$$

o zaman bu serilerin tüm uygun katsayıları da eşittir: $a_k = b_k$, k=0,1,2,3,… .

İspat. $z = 0 \in S_R(0)$ olduğundan (2.1.3) eşitliğinde z=0 alırsak $a_0 = b_0$ olduğunu buluruz. Böylece, (2.1.3) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-1}$$

eşitliği bulunur. Buradan da $a_1 = b_1$ eşitliğini bulunur. Matematiksel İnduksiyon (tümevarım) yöntemiyle bu serilerin tüm uygun katsayılarının eşit olduklarını buluruz.

2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Taylor serileri

Tanım 2.1. Kompleks değişkenli f(z) fonksiyonu z=0 noktasının bir komşuluğunda yakınsaklık yarıçapı sıfırdan farklı olan bir yakınsak

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \tag{2.2.1}$$

kuvvet serisi şeklinde gösterilebilirse bu fonksiyona z=0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Teorem 2.3. Eğer f(z) fonksiyonu z=0 noktasında analitik ise, o zaman bu fonksiyon (2.2.1) serisinin yakınsaklık dairesi $S_R(0)$ da sürekli fonksiyondur.

İspat. Önce, dikkate alalım ki, $\rho \in (0, R)$ için sayısal

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|\,a_k\,|\,\rho^{k-1}$$

serisi yakınsaktır. Gerçektende, $\delta \in (\rho, R)$ alalım. O zaman $|\,a_k\,|\delta^k \le M$, k=0,1,2,… eşitsizliği sağlanır. (Abel teoreminin ispatına bakılabilir.)

Böylece

$$k\,|\,a_k|\rho^{k-1} = |\,a_k|\delta^k\,\frac{k}{\delta}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{k-1} \le \frac{M}{\delta}k\,q^{k-1},$$

burada $q = \dfrac{\rho}{\delta} < 1$ dikkate alalım ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1}$$

serisi yakınsaktır. Buradan da mukayese teoremine esasen $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|\,a_k\,|\,\rho^{k-1}$

serisinin yakınsaklığını ispatlamış oluruz. Bu serinin toplamını $c_1(\rho)$ ile işaret edelim, yani

$$c_1(\rho)=\sum_{k=1}^{\infty} k|\,a_k\,|\,\rho^{k-1}.$$

Şimdi z=0 noktasında analitik olan $f(z)$ fonksiyonun $S_R(0)$ dairesinde sürekliliğini ispatlayalım. Bunun için $z, z_0 \in S_R(0)$ noktalarını alalım. O zaman.

$$f(z)-f(z_0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(z^k-z_0^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\ldots+z_0^{k-1}\right)(z-z_0)$$

Buradan

$$|\,f(z)-f(z_0)\,|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|\left(|\,z\,|^{k-1}+|\,z\,|^{k-2}.|\,z_0\,|+\ldots+|\,z_0\,|^{k-1}\right)|z-z_0|\le$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|\,k\,\rho^{k-1}\right).\,|z-z_0|$$

veya

$$|\,f(z)-f(z_0)|\le c_1(\rho)|\,z-z_0|$$

Böylece, bu sonuncu eşitsizlikten de $z_0\in S_R(0)$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun sürekli olduğu ispatlanmış oludu.

Sonuç 1. $\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,z^{k-1}$ serisi $S_R(0)$ dairesinde yakınsaktır.

Bu sonucu ispatlamak için önce $\rho\in(\,|\,z\,|,R\,)$ alıp, sonra ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\,a_k\,|\rho^{k-1}$$

serisinin verilmiş serinin mojarant serisi olduğunu kullanarak $\sum_{k=1}^{\infty} k\ a_k\ z^{k-1}$ serisini ve $S_R(0)$ dairesinde yakınsak olduğunu ispatlamış oluruz.

Teorem 2.4. Kompleks değişkenli $f(z)$ fonksiyonu z=0 noktasında analitik olduğunda bu fonksiyon kendi kuvvet serisine açılımının $S_R(0)$ yakınsaklık dairesinde diferansiyellenen fonksiyondur.

İspat. Önce dikkate alalım ki, $\rho \in (0, R)$ sayısı için sayısal

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |\ a_k\ | \rho^{k-2}$$

serisi yakınsaktır. Bu serinin toplamını $C_2(\rho)$ ile gösterelim. Sonra aşağıdaki

$$\frac{\zeta^k - z^k}{\zeta - z} - k\, z^{k-1} = k(k-1)\int_0^1 (1-\theta)\left[(1-\theta)z + \theta\zeta\right]^{k-2} d\theta(\zeta - z) \qquad (z \neq \zeta)$$

formülünü kullanırsak $\zeta, z \in S_\rho(0)$ için buluruz.

$$\left| \frac{\zeta^k - z^k}{\zeta - z} - k\, z^{k-1} \right| \leq k(k-1)\rho^{k-2} |\zeta - z|$$

Şimdi $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1}$=u(z) eşitliğini gösterelim. O zaman aşağıdaki değerlendirmeler yapılır:

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - u(z) \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[\frac{\zeta^k - z^k}{\zeta - z} - k\, z^{k-1} \right] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |\, a_k\, | \rho^{k-2} |\zeta - z| \leq c_2(\rho) |\zeta - z| \qquad .$$

dır. Bu eşitsizlikten $f(z)$ fonksiyonunun $S_R(0)$ dairesinde diferansiyellenen olduğu ve $f'(z)$= u(z) olduğu bulunur.

Sonuç 2. Analitik fonksiyon kendi kuvvet serisine açılımının yakınsaklık dairesinde sonsuz diferansiyellenendir ve keyfi n doğal sayısı için

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty} k.(k-1)....(k-n+1)\,a_k\, z^{k-n}$$

eşitlikleri doğrudur.

Bu teoremin ispatı Teorem 2.2'nin ardışık uygulamasıyla ispatlanır.

Tanım 2.2. f(z) fonksiyonunun z=0 noktasında sonsuz diferansiyellenen olduğunu varsayalım. O zaman

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

şeklindeki seriye f(z) fonksiyonunun Taylor serisi denir. Yukarıda verilmiş özelliklerden alınır ki, eğer f(z) fonksiyonu z=0 noktasında analitikdir, o zaman bu fonksiyonun Taylor serisi kuvvet serilerinin teklik teoremine esasen f(z) fonksiyonunun kuvvet serisine açılımı olur. Yani z=0 noktasında analitik olan fonksiyonun Taylor serisi $S_R(0)$ dairesinde kendisine yakınsak olur.

Son olarak dikkate alalım ki kompleks z değişkenine bağlı f(z) fonksiyonu sürekli diferansiyellenen olduğunda, bu fonksiyon analitik olur. Bu özellik kompleks değişkenli fonksiyonlar için Cauchy integral formülü esasıyla ispatlanır.

2.3 Kuvvet Serisine Açmanın Bazı Yöntemleri

Genelde $0\left|z-a\right|<\rho$ dairesinde diferansiyellenen her bir fonksiyon bu dairede yakınsak olan

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(z-a)^n \tag{2.3.1}$$

şeklinde kuvvet serisine açılır. Burada a_n

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \tag{2.3.2}$$

veya

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad , \qquad \rho_1 < \rho \tag{2.3.3}$$

formülleri ile tanımlanır. Bu kuvvet serisi f(z) fonksiyonunun $z = a$ noktası komşuluğundaki Taylor serisidir.

Elemanter e^z , sinz , cosz, shz, chz fonksiyonlarının z=0 noktasında türevlerini hesaplayarak bu fonksiyonların kompleks düzlemde yakınsak olan aşağıdaki açılımları buluruz:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \tag{2.3.4}$$

$$\text{sinz}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \tag{2.3.5}$$

$$\text{cosz}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \tag{2.3.6}$$

$$\text{shz}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \tag{2.3.7}$$

$$\text{chz}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad . \tag{2.3.8}$$

Aşağıdaki açılımda doğrudur.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad . \tag{2.3.9}$$

Bu sonuncu seri $|z| < 1$ dairesinde yakınsaktır. Dikkate alalım ki , (2.3.1) serisini katsayılarını bulmak için (2.3.3) formülleri kullanılır.Adeta Taylor serisinin katsayılarını bulmak için belli açılımlardan ,mesela (2.3.4)-(2.3.9) formüllerinden ve özel yöntemlerden istifade edilir.

Mesela,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, z^n \qquad , \qquad (|z|<1)$$

açılımı (2.3.9) açılımını diferansiyellemekle alınır.

Burada kuvvet serisine açmanın bazı yöntemlerini gösterelim.

2.3.1. Kuvvet Serileri Üzerinde Aritmetik İşlemler

f(z) ve g(z) fonksiyonlarının $z=a$ noktasında analitik fonksiyonlar olduklarını ve aşağıdaki kuvvet serileriyle gösterildiklerini varsayalım:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.3.10}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n \tag{2.3.11}$$

(2.3.10) ve (2.3.11) serilerinin uygun olarak $|z-a|<R$ ve $|z-a|<R_1$ dairelerinde yakınsak olduklarını varsayalım. O zaman aşağıdaki açılımlar doğrudur:

$$A.f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A.c_n\,(z-a)^n \quad , \quad \text{(A=sbt.)} \tag{2.3.12}$$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n)\ (z-a)^n \tag{2.3.13}$$

$$f(z).g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\, d_{n-k} \right)(z-a)^n \tag{2.3.14}$$

Burada (2.3.12) serisi $|z-a|<R$ dairesinde ama (2.3.13) ve (2.3.14) serileri $|z-a|<\rho,\ \ \rho=\min(R,R_1)$ dairesinde yakınsaktır.

2.3.2. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

g(z) ve h(z) fonksiyonlarının $z=a$ noktasında analitik fonksiyonlar olduklarını ve $h(a)\neq 0$ olduğunu ve bu fonksiyonların $z=a$ noktası komşuluğundaki Taylor serisine açılımlarının belli olduklarını varsayalım:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n \quad , \qquad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-a)^n$$

$f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun $z=a$ noktası komşuluğundaki Taylor serisine açılımının katsayılarını bulalım. Bunun için f(z) fonksiyonunun $z=a$ noktası komşuluğundaki Taylor serisini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$$

Bu açılımda c_n , n=0,1,2,3,…... katsayıları belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için

$$f(z)h(z)=g(z)$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,b_{n-k}\right)(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

eşitliğinde $z-a$ farkının aynı dereceli kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek $c_0, c_1,$ …belirsiz katsayılarını bulmak için aşağıdaki rekkurent eşitlikler buluruz:

$$c_0\,b_n+c_1\,b_{n-1}+\ldots+c_n\,b_0=a_n \quad , \qquad \text{n=0,1,2,…}$$

veya

$$c_n=\frac{a_n}{b_0}-\frac{c_0\,b_n+c_1\,b_{n-1}+\ldots..+c_{n-1}\,b_1}{b_0} \quad , \quad \text{n=0,1,2,3,…}\; c_0=\frac{a_0}{b_0} \quad . \qquad (2.3.15)$$

Dikkate alalım ki, iki kuvvet serisinin orantısını bulmak için g(z) fonksiyonunun kuvvet serisini h(z) fonksiyonunun kuvvet serisine (z-*a*) nın derecelerinin artması sırasıyla yazılmış polinomların bölünmesi yöntemiyle bölmekle de almak olur.

2.3.3. Kuvvet Serilerinin Serileri

$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ fonksiyonlarının her birinin $|z-a|<\rho$ dairesinde analitik olduklarını ve bu fonksiyonlarının $|z-a|<\rho_1,\ \rho_1<\rho$ dairesinde düzgün yakınsak olan

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_n^{(k)}(z-a)^k \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{2.3.16}$$

kuvvet serilerine açıldıklarını varsayalım. Aşağıdaki fonksiyonel

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{2.3.17}$$

serinin $|z-a|\le\rho_1$, $\rho_1<\rho$ dairesinde düzgün yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman Weierstrass teoremi esasında buluruz

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \tag{2.3.18}$$

buradan da

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}\right)(z-a)^k \tag{2.3.19}$$

dır. Böylece, düzgün yakınsak analitik fonksiyonların düzgün yakınsak serilerinin toplamının Taylor serilerinin katsayılarını bulmak için $f_n(z)$ fonksiyonlarının Taylor serisinin aynı indisli katsayılarını toplamakla bulunur.

2.3.4. Seriyi Seride Yazma Yöntemi

Aşağıdaki

$$f(z)=g\left[h(z)\right]$$

karmaşık fonksiyonunu ele alalım. Burada w=h(z) fonksiyonu $|z-a|<R_1$ dairesinde analitiktir g(ω) fonksiyonu ise $|w-b|<R$ dairesinde analitiktir ve h(a)=b şartı sağlanır. g(ω) ve h(z) fonksiyonlarının kuvvet serileri

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (w-b)^n\ , \quad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$$

serileridir. h(z) fonksiyonu $|z-a|<R_1$ dairesinde analitik olduğundan öyle $|z-a|<R_2,\ \ R_2<R_1$ dairesi bulunur ki, $|h(z)-h(a)|<R$ eşitsizliği sağlanır, yani $|w-b|<R$ olur. Weierestrass teoremine esasen f(z) fonksiyonu $|z-a|<R_2$ dairesinde analitik olur. Bu zaman

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k$$

serisinin katsayıları (2.3.18) ve (2.3.19) formülleriyle bulunur. Burada

$$f_n(z)=b_n\,\left[\,h(z)-b\,\right]^n$$

olur, çünkü

$$f(z)\equiv g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(\,w-b\,)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left[\,h(z)-b\right]^n \qquad (2.3.20)$$

dır. Böylece, ele aldığımız f(z)=g(h(z)) fonksiyonunu $z=a$ noktası komşuluğundaki Taylor serisine açmak için ω = h(z) fonksiyonunun $z=a$ noktası komşuluğundaki kuvvet serisini g(ω) fonksiyonunun ω = b noktası komşuluğundaki kuvvet serisinde yerine yazıp (2.3.20) formülündeki işlemleri yapmak gerekir. Alınan seri

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\big(h(z)-b\big)^n=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\big(z-a\big)^k \qquad (2.3.21)$$

serisi $|z-a|<R_2$ dairesinde yakınsak olur. Burada R_2sayısı öyle seçilir ki , $|z-a|<R_2$ olduğunda $|w-b|=|h(z)-b|<R$ eşitsizliği sağlansın.

2.3.5. Kuvvet Serisinin Yeniden Açılımı

Seriyi seride yazmanın özel bir halini ele alalım. Aşağıdaki

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{2.3.22}$$

serisinin $|z-a|<R$ dairesinde yakınsak olduğunu varsayalım. b noktası $|z-a|<R$ dairesinde yerleşen, yani $|b-a|<R$ şartını sağlayan her hangi bir nokta olsun. $z-a$ farkını

$$z-a=(b-a)+(z-b) \tag{2.3.23}$$

şeklinde ifade edelim ve bu ifadeyi (2.3.22) açılımında dikkate alarak yazalım

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left[(z-b)+(b-a)\right]^n \tag{2.3.24}$$

olur. Eğer $|z-b|<\rho$, $\rho=R-|b-a|$,o zaman $|z-a|<R$ eşitsizliği sağlanır. (2.3.24) den aşağıdaki açılımı bulabiliriz ki,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-b)^n \tag{2.3.25}$$

bu açılım $|z-b|<\rho$ dairsinde yakınsak olur.

Bu yöntemle elde edilen (2.3.25) kuvvet serisine (2.3.22) kuvvet serisinin b noktasında yeniden açılımı denir.

3. TAM FONKSİYONLAR

Tanım 3.1. Tüm kompleks düzlemde analitik olan kompleks değişkenli f(z) fonksiyonuna tam fonksiyon denir, yani tüm kompleks z düzleminde yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

kuvvet serisi şeklinde gösterilen f(z) fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Mesela, polinomlar, e^z , sinz, cosz, shz, chz fonksiyonları tam fonksiyonlardır.

Teorem 3.1. f(z) ve g(z) fonksiyonlarının tam fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman f(z)$\pm$g(z), f(z).g(z), f(g(z)) fonksiyonları ve bölen g(z) fonksiyonu tüm kompleks düzlemde sıfırdan farklı olduğunda, yani g(z)$\neq 0$ olduğunda $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu da tam fonksiyonlardır.

Bu teoremin ispatı tam fonksiyonun tanımından ve analitik fonksiyonların Bölüm 2.3 de gösterilmiş özelliklerinden alınır.Bu teoremden istifade ederek $a \neq 1$, $a>0$ olmakla

$$a^z = 1 + \frac{\ln a}{1!} z + \frac{(\ln a)^2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{(\ln a)^n}{n!} z^n + \ldots,$$

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$e^{z^3} = 1 + \frac{z^3}{1!} + \frac{z^6}{2!} + \ldots + \frac{z^{3n}}{n!} + \ldots,$$

$$\frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos\sqrt{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} + \ldots,$$

fonksiyonlarının ve $e^{\sin z}$, e^{e^z}, sin(cosz) ve fonksiyonlarının tam fonksiyonlar oldukları açıkça görülür.

Bu örneklerdeki tam fonksiyonlar ya elemanter (üstel , trigonometrik), ya da elemanter fonksiyonların sade sonlu şekilde kombinasyonlarıdır.Ama keyfi alınmış tam fonksiyonu genelde her zaman elemanter tam fonksiyonların sade sonlu kombinasyonu şeklinde göstermek mümkün değildir. Mesela, aşağıdaki tam fonksiyonlar sonlu sayıda elemanter tam fonksiyonların kombinasyonu şeklinde gösterilemez:

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \ldots + \frac{z^n}{n^n} + \ldots,$$

$$g(z) = \frac{z^2}{(\ln 2)^2} + \frac{z^3}{(\ln 3)^3} + \ldots + \frac{z^n}{(\ln n)^n} + \ldots,$$

$$h(z) = z + \frac{z^2}{2^4} + \frac{z^3}{3^6} + \ldots + \frac{z^n}{n^{2n}} + \ldots$$

Burada (3.1) kuvvet serisinin tüm kompleks düzlemde yakınsak olması için bir gerekli ve yeterli şart verelim.

Teorem 3.2. (3.1) kuvvet serisinin tüm kompleks düzlemde yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \tag{3.2}$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat. Burada biz (3.2) şartının (3.1) serisinin tüm kompleks düzlemde yakınsak olması için yeterli olduğunu gösterelim.

z=0 noktasında (3.1) serisinin yakınsak olduğu açıktır. $z \neq 0$ alalım. (3.2) şartında $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ dizisinin sıfıra yakınsak olduğu denildiğinden $\varepsilon = \dfrac{1}{2|z|}$ alırsak, öyle N numarası bulunur ki, n>N şartını sağlayan her bir n sayısı için

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuncu eşitsizlikten ise n>N için

$$|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da mukayese teoremine göre (3.1) serisinin her bir sonlu $z \neq 0$ noktasında yakınsak olduğu alınır. Serisinin her yerde yakınsak olması için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \qquad (3.3)$$

şartının sağlanması da yeterlidir. Ama (3.3) şartının sağlanması (3.1) serisinin tüm kompleks düzlemde yakınsaması için gerekli değildir. (3.3) şartının (3.1) serisinin tüm kompleks düzlemde yakınsak olması için yeterli şart olduğunu göstermek için (3.1) serisinin bir sonra gelen teriminin önce gelen terime orantısının modülünü alırsak buluruz:

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z| .$$

dır. Burada elbette ki $a \neq 0$ ve $z \neq 0$ olduğu farz edilir. Bu sonuncu eşitliğin her yanından $n \to \infty$ şartında limit alırsak eşitliğin sol yanı (3.3) şartına esasen sıfıra eşit olduğunu buluruz. Kuvvet serilerinin yakınsaklığının Dalembert testine esasen (3.3) şartı sağlandığında (3.1) serisinin her bir sonlu $z \neq 0$ noktasında mutlak yakınsak olduğu bulunur.

Mesela,

$$z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

serisi için

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,a_n\,|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

olduğundan bu seri kompleks düzlemin her bir sonlu z noktasında yakınsaktır.

Aşağıdaki

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

kuvvet serisi için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

olduğundan bu seri kompleks düzlemin her bir sonlu z noktasında yakınsaktır.

3.1. Üstel ve Trigonometrik Tam Fonksiyonların Bazı Özellikleri

e^z , cosz ve sinz üstel ve trigonometrik fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlar tam fonksiyonlardır. w değişkeni kompleks değişken olmak üzere e^z fonksiyonunda z değişkeni yerine iw alalım. O zaman

$$e^{iw}=1+\frac{iw}{1!}-\frac{w^2}{2!}-\frac{iw^3}{3!}+\frac{w^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\ldots.+(-1)^n\,\frac{w^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)+$$

$$+i\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\ldots.+(-1)^n\,\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)=$$

$$=\cos(w)+i\sin(w)$$

bulunur. Böylece,

$$e^{iw} = \cos(w) + i\sin(w) \tag{3.1.1}$$

formülünü bulmuş oluruz. Bu formül üstel (eksponensial) fonksiyonu trigonometrik fonksiyonlarla ifade eden Euler formülüdür.

(3.1.1) formülünde w değişkeni yerine ,-w alsak aşağıdaki formülü

$$e^{-iw} = \cos(w) - i\sin(w) \tag{3.1.2}$$

buluruz. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak ve çıkarsak trigonometrik fonksiyonları üstel fonksiyonlarla bağlayan aşağıdaki Euler formüllerini

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \quad , \quad \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \tag{3.1.3}$$

elde ederiz. Euler formüllerinde görülür ki, tam fonksiyonlar sınıfında kompleks değişkenli üstel ve trigonometrik fonksiyonlar biri birine en yakın özellikli fonksiyonlardır. z_1 ve z_2 kompleks değişkenli e^{z_1} ve e^{z_2} fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonların çarpımı için

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{3.1.4}$$

formülü doğrudur. Bu özellik üstel fonksiyonlar için toplama teoremi olarak adlandırılır. (3.1.4) formülü kuvvet serilerinin çarpımı formülü ile ispatlanabilir. (3.1.4) formülünde

$$z_1 = z \text{ ve } z_2 = -z$$

alırsak

$$e^{z} . e^{-z} = 1 \tag{3.1.5}$$

formülünü buluruz. Bu formülden özel halde e^z fonksiyonunun tüm kompleks düzlemde sıfırdan farklı olduğu alınır. Başka deyişle

$$e^z = 0$$

denkleminin kompleks sayılar kümesinde çözümünün olmadığı görülür.

(3.1.5) formülünden aynı zamanda aşağıdaki formülde

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

yazılır. (3.1.4) formülünde $z_1 = z$ ve $z_2 = 2\pi i$ alırsak buluruz.

$$e^z . e^{2\pi i} = e^{z+2\pi i}$$

Burada Euler formülüne esasen

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

dikkate alırsak buluruz:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{3.1.6}$$

Bu formülde z kompleks değişkendir. (3.1.6) formülünden e^z fonksiyonunun tam sanal $2\pi i$ periodlu periodik fonksiyon olduğu görülmektedir. e^z fonksiyonunun modülünü ve argümentini burada hesaplayalım. Bunun için e^z fonksiyonunda z=x+iy alalım. Burada x ve y reel değişkenlerdir. O zaman

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

dır. Böylece, biz e^z fonksiyonunu

$$e^z = r (\cos\varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrik şekilde yazmış olduk.

Bu yüzden

$$|e^z| = e^x$$

$$Arg(e^z) = y + 2\pi k \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

olduğunu buluruz.

Örnek. $e^{1+i\sqrt{2}}$ ifadesinin modülünü ve argumenti aşağıdaki şekildedir.

$$\left| e^{1+i\sqrt{2}} \right| = e$$

$$Arg\left(e^{1+i\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + 2k\pi, \qquad \text{k}= 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

3.2. Hiç Bir Yerde Sıfıra Dönüşmeyen Tam Fonksiyonun Üstel Şekilde Gösterilişi

f(z) fonksiyonunun kompleks düzlemin hiçbir noktasında sıfıra dönüşmeyen tam fonksiyon olduğunu varsayalım, yani $f(\text{z}) \neq 0$ olsun. Bu yüzden $f'(z)$ fonksiyonu da hiçbir noktada sıfıra dönüşmeyen tam fonksiyondur. Böylece,

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

fonksiyonu da tam fonksiyonun hiçbir noktada sıfıra dönüşmeyen tam fonksiyona bölünmesi gibi bir tam fonksiyondur. h(z) fonksiyonunu 0-dan z ye kadar integrallesek yine bir tam $\varphi(z)$ fonksiyonu bulmuş oluruz: Yani

$$\varphi(z) = \int_0^z h(\zeta)\, d\zeta = \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\delta = \int_0^z d \ln f(\zeta) = \ln \frac{f(z)}{f(0)} + 2k\pi i,$$

$$\text{k}= 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

elde ederiz. Böylece,

$$\ln \frac{f(z)}{f(0)} = \varphi(z) + 2k\pi i, \qquad \text{k}= 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

dır. Buradan ise

$$f(z) = f(0)\, e^{\varphi(z)} = e^{\varphi(z)+\ln f(0)} = e^{g(z)}$$

olduğunu buluruz, burada g(z)=$\varphi(z) + \ln f(0)$ fonksiyonu tam fonksiyondur.

Sonuç olarak biz kompleks düzlemde sıfırı olmayan keyfi bir tam fonksiyonun

$f(z) = e^{g(z)}$ şeklinde yazılabildiğini gösterdik. Bu gösterimde g(z) tam

fonksiyondur.

4. TAM FONKSİYONLARIN ARTMA HIZINA GÖRE SINIFLANDIRILMASI

4.1. Tam Fonksiyonun Modülünün Maksimum Fonksiyonu

Tam $f(z)$ fonksiyonunun artışı hızını karaktirize etmek için onun $|z| \leq$ r dairesinde modülünün maksimumu

$$M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z| = r} |f(z)| \tag{4.1.1}$$

$M_f(r)$ fonksiyonu bazen sadece M(r) ve bazense $M(r;f)$ şeklinde gösterilir. Modülün maksimum prensibinden $M_f(r)$ fonksiyonu r argumentinin artmasıyla onun r-ye bağlı olarak monoton artan fonksiyon olduğu görülür. $M_f(r)$ fonksiyonunun artış hızı tam fonksiyonun davranışını karektirize etmek için en önemli karakteristiğidir (göstericidir). Ama genelde $M_f(r)$ fonksiyonunun hesaplanması en basit tam fonksiyonlar için bile çok büyük zorluklarla karşılaşılmaktadır. Buna bakmayarak bir çok haller de $M_f(r)$ fonksiyonu açık şekilde hesaplanamadığından bu fonksiyonu alttan ve üstden değerlendirmek yeterli olur. Burada n mertebeli ($n \geq 1$)

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad a_n \neq 0$$

polinomunun M(r) fonksiyonunun alttan ve üstten değerlendirilmesini gösterelim.

Bunun için önce $P_n(z)$ polinomunun modülünü merkezi koordinat başlangıcında yarıçapı r olan $|z| \leq r$ kapalı $\overline{S}_r(0)$ dairesinde değerlendirelim:

$$|P_n(z)| = |a_0 + a_1 z + \ldots. + a_n z^n|$$

$$\leq |a_0| + |a_1|.|z| + \ldots + |a_n|.|z|^n \leq |a_0| + |a_1|.|r| + \ldots + |a_n|.|r|^n$$

veya

$$|P_n(z)| \leq |a_n| r^n \left[1 + \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}.\frac{1}{r} + \ldots + \frac{|a_0|}{|a_n|}.\frac{1}{r^n}\right)\right]$$

dır. Sonuncu eşitsizliğin sağ yanında parantez dahilinde

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_1|}.\frac{1}{r}+\ldots+\frac{|a_0|}{|a_n|}.\frac{1}{r^n}$$

ifadesinin r sonsuza giderken sıfıra yakınsak olduğu açıktır. Buna göre de keyfi pozitif ve $\varepsilon<1$ şartını sağlayan ε sayısı için öyle R sayısı bulabiliriz ki, her bir $r>R$ için

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_1|}.\frac{1}{r}+\ldots+\frac{|a_0|}{|a_n|}.\frac{1}{r^n}<\varepsilon \tag{4.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Buna göre de $r>R$ olmak üzere $|z|\leq r$ kapalı dairesinde $P_n(z)$ polinomunun modülü üst den keyfi $0<\varepsilon<1$ için

$$|P_n(z)|\leq|a_n|.r^n(1+\varepsilon) \tag{4.1.3}$$

şekilde değerlendirilir. Şimdi $P_n(z)$ fonksiyonunun modülünün $|z|=r$ çemberinin üzerindeki herhangi bir z_0 noktasında değerini ele alalım. $|z_0|=r$ ve $r>R$ olduğunda (4.1.3) eşitsizliği bu nokta içinde sağlanır, yani

$$|a_n|.r^n(1+\varepsilon)\geq|P_n(z_0)|$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}|P_n(z_0)| &= \left|a_n z_0^n+\left(a_{n-1}z_0^{n-1}+\ldots+a_0\right)\right| \\ &\geq \left|a_n z_0^n\right|-\left|a_{n-1}z_0^{n-1}+\ldots+a_0\right| \\ &\geq |a_0|.|z_0|^n-\left(|a_{n-1}|.|z_0|^{n-1}+\ldots+|a_0|\right) \\ &\geq |a_n|.r^n-\left(|a_{n-1}|.r^{n-1}+\ldots+|a_0|\right) \\ &= |a_n|.r^n[1-(\frac{|a_{n-1}|}{|a_1|}.\frac{1}{r}+\ldots+\frac{|a_0|}{|a_n|}.\frac{1}{r^n})]\end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradan da $r > R$ olduğunda (4.1.2) eşitsizliğine dayanarak

$$|P_n(z_0)| \geq |a_n|.r^n(1-\varepsilon) \tag{4.1.4}$$

buluruz. (4.1.3) ve (4.1.4) eşitsizliklerinden yeteri kadar büyük $r > R$ sayıları için $|z| = r$ çemberi üzerinde keyfi $\varepsilon \in (0,1)$ sayısı için aşağıdaki iki kat eşitsizlik yazılır

$$|a_n|.r^n(1-\varepsilon) \leq |P_n(z)| \leq |a_n|.r^n(1+\varepsilon) \tag{4.1.5}$$

Dikkate alalım ki bu eşitsizlik n=0 hali içinde doğru olur. (4.1.3) eşitsizliği $|z| \leq r$ için sağlandığından bu eşitsizliğin sol yanından $|z| \leq r$ üzere maksimum alsak ve modülün maksimum prensibine göre

$$\max_{|z| \leq r} |P_n(z)| = \max_{|z| = r} |P_n(z)|$$

olduğunu dikkate alırsak $r > R$ için buluruz:

$$M(r) \leq |a_n| r^n(1+\varepsilon) \tag{4.1.6}$$

buluruz. Diğer yandan $|z| = r$ çemberi üzerinde $|P_n(z)|$ ifadesinin değeri

$$M(r) = \max_{|z| = r} |P_n(z)|$$

değerinden küçük veya eşit olduğundan (4.1.4) eşitsizliğinden $r > R$ için

$$M(r) \geq |a_n| r^n(1-\varepsilon) \tag{4.1.7}$$

elde ederiz. Böylece (4.1.6) ve (4.1.7) eşitsizlikler sonunda $r > R$ için

$$1-\varepsilon \leq \frac{M(r)}{|a_n| r^n} < 1+\varepsilon$$

yazarız. Bu eşitsizlik de $\varepsilon < 1$ keyfi küçük pozitif sayı olduğundan

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{|a_n| r^n} = 1 \tag{4.1.8}$$

olduğu görülür. Sonuncu eşitlikten n dereceli polinomun modülünün maksimumu $r \to \infty$ şartında asimptotik olarak polinomun baş teriminin modülüne eşit olduğu görülür, yani

$$M(r) = \max_{|z|=r} |P_n(z)| \sim |a_n z^n| \quad (r \to \infty) \quad .$$

dır. Gerçekten de $|z| = r$ olduğunda

$$|a_n|\, r^n = |a_n z^n|$$

dır. Burada biz n dereceli $P_n(z), n \geq 1$ polinomun modülünün maksimumunun $r \to \infty$ şartın da r^n hızı ile (bir pozitif kat sayı ile) , artarak ∞ ' a yaklaştığını görmüş olduk.

4.2. Üstel ve Trigonometrik Tam Fonksiyonların Modülünün Maksimum Fonksiyonunun Hesaplanması

e^z, $\cos z$,$\sin z$ fonksiyonları için $M(r)$ fonksiyonunu hesaplayalım. Bunları karıştırmamak için bu fonksiyonların modülünün maksimum fonksiyonlarını aşağıdaki gibi gösterelim. Yani

$$M(r;e^z), \quad M(r;\cos z), \quad M(r;\sin z)$$

olsun. Önce $M(r;e^z)$ fonksiyonunu hesaplayalım. Trigonometrik tam fonksiyonlar içinde $M(r)$ fonksiyonunun hesaplanması aynı yöntemle yapılır. e^z fonksiyonunun

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

açılımından buluruz. Buradan

$$|e^z| = \left|1 + \frac{z}{1!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots + \ldots\right| \leq 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots + \frac{|z|^n}{n!} + \ldots$$

kapalı $|z| \leq r$ dairesinden

$$\left| e^z \right| \le 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots = e^r$$

olur. Böylece, sonuncu eşitsizlikten görüyoruz ki $|z| \le r$ dairesinde $\left|e^z\right|$ fonksiyonu e^r sayısını aşmıyor. Ama $|z| \le r$ dairesinin $|z| = r$ çemberi üzerindeki $z = r$ noktasında $\left|e^z\right| = e^r$ eşitliği alınır. Buna göre de üstel e^z fonksiyonunun modülünün maksimumu kendisinin maksimal değerini $z = r$ noktasında alır.

Böylece

$$M\left(r; e^z\right) = \max_{|z|=r} \left| e^z \right| = e^r \tag{4.2.9}$$

formülünü buluruz. Benzer şekilde

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

açılımını yazarak

$$\left|\cos z\right| \le 1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + \ldots + \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

bulurur. Buradan da $|z| \le r$ dairesinde

$$\left|\cos z\right| \le 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} \ldots + \frac{r^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

olur. Bu eşitsizliğin sağ yanındaki serinin toplamı $chr = \dfrac{e^r + e^{-r}}{2}$ fonksiyonuna eşittir. Böylece $|z| \le r$ için

$$\left|\cos z\right| \le \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

dır. Ama $|z| \le r$ dairesinin $|z| = r$ sınırında bulunan $z = ir$ noktasında

$$cos\, ir = \frac{e^{i(ir)} + e^{-i(ir)}}{2} = \frac{e^{-r} + e^{r}}{2} = \frac{e^{r} + e^{-r}}{2} = chr$$

olur. Buna göre de $\frac{e^{r} + e^{-r}}{2}$ sayısı $|z| \leq r$ dairesinde cosz fonksiyonunun modülünün maksimumu ile çakışır. Böylece

$$M(r; cos\, z) = \max_{|z|=r} |cos\, z| = \frac{e^{r} + e^{-r}}{2} = chr \qquad (4.2.10)$$

olur. Şimdi ise sinz fonksiyonunun modülünün maksimumu fonksiyonunu hesaplayalım. Bunu için de

$$sin\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

açılımını kullanalım. Bu formüle esasen $|z| \leq r$ dairesinde aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım:

$$|sin\, z| \leq |z| + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^5}{5!} + \ldots + \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\leq r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} \ldots + \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

dır. Bu eşitsizliğin sağ yanındaki seri

$$shr = \frac{e^{r} + e^{-r}}{2}$$

fonksiyonunun açılımıdır. Buna göre de $|z| \leq r$ için

$$|\sin z| \leq \frac{e^{r} - e^{-r}}{2}$$

olur. Ama $z = ir$ noktasında (bu nokta $|z| = r$ çemberi üzerindedir)

$$|\sin ir| = \left| \frac{e^{i(ir)} - e^{-i(ir)}}{2i} \right| = \left| \frac{e^{-r} - e^{r}}{2} \right| = \frac{e^{r} - e^{-r}}{2}$$

dır. Buna göre de $\frac{e^{r} - e^{-r}}{2}$ sayısı $|z| \leq r$ dairesinde sinz fonksiyonunun modülünün maksimumu ile çakıştığı görülür. Böylece

$$M(r, \sin z) = \max_{|z|=r} |\sin z| = \frac{e^{r} - e^{-r}}{2} = sh\, r \tag{4.2.11}$$

dir.

4.3. Tam Fonksiyonun Kuvvet Serisinin Katsayıları İçin Cauchy Eşitsizlikleri

f(z) fonksiyonu kompleks değişkenli tam fonksiyondur ve

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots. \tag{4.3.12}$$

onun her yerde yakınsak olan kuvvet serisidir. (4.3.12) serisinde $z = re^{i\varphi}$ alırsak

$$f(r.e^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi} \tag{4.3.13}$$

buluruz. Bu seri her bir $r > 0$ sayı için $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aralığında φ değişkenine göre düzgün yakınsaktır (4.3.13) eşitliğinin her yanını $e^{-im\varphi}$ fonksiyonuna çarpıp sonra φ değişkenine göre 0 dan 2π ye kadar integrallesek ve

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi \text{ , } eger \;\; n = m \\ 0 \quad \text{, } eger \;\; n \neq m \end{cases}$$

eşitliğini dikkate alırsak

$$\int_0^{2\pi} f\left(r e^{i\varphi}\right) e^{-im\varphi} d\varphi = a_m r^m 2\pi \tag{4.3.14}$$

veya

$$a_m = \frac{1}{2\pi r^m}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right)e^{-im\varphi}d\varphi \qquad (4.3.15)$$

buluruz. Buradan da

$$|\, a_m \,| \le \frac{1}{2\pi r^m}\int_0^{2\pi} \left|\, f(re^{i\varphi})\right| d\varphi \le \frac{1}{2\pi r^m} M_f(r)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M_f(r)}{r^m}$$

dır. Böylece

$$|\, a_m \,| \le \frac{M_f(r)}{r^m} \quad , \quad m = 0,1,2,3,\ldots \qquad (4.3.16)$$

olur. Bu eşitsizlikler tam $f(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin katsayıları için Cauchy eşitsizlikleridir.

4.4. Lioville Teoremi ve Ondan Alınan Bazı Sonuçlar

Teorem 4.1 (Lioville Teoremi). Tam

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_k\, z^m$$

fonksiyonu için $|\, z \,| > r_0$ bölgesinde

$$\left| f(z) \right| \le A \cdot |\, z \,|^n \qquad (4.4.17)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Burada $n \ge 0$ olmakla tamsayı, A ise bir pozitif sayıdır. O zaman f(z) fonksiyonu derecesi n sayısını aşmayan polinomdur.

İspat. Teoremi ispatlamak için f(z) tam fonksiyonunun kuvvet serisinin katsayıları için

$$|\, a_m \,| \le \frac{\max\limits_{|z|=r} |\, f(z) \,|}{r^m} \qquad , \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Cauchy eşitsizliklerinde $r > r_0$ alalım. Teoremin şartındaki (4.4.17) eşitsizliğinden $r > r_0$ için

$$\max_{|z|=r}|f(z)| \le A.r^n$$

buluruz. Bu sonuncu eşitsizliği Cauchy eşitsizliklerinde dikkate alsak a_m katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikleri buluruz

$$|a_m| \le A\, r^{n-m} \quad , m = 0,1,2,... \tag{4.4.18}$$

dır. Bu eşitsizliklerde r sayısı yeterli kadar büyük alınabilir ve dikkate alalım ki, a_m katsayıları r sayısına bağlı değildir. Buna göre de m>n olduğunda (4.4.18) eşitsizliğinden $r \to \infty$ şartında $a_m = 0$ olduğunu buluruz. Böylece $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = 0$, yani f(z) fonksiyonu teoremin şartları sağlandığında derecesi n sayısını aşmayan polinom olur. Bununla da Liouville teoremi ispatlanmış olur.

Liouville teoreminden birçok önemli sonuçlar çıkar. Onlardan bazılarını burada gösterelim.

Sonuç 1. Tam f(z) fonksiyonu tüm kompleks düzlemde sınırlı olursa, yani keyfi sonlu z noktası için

$$|f(z)| \le A \tag{4.4.19}$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman bu fonksiyon sabittir, yani $f(z) = sbt.$ Gerçektende, bu halde (4.4.18) eşitsizliğinde uygun olarak n=0 olur ve f(z) fonksiyonun kuvvet serisinin katsayıları için n=0 halinde yazılan (4.4.18) eşitsizliğine uygun

$$|a_m| \le Ar^{-m} \quad , m = 0,1,2,...$$

eşitsizliklerinden

$$a_1 = a_2 = ... = a_m = ... = 0$$

eşitliklerini elde ederiz. Buna göre de $f(z) = a_0 = sbt$ olduğu görülür.

Bu sonuçtan biz görüyoruz ki, tam fonksiyonun modülünün tüm kompleks düzlemde sınırlı olmasından, yani uygun olarak $M_f(r)$ fonksiyonunun sınırlı olmasında f(z) fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğu görülüyor. Buna göre de sabit olmayan tam fonksiyonun azalmayan $M_f(r)$ fonksiyonu sınırlı olamaz, yani onun sonsuz artması gerekir. Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Sonuç 2. Tam $f(z)$ fonksiyonu sabit olmadığında onun modülünün maksimumu $M_f(r)$ fonksiyonu r sonsuza giderken sonsuza yakınsar.

Yukarıda ele aldığımız her bir örnekte, $P_n(z)$ $n \geq 1$ olan n dereceli polinom halinde, üstel ve trigonometrik tam fonksiyonlarda bu sonuç açıkça görünmektedir.

Gerçekten de mesela $P_n(z)$ $n \geq 1$ dereceli polinom olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(r)}{|a_n|\, r^n} = 1$$

olduğunu gösterdik. Bu eşitlik gösterir ki, $M(r;P_n(z))$ fonksiyonu $|a_n| r^n$ $(a_n \neq 0)$ fonksiyonu hızı ile sonsuz artar. Bulduğumuz

$$M\left(r;e^z\right) = e^r$$

$$M(r;\cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

$$M(r,\sin z) = \frac{e^r - e^{-r}}{2}$$

formüllerinden

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r;e^z)}{e^r} = 1$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r;\cos z)}{\frac{1}{2}e^r} = 1$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r;\sin z)}{\frac{1}{2}e^r} = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden üstel ve trigonometrik tam fonksiyonlar halinde $M(r; f(z))$ fonksiyonunun $\alpha . e^r$ $(\alpha = 1 \;\; veya \quad \alpha = \frac{1}{2})$ hızı ile arttığı görülür.

Aynı zamanda dikkate alalım ki e^r fonksiyonu r-nin keyfi mertebesinde, yani r^n, n-keyfi pozitif tam sayı olduğunda, kuvvetinden daha büyük hızla artar, yani $\lim_{r\to\infty} \frac{r^n}{e^r} = 0$ eşitliği keyfi pozitif n-sayısı için doğru olur. Gerçektende

$$\frac{r^n}{e^r} = \frac{r^n}{1+\frac{r}{1!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}+\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots} < \frac{r^n}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{r} \to 0 \quad , \qquad (r \to \infty)$$

dır. Bu sonuncu özellik genelleştirilmiş Liouville teoremi olarak adlandırılan teoremde genel olarak tam fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 4.2 (Genelleştirilmiş Liouville Teoremi).

Tam $f(z)$ fonksiyonu polinom olmadığında onun modülünün maksimumu $M(r; f)$ fonksiyonu keyfi $P(z)$ polinomunun modülünün maksimumu $M(r; P)$ fonksiyonundan daha sonsuz hızla artar, yani

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r; P)}{M(r; f)} = 0 \tag{4.4.20}$$

olur. Burada

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{ve} \quad M(r, P) = \max_{|z|=r} |P(z)|$$

dır.

İspat. $f(z)$ fonksiyonu şarta göre polinom olmayan tam fonksiyon olduğundan bu fonksiyonun

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

kuvvet serisinde öyle yüksek z^m dereceli kuvvetini bulabiliriz ki, m sayısı P(z) polinomunun derecesinden büyük olur ve z^m kuvvetinin katsayısı a_m sıfırdan farklı olur. P(z) polinomunun n dereceli keyfi bir polinom olduğunu ve $b_n \neq 0$ yüksek dereceli terimin katsayısı olduğunu varsayalım. O zaman $0 < \varepsilon < 1$ sayısına göre öyle r_0 sayısı bulabiliriz ki , $r > r_0$ eşitsizliğini sağlayan keyfi r sayısı için

$$M(r;P) \leq |b_n|\, r^n(1+\varepsilon) \tag{4.4.21}$$

eşitsizliği sağlanılır. Bu eşitsizlikte $r > 1$ eşitsizliğinin de sağlandığını varsayalım. Şimdi f(z) fonksiyonunun kuvvet serisinde öyle $a_m z^m$, $a_m \neq 0$ terimini bulalım ki, $m \geq n+1$ olsun. Bu terimin katsayısı a_m için Cauchy eşitsizliği

$$|a_m| \leq \frac{M(r;f)}{r^m}$$

şeklindedir. Bu eşitsizlik den

$$M(r;f) \geq |a_m|.r^m \geq |a_m|.r^{n+1} \tag{4.4.22}$$

yazarız.

(4.4.21) ve (4.4.22) eşitsizliklerinden $r > \max(r_0,1)$ için

$$\frac{M(r;P)}{M(r;f)} \leq \frac{|b_n|.r^n(1+\varepsilon)}{|a_m|.r^{n+1}} = \frac{|b_n| r\ (1+\varepsilon)}{|a_m|\ r}$$

buluruz. Bu eşitsizliğe göre

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r;P)}{M(r;f)} = 0$$

olur. Dikkate alalım ki, $|z| = r$ olduğunda

$$|P(z)| \leq M(r;P)$$

olduğundan $|z| = r$ için

$$\frac{|P(z)|}{M(r;f)} \le \frac{M(r;P)}{M(r;f)}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan da ispatlanmış (4.4.20) eşitliğine esasen $|z| = r$ olmak üzere keyfi P(z) polinomu için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|P(z)|}{M(r;f)} = 0 \tag{4.4.23}$$

limitinin doğruluğu görülür.

Bu teoremde özel halde $P_n(z) = z^n$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3. Polinom olmayan her bir tam f(z) fonksiyonunun modülünün maksimumu $M(r;f)$ fonksiyonu r-nin keyfi derecesinden daha büyük hızla artar, yani keyfi tam n için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^n} = \infty$$

veya

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^n}{M(r)} = 0 \tag{4.4.24}$$

olur.

4.5. Polinom Olmayan Tam Fonksiyonların Transendental Olma Özelliği

$P_0(z), P_1(z), .. P_n(z)$, $n \ge 1$ ve $P_n(z) \ne 0$ fonksiyonları z kompleks değişkeninin polinomları olmak üzere

$$P_0(z) + P_1(z) f(z) + P_2(z)[f(z)]^2 + ... + P_n(z)[f(z)]^n = 0 \quad . \tag{4.5.25}$$

denklemi ele alalım. Bu denklemi sağlayan f(z) fonksiyonuna cebirsel fonksiyon denir.

Cebirsel olmayan her bir fonksiyona transendental fonksiyon denir. Böylece, f(z) fonksiyonunun transendental olması, o demektir ki, katsayıları yukarıda denilen polinomlar olan (4.5.25) denklemi şeklinde öyle bir denklem yok ki, f(z) fonksiyonu bu denklemin çözümü olsun, yani o denklemi sağlaya bilsin. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.3. Polinom olmayan her bir tam fonksiyon transendentaldır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için aksini farz edelim. Polinom olmayan tam f(z) fonksiyonunun (4.5.25) şekilli bir cebirsel denklemin çözümü olduğunu varsayalım. Merkezi koordinat başlangıcında yarıçapları $r_k = 1,2,3,\ldots,k,\ldots$ olan $|z| \le r_k$ dairelerini ele alalım. Her bir $|z| \le r_k$ dairesinde f(z) fonksiyonunun modülünün maksimum değer aldığı noktayı uygun olarak z_k ile gösterelim. Böylece

$$|f(z_k)| = M_f(r_k)$$

Liouville terimine esasen $\lim\limits_{k\to\infty} M_f(r_k) = \infty$ Bu ise , $|f(z_k)|$ nın değerlerinin sonsuz artığını gösterir. Buna göre de en azından büyük k sayıları için $f(z_k) \ne 0$ olduğunu alabiliriz.

Dikkate alalım ki, her bir sonlu r yarıçaplı dairede f(z) fonksiyonunun modülü sınırlıdır. Buna göre de belli bir k numarasından başlayarak $|z| \le r_k$ dairelerinde $|f(z_k)|$ değerleri sonsuz artmağa başladığında uygun z_k noktaları bir dairede kalmayıp diğer dairelere geçecek ve böylece , $|z_k|$ modüllerinde arttığı alınır. Şimdi f(z) fonksiyonunun (4.5.25) denklemini sağladığını farz ettiğimizden, denklemin f(z) için sağladığını varsayalım ve (4.5.25) denkleminde z=z_k alıp denklemin her yanını $[f(z_k)]^n$ sayısına bölelim. O zaman

$$P_n(z_k) + \frac{P_{n-1}(z_k)}{f(z_k)} + \ldots + \frac{P_0(z_k)}{[f(z_k)]^n} = 0 \qquad (4.5.26)$$

bulunur. $P_n(z)$ polinomu derecesi birden küçük olmayan polinom olduğunda

$$\lim_{k\to\infty} P_n(z_k) = \infty$$

olur. Ama derecesi sıfır olan sıfırdan farklı polinom olduğunda

$$\lim_{k\to\infty} P_n(z_k) = sbt.$$

(4.5.26) eşitliğinin sol yanındaki diğer terimlerin her biri (4.5.23) eşitliğine esasen sıfıra yakınsaktır.

Gerçektende

$$\left| \frac{P_{n-1}(z_k)}{f(z_k)} \right| \le \frac{M(r_k; P_{n-1})}{M(r_k; f)}$$

ve genelde

$$\left| \frac{P_{n-1}(z_k)}{\left[f(z_k)\right]^{-m}} \right| \le \frac{M(r_k; P_{n-m})}{M(r_k; f)} \cdot \frac{1}{\left[M(r_k; f)\right]^{-m-1}} \qquad , \; m \ge 1$$

Burada

$$\lim_{k\to\infty} M(r_k; f) = \infty$$

olduğundan buradan (4.5.26) denkleminin diğer terimlerinin her birinin sıfıra yakınsak oldukları görülür. (4.5.26) eşitliğinin her yanından $k \to \infty$ şartında limit alsak $P_n(z_k)$ terimi sıfıra yakınsak olduğunu buluruz. Bu çelişki teoremi ispatlar. Böylece özel halde $e^z, \cos z, \sin z$ fonksiyonlarının transendental tam fonksiyonlar olduğu açıktır.

4.6. Transendental Tam Fonksiyonların Artma Hızına Göre Sıralandırılması (Sınıflandırılması)

Yukarıdaki bölümde polinom olmayan her bir tam fonksiyonun transendental fonksiyon olduğu gösterildi. Ama tüm tam transendental fonksiyonları aynı açıdan ele almak yanlışlık olurdu. Bu fonksiyonların bazılarının modülünün maksimumu diğerlerinin modülünün maksimumundan daha büyük hızla artığı görülüyor. Gerçekten de, transendental tam fonksiyonların artma hızına göre biri birinden keskin farklandıklarını görmek için, örnek olarak e^z , e^{z^k} e^{e^z} fonksiyonlarının modüllerinin maksimumlarını mukayese edelim. Burada $e^{z^{k}}$ fonksiyonunda k sayısı $k \geq 2$ olmakla tamsayıdır. e^{z} fonksiyonunun modülünün maksimum fonksiyonu

$$M(r;e^{z}) = e^{r}$$

formülü ile verilir. $e^{z^{k}}$ fonksiyonunun modülünün maksimum fonksiyonunu hesaplamak için e^{z} fonksiyonunun kuvvet serisinde z yerine z^{k} alırsak $e^{z^{k}}$ fonksiyonu için

$$e^{z^{k}} = 1 + \frac{z^{k}}{1!} + \frac{z^{2k}}{2!} + \ldots + \frac{z^{nk}}{n!} + \ldots$$

buluruz. Bu açılımı kullanarak $e^{z^{k}}$ fonksiyonunun modülünü $|z| \leq r$ dairesinde aşağıdaki gibi değerlendire biliriz, yani

$$\left| e^{z^{k}} \right| \leq 1 + \frac{|z|^{k}}{1!} + \frac{|z|^{2k}}{2!} + \ldots + \frac{|z|^{nk}}{n!} + \ldots \leq 1 + \frac{r^{k}}{1!} + \ldots \ \frac{r^{nk}}{n!} + \ldots = e^{r^{k}}$$

olur. Diğer yandan $e^{z^{k}}$ fonksiyonunun modülü $z = r$ noktasında $e^{r^{k}}$ ile çakışıktır. Buradan da $e^{z^{k}}$ fonksiyonunun modülünün maksimumunun $e^{r^{k}}$ olduğu bulunur. Böylece

$$M(r;e^{z^{k}}) = e^{r^{k}}$$

$e^{e^{z}}$ fonksiyonunun modülünün maksimumunu hesaplamak için ise, e^{z} fonksiyonunun kuvvet serisine açılımında z değişkeni yerine e^{z} alalım. O zaman

$$e^{e^{k}} = 1 + \frac{e^{z}}{1!} + \frac{e^{2z}}{2!} + \ldots + \frac{e^{nz}}{n!} + \ldots$$

buluruz. $|z| \leq r$ olduğunda $\left| e^{z} \right| \leq e^{r}$ olduğunu dikkate alarak

$$\left|e^{e^z}\right| \le 1+\frac{\left|e^z\right|}{1!}+\frac{\left|e^z\right|^2}{2!}+\ldots+\frac{\left|e^z\right|^n}{n!}+\ldots \le 1+\frac{e^r}{1!}+\frac{e^{2r}}{2!}\ldots\frac{e^{nr}}{n!}+\ldots=e^{e^r}$$

değerlendirmesi yapılabilir. Diğer yandan e^{e^z} fonksiyonunun modülü $z=r$ noktasında e^{e^r} değerini alır. Buna göre de

$$M(r;e^z)=e^{e^r}$$

formülü ispatlanmış olur.

Liouville teriminden gözlenebildiği gibi $M(r;e^Z)$, $M(r;e^{z^k})$ ve $M(r;e^{e^z})$ fonksiyonlarının her biri $r \to \infty$ şartında sonsuzluğa yakınsaktır. Ama buna bakmayarak bu fonksiyonlar farklı hızlarla sonsuzluğa yakınsaktır. Gerçektende, mesela,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{e^r}{e^{r^2}}=0 \;,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{e^{r^2}}{e^{r^3}}=0 \quad ,\ldots,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{e^{r^k}}{e^{r^{k+1}}}=0 \;,\ldots,\lim_{r\to\infty}\frac{e^k}{e^{e^r}}=0$$

dır, burada k keyfi doğal sayıdır. Bu limitlerden

$$e^z, e^{z^2}, e^{z^3}, \ldots, e^{z^k}, e^{z^{k+1}}, \ldots$$

tam transendental fonksiyonlarının her birinin modülünün maksimumu önde gelen fonksiyonların modülünün maksimumu fonksiyonlardan daha sonsuz hızla arttığı görülür. Dikkate alalım ki, bunların her birinin modülünün maksimumundan e^{e^z} fonksiyonunun modülünün maksimumu daha sonsuz hızla artar. Artma ayarı (ölçüsü) olarak $M(r;e^z)=e^r$ fonksiyonunu alarak bu fonksiyonların modüllerinin maksimumlarının artma hızı ölçülebilir. Bunun için önce burada daha yavaş artan fonksiyonlar alınır. Bu amaçla tüm fonksiyonların modüllerinin maksimumu fonksiyonlarını yerine onların logaritmalarına geçilir. O zaman aşağıdaki dizi

$$\ln M(r;e^z)=r,\ \ln M(r;e^{r^2})=r^2,\ \ldots,\ \ln M(r;e^{z^k})=r^k,\ldots$$

bulunur. Ama alınan bu dizide her bir sonra gelen fonksiyon öncekinden daha büyük hızla artığından, bunların bir daha logaritması alınır. O zaman ise aşağıdaki dizi

$$\ln\ln M(r;e^{z}) = \ln r, \quad \ln\ \ln M(r;e^{z^2}) = 2\ln r, \ \ldots$$

$$\ldots, \ln\ln M(r;e^{z^k}) = k\ln r, \ \ln\ln M(r;e^{z+1}) = (k+1)\ln r, \ldots \qquad .$$

bulunur. Bu dizide fonksiyonların orantılarını aldığımızda sonlu sayılar alınır. Böylece

$$\frac{\ln\ln M(r;e^{z^2})}{\ln\ln M(r;e^{z})} = 2, \ \ldots \ , \frac{\ln\ln M(r;e^{z^k})}{\ln\ln M(r;e^{z})} = k, \ldots$$

Buna göre de e^{z^2} fonksiyonunun tertibi (mertebesi) 2 , e^{z^3} fonksiyonun mertebesi 3 ve e^{z^k} fonksiyonunun mertebesi k-dır denir. Ayar olarak ele alınmış fonksiyonunun mertebesi ise 1-dir denir. e^{e^z} fonksiyonu için

$$\frac{ln\,ln\,M(r;e^{e^z})}{ln\,ln\,M(r;e^{z})} = \frac{ln\,ln\,e^{e^r}}{ln(r)} = \frac{r}{ln\,r}$$

olduğundan ve

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{ln\,r} = \infty$$

olduğundan e^{e^z} fonksiyonunun mertebesi ∞ a eşittir denir. Genel halde tam f(z) fonksiyonunun mertebesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.1. Tam f(z) fonksiyonunun modülünün maksimumu fonksiyonu, $M_f(r), r$ sayısının yeteri kadar büyük $r > r_0$ değerlerinde öyle pozitif $k > 0$ sayısı varsa ki;

$$M_f(r) < e^{r^k} \qquad (4.6.27)$$

eşitsizliği sağlanır, o zaman f(z) tam fonksiyonu sonlu mertebesidir denir. (4.6.27) eşitsizliğini sağlayan $k > 0$ sayılarının infimum değerine tam f(z) fonksiyonunun mertebesi denir ve ρ ile gösterilir. ρ sayısı f(z) tam fonksiyonunun mertebesi olduğunda, mertebenin tanımından keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M_f(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \tag{4.6.28}$$

eşitsizliğini r sayısının büyük değerlerinde sağlanır. Dikkate alalım ki, bu eşitsizliğin sağ yanı r sayısının yeteri kadar tüm büyük değerlerinde sağlanır. Ama sol yanı, genelde, r sayısının sonsuzluğa yakınsak olan bir $\{r_n\}$ dizisi için sağlanır $P_n(z)$ polinomu n dereceli polinom ve k doğal sayı olduğunda aşağıdaki

$$e^{z^k};\ P_n(z)e^{z^k};\ cos(z^k);\ e^{iz^k}\ ve\ P_n(z)\frac{e^{z^k}-1-z^k}{z^{2k}}$$

fonksiyonları k mertebeli tam fonksiyonlardır. $e^{\sqrt{1+z^2}}+e^{-\sqrt{1+z^2}}$ fonksiyonunun mertebesi 1-e eşittir.

$\cos\sqrt{z}$ fonksiyonu $\frac{1}{2}$ mertebeli tam fonksiyondur. (4.6.28) şartı aşağıdaki eşitliğe eşdeğer olduğu kolaylıkla gösterilir, yani

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ \ln M(r;f)}{\ln\ \ln M(r;e^z)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ \ln M(r;f)}{\ln r} \tag{4.6.29}$$

dır. Buna göre de tam *f*(z) fonksiyonunun mertebesi ρ, (4.6.29) eşitliği ile de tanımlanır. (4.6.29) formülünün yardımıyla cos(z) tam trigonometrik fonksiyonunun mertebesini hesaplayalım.

$$M(r;\cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2} = e^r\,\frac{1+e^{-2r}}{2}$$

olduğundan

$$ln\,M(r;cos\ z) = r + ln\frac{1+e^{-2r}}{2} = r\left(1+\frac{ln\frac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right)$$

dır. Bu ifadeden bir daha logaritma alırsak

$$ln\,ln\,M(r;cos\ z) = ln\,r + ln\left(1 + \frac{ln\dfrac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right)$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanındaki ikinci toplam $r \to \infty$ şartında sıfıra yakınsaktır. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ \ln M(r,\cos\ z)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty}\left[1 + \frac{\ln\left(1+\dfrac{\ln\dfrac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right)}{\ln r}\right] = 1$$

dir. Buradan cosz tam fonksiyonunun mertebesinin ρ =1 olduğunu görürüz.

Aynı yöntemle sinz fonksiyonunun mertebesinin de ρ =1 olduğu gösterilir. Şimdi

$$\frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{2} \tag{4.6.30}$$

fonksiyonunu ele alalım. Önce bu fonksiyonun tam fonksiyon olduğunu gösterelim.

Burada

$$e^{\sqrt{z}} = 1 + \frac{\sqrt{z}}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z\sqrt{z}}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots. + \frac{(\sqrt{z})^n}{n!} + \ldots.,$$

$$e^{-\sqrt{z}} = 1 - \frac{\sqrt{z}}{1!} + \frac{z}{2!} - \frac{z\sqrt{z}}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \ldots. + (-1)^n\frac{(\sqrt{z})^n}{n!} + \ldots.,$$

dir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayıp sonra 2 ye bölersek

$$\frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{2} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots. + \frac{z^n}{(2n)!} + \ldots.,$$

buluruz. Bu seri her yerde yakınsak kuvvet serisi olduğundan (4.6.30) fonksiyonu tam fonksiyondur. Bu fonksiyon için

$$M\left(r;\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}\right)=\frac{e^{\sqrt{r}}+e^{-\sqrt{r}}}{2}$$

olur. Üstte gösterdiğimiz yöntemle (4.6.29) formülünün yardımıyla bu fonksiyon için $\rho=\frac{1}{2}$ olduğu alınır. Verilmiş ρ mertebeli tam fonksiyonların artma karakteristikası olarak tam fonksiyonun tipi anlaşılır. ρ tertipli tam f(z) fonksiyonunun modülünün maksimumu $M_f(r)$ fonksiyonu r sayısının yeterli kadar büyük değerlerinde

$$M_f(r)<e^{Ar^{\rho}} \tag{4.6.31}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif A sayılarının infimum değerlerine ρ mertebeli f(z) tam fonksiyonunun tipi denir ve α ile gösterilir.

ρ mertebeli tam f(z) fonksiyonunun tipi için

$$\alpha=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho}} \tag{4.6.32}$$

formül bulunur. $\alpha=0$ olduğunda tam f(z) fonksiyonuna minimal tipli , $0<\alpha<\infty$ olduğunda normal tipli ve $\alpha=\infty$ olduğunda ise, bu fonksiyona maksimal tipli tam fonksiyon denir.

n doğal sayı olduğunda $e^{\alpha z^n}$ fonksiyonunun n mertebeli α tipli tam fonksiyon olduğu kolaylıkla gösterilebilir. sin(z) ve cos(z) fonksiyonları ρ =1 mertebeli ve $\alpha=1$ normal tipli fonksiyonlardır. Ama $\cos\sqrt{z}$ fonksiyonunun mertebesi $\rho=\frac{1}{2}$ ve tipi $\alpha=1$ dir.

Belli bir açı dahilinde de tam fonksiyonunun modülünün maksimumu fonksiyonu ve uygun olarak bu açı dahilinde tam fonksiyonun mertebesi ve tipi anlamları verile bilir. Gerçekten de, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ açısında

$$M_f(r,\varphi_1,\varphi_2) = \max_{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2} \left| f(r\,e^{i\varphi}) \right| \qquad (4.6.33)$$

eşitliği $|z| = r$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ çember yayı üzerinde f(z) fonksiyonunun modülünün maksimumu tanımlanır.

f(z) fonksiyonunun $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ açısında mertebesi ρ ve tipi α olmak üzere

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r;\,\varphi_1;\,\varphi_2)}{\ln r} \qquad (4.6.34)$$

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r;\,\varphi_1;\,\varphi_2)}{r^{\rho}} \qquad (4.6.35)$$

formüllerle tanımlanır.

4.7. Phragmen Lindelöf Prensibi

D bölgesinde analitik olan f(z) fonksiyonu bu bölgenin kapanışında, yani $\bar{D}$ bölgesinde sürekli olduğunda bu fonksiyonun modülü maksimum değerini bölgenin sınırında alır. Bu özelliğe analitik fonksiyonların modülünün maksimum prensibi denir. Bölgede analitik olan fonksiyon bölgenin sınırının ayrı-ayrı özel noktalarında sürekli olmadığı halde, ama bu özel noktalara yaklaştığımızda f(z) fonksiyonunun modülü fazla büyük hızla artmadığında böyle analitik fonksiyonlar için modülün maksimum prensibi Phragmen ve Lindelöf tarafından geliştirilmiştir.

Phragmen – Lindelöf prensibi aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem 4.4. D bölgesinde analitik olan bir f(z) fonksiyonu alalım. D bölgesinde analitik olan öyle $\omega(z)$ fonksiyonu olsun ki, keyfi $\delta > 0$ sayısı için

$$f(z)[\omega(z)]^{\delta}$$

fonksiyonunun D bölgesinin sınırının her bir noktasında limit değeri olsun. Özel halde sonsuz uzaklaşmış nokta D bölgesinin sınır noktası olduğunda da bu şartın sağlandığı görülür. δ sabitine bağlı olmayan öyle M>0 sayısı olsun ki, D bölgesinin tüm sınır noktalarında

$$\left| f(z)[\omega(z)]^{\delta} \right| \le M \qquad (4.7.36)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman tüm D bölgesinde

$$|\,f(z)\,| \leq M$$

olur.

İspat. $f(z)\left[\omega(z)\right]^{\delta}$ çarpımı D bölgesinde analitik olduğunda ve bu çarpımın modülü için D bölgesinin tüm sınırında (4.7.36) eşitsizliği sağlandığından analitik fonksiyonların modülünün maksimumu prensibine esasen (4.7.36) eşitsizliğinin D bölgesinin her bir iç noktasında da sağlandığını buluruz.

D Bölgesinin bir iç $z_0 \in$ D noktasında $\omega(z_0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman keyfi $\delta > 0$ sayısı için

$$|\,f(z_0)\,| \leq M\,\left[\omega(z_0)\right]^{-\delta}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikte $\delta > 0$ sayısı keyfi olduğundan $z_0 \in$ D noktasında

$$|\,f(z_0)\,| \leq M \qquad (4.7.37)$$

eşitsizliğinin sağlandığını buluruz. $\omega(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik olduğunda onun bu bölgedeki sıfırları izole edilmiş noktalardır. Diğer yandan f(z) fonksiyonu D bölgesinde analitik olduğundan modülün maksimum prensibine esasen (4.7.37) eşitliği $\omega(z)$ fonksiyonunun D bölgesindeki sıfırları olan noktalar içinde sağlandığı bulunur. Böylece, (4.7.37) eşitsizliği D bölgesinin tüm noktalarında sağlanılır.

Dikkate alalım ki, f(z) fonksiyonu sabit olmadığında (4.7.37) eşitsizliğinde eşitlik hali bölgenin iç noktalarında alınamaz.

Bu genel prensibinden birçok önemli teoremler çıkarılır. Bunlardan bazılarını burada gösterelim.

Teorem 4.5. Sınırı sonsuz uzaklaşmış nokta içeren D bölgesinde analitik olan bir f(z) fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için D bölgesinin sınırının her bir sonlu noktasında

$$|f(z)| \leq M \tag{4.7.38}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım.

O zaman $|f(z)|$ fonksiyonu D bölgesinde sınırlı olduğunda (4.7.38) eşitsizliği tüm D bölgesinde sağlanır.

İspat. D bölgesinden, merkezi D bölgesinin bir $z_0 \in$ D bu nokrasında yarıçapı r>0 olan C dairesini kesip çıkaralım. $\omega(z)$ fonksiyonu olarak kalan bölgede analitik olan

$$\omega(z) = \frac{r}{z - z_0}$$

fonksiyonunu alalım. Keyfi $\delta > 0$ için $f(z)[\omega(z)]^{\delta}$ çarpımı $z \to \infty$ şartında sıfıra yakınsar. $\omega(z)$ fonksiyonu için $|z - z_0| > r$ eşitsizliğin sağlayan her bir $z \in$ D noktalarında $|\omega(z)| < 1$ şartı sağlandığından D bölgesinin sınırının her bir noktasında

$$\left| f(z)\,[\omega(z)]^{\delta} \right| \leq M$$

eşitsizliği sağlanılır.

$|z - z_0| = r$ çemberi üzerinde f(z) fonksiyonunun modülünün maksimumunu

$$M_1 = \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

ile gösterelim. O zaman $|z - z_0| = r$ çemberi üzerinde

$$\left| f(z)[\omega(z)]^{\delta} \right| \leq M_1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, D \ C bölgesinin tüm sınırlarında

$$\left| f(z)[\omega(z)]^{\delta} \right| \leq \max\{M, M_1\}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Buna göre de Phragmen-Lindelöf prensibine esasen D \ C bölgesinde, yani her bir $z \in$ D \ C noktasında

$$|f(z)| \leq max(M, M_1)$$

eşitsizliğinin sağlandığını görürüz. Burada

$$\lim_{r \to 0} M_1 = |f(z_0)|$$

olduğundan

$$|f(z)| \leq max\,(M; |f(z_0)|)\ \forall\, z \in \mathrm{D}$$

bulunur. Eğer $|f(z_0)| > M$ olursa, o zaman tüm D bölgesinde

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

eşitsizliğini yazmış oluruz. Ama burada z_0 noktası D bölgesinin iç noktası olduğundan $|f(z_0)|$ maksimal değerini D bölgesinin iç noktasında alamaz. Buna göre de $|f(z_0)| \leq M$ olması gerekir. Buna göre de her bir $z \in$ D için

$$|f(z)| \leq M$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ispatlanmış olur.

Teorem 4.6. $\dfrac{\pi}{\beta}$ aralıklı açıda f(z) fonksiyonunun analitik olduğunu ve bu açının sınırlarında ise, f(z) fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. f(z) fonksiyonunun bu açıda tertibi ρ sayısının β sayısından küçük olduğunu ve açının yanları üzerinde f(z) fonksiyonunun modülünün

$$|f(z)| \leq M$$

eşitliğini sağladığını varsayalım. O zaman bu açının iç noktalarının her birinde de

$$|f(z)| \leq M$$

eşitsizliği sağlanılır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için genelliği bozmadan $|arg(z)| \leq \dfrac{\pi}{2\beta}$ açısını ele alalım. Bu açı pozitif reel yarı eksene nazaran simetriktir. Açı öncede bu şekilde olmadığından düzlemi belli bir açı kadar döndürmekle açını reel eksene nazaran simetrik şekle katarız $\rho < \gamma < \beta$ şartını sağlayan γ sayısını alalım ve

$$\omega(z) = e^{-z^{\gamma}} \left(|arg(z)| \leq \frac{\pi}{2\beta} \right)$$

formülü ile $\omega(z)$ fonksiyonu seçelim. O zaman $z = r.e^{i\theta}$ alalım ve keyfi $\delta > 0$ sayısı için $|arg(z)| \leq \dfrac{\pi}{2\beta}$ açısında

$$\left| f(z)[\omega(z)]^{\delta} \right| = |f(z)| e^{-\delta r^{\gamma} \cos\gamma\theta}$$

eşitliği yazılır.

Buradan da $\rho < \rho_1 < \gamma$ için aşağıdaki asimptotik eşitsizlik

$$\left| f(z)[\omega(z)]^{\delta} \right| < e^{r^{\rho_1} - \delta r^{\gamma} \cos\gamma\theta}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten ise

$$f(z)[\omega(z)]^{\delta}$$

çarpımının $|\arg(z)| < \dfrac{\pi}{2\beta}$ açısında $r \to \infty$ şartında θ açısına nazaran düzgün sıfıra yakınsak olduğu bulunur. Bu açının yanları üzerinde $f(z)$ fonksiyonunun modülü M sayısını aşmadığından genel Phragmen ve Lindelöf prensibine esasen $|\arg(z)| < \dfrac{\pi}{2\beta}$ açısının iç noktalarında da

$$|f(z)| \leq M$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece teorem ispatlanmış olur. Dikkate alalım ki $\dfrac{\pi}{\rho}$ aralı açının yanları üzerinde sınırlı olan ve mertebesi (tertibi) ρ sayısına eşit olan analitik fonksiyonlar vardır. Mesela, $f(z)=e^{z^{\rho}}$ fonksiyonu $\left|arg(z)\right|\leq\dfrac{\pi}{2\rho}$ açısının iç noktalarında bu özellikler sağlanır.

Aralığı $\dfrac{\pi}{\rho}$ olan açılar halinde analitik fonksiyonların modülünü böyle açılarda tipi ile bağlı olarak da değerlendirmek olur.

Teorem 4.7. $\left|\arg(z)\right|\leq\dfrac{\pi}{2\rho}$ açısında ρ tertipli ve $\alpha\geq 0$ tipli analitik f(z) fonksiyonu için bu açının yanları üzerinde

$$\left|f(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})\right|\leq M$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $\left|arg(z)\right|\leq\dfrac{\pi}{2\rho}$ açısının her bir iç noktasında

$$\left|f(re^{i\theta})\right|\leq M\,e^{\alpha r^{\rho}\cos\rho\theta}\left(\left|\theta\right|\leq\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan yardımcı $\varphi_{\varepsilon}(z)$ fonksiyonu ele alalım

$$\varphi_{\varepsilon}(z)=e^{-(\alpha+\varepsilon)z^{\rho}}f(z) \quad .$$

Bu fonksiyon $\left|arg(z)\right|\leq\dfrac{\pi}{2\rho}$ açısının yanları üzerinde sınırlıdır. İlave olarak bu fonksiyon pozitif reel yarı ekseni üzerinde de sınırlıdır.

$\varphi_\varepsilon(z)$ fonksiyonunun pozitif reel yarı ekseni üzerinde sınırlı olduğunu göstermek için, önce dikkate alalım ve f(z) fonksiyonu teoremin şartına esasen tertibi ρ tipi α olan analitik fonksiyon olduğundan $\left|arg(z)\right| \leq \dfrac{\pi}{2\rho}$ açısının büyük değerlerinde

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq e^{(\alpha+\varepsilon)r^\rho} \quad , \quad \left(\left|\theta\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

eşitsizliğini sağlanır. Buna göre de θ=0 aldığımızda reel pozitif yarı ekseni üzerinde

$$\left|\varphi_\varepsilon(r)\right| \leq e^{-(\alpha+\varepsilon)r^\rho+(\alpha+\varepsilon)r^\rho} = 1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, $\varphi_\varepsilon(z)$ fonksiyonu için

$$-\frac{\pi}{2\rho} \leq arg\ z \leq 0 \text{ ve } 0 \leq arg\ z \leq \frac{\pi}{2\rho}$$

açılarında uygulanırsa onun tam $\left|arg\ z\right| \leq \dfrac{2\pi}{2\rho}$ açısında sınırlı olduğunu buluruz. Böylece, bu açı dâhilinde

$$\left|\varphi_\varepsilon(z)\right| \leq M$$

veya

$$\left|f(z)\right| \leq M\ e^{(\alpha+\varepsilon)r^\rho \cos\rho\theta} \left(\left|\theta\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

eşitsizliği bulunur. Burada ε keyfi olduğundan sonuç da

$$\left|f(z)\right| \leq M\ e^{\alpha r^\rho \cos\rho\theta} \quad , \quad \left(\left|\theta\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}\right) \qquad (4.7.39)$$

eşitsizliği alınır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4. f(z) fonksiyonu üst yarı düzlemde $\rho = 1$ tertipli ve α tipli analitik fonksiyon olduğunda ve reel $-\infty < x < \infty$ ekseninde sınırlı ise, yani $\left|f(x)\right| \leq M$ eşitsizliği sağlanırsa, o zaman $\mathrm{Im} z \geq 0$ üst yarı düzleminde

$$\left| f(z) \right| \le M \; e^{\alpha \operatorname{Im} z} \qquad (4.7.40)$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten de, bu halde pozitif ve negatif reel yarı eksenler arasındaki açı $0 \le arg\, z \le \pi$ olur. $\rho = 1$ halinde Teorem şartları sağlanır. (4.7.39) eşitsizliğinde $\rho = 1$ alırsak ve sağ yarı düzlemden, yani $\left| arg\, z \right| = \left| \theta \right| \le \dfrac{\pi}{2}$ açısından üst yarı düzleme, yani $0 \le arg\, z \le \pi$ açısını seçersek $\cos\theta$ fonksiyonunu $\sin\theta$ fonksiyonuna değiştirmemiz gerekiyor. Buna göre de (4.7.40) eşitsizliğinden

$$\left| f(r\, e^{i\theta}) \right| \le M\, e^{\alpha\, r \sin\theta} \equiv M\, e^{\alpha \operatorname{Im} z} \qquad (4.7.41)$$

buluruz. Böylece, Sonuç 1 ispatlanmış olur.

Sonuç 5. Eğer tam f(z) fonksiyonu $\rho = 1$ tertipli α tipli fonksiyon olup reel $(-\infty < x < \infty)$ ekseninde sınırlı olduğunda, yani

$$\left| f(x) \right| \le M \quad , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (4.7.42)$$

eşitsizliği sağlandığında, bu fonksiyon tüm z kompleks düzleminde aşağıdaki

$$\left| f(r\, e^{i\theta}) \right| \le M\, e^{\alpha\, r \left| \sin\theta \right|}$$

değerlendirmesi doğru olur. Bu eşitsizlik (4.7.41) eşitsizliğini $\operatorname{Im} z \ge 0$ ve $\operatorname{Im} z \le 0$ bölgelerine, yani üst ve alt düzlemlerine uygulamakla alırız.

$\varphi_1 \le \arg z \le \varphi_2$ açısı dahilinde analitik olan ve sonlu ρ tertipli f(z) fonksiyonlarını bu açı dahilinde z sonsuzluğa yaklaştığında böyle fonksiyonların artış hızını karekterize etmek için Phragmen ve Lindelöf fonksiyonun indikatörü adlanan aşağıdaki eşitlikle tanımlanan $h_f(\varphi)$ fonksiyonunu dahil edilmiştir:

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \left| f(r\, e^{i\varphi}) \right|}{r^{\rho}} \quad , \; \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \qquad (4.7.43)$$

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ açısı dahilinde normal tipli fonksiyonlar için indikatör üstten sınırlı olur.

Özel halde $\rho = 1$ tertipli tam fonksiyonların indikatör

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left| f(r e^{i\varphi})\right|}{r} \quad , \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \tag{4.7.44}$$

formülle tanımlanır. Burada $\rho = 1$ tertipli fonksiyonların tipi α için

$$\alpha = \sup_{0\le\varphi\le 2\pi} h_f(\varphi) \tag{4.7.45}$$

formülünü buluruz. Örneğin $f(z) = e^{\alpha z}$ fonksiyonunun indikatörü

$$h\left(\varphi; e^{\alpha z}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left| e^{\alpha r(\cos\varphi + \sin\varphi)}\right|}{r} = \alpha\cos\varphi$$

ve f(z)=sinαz fonksiyonunun indikatörü ise

$$h\left(\varphi; e^{\alpha z}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left| \dfrac{e^{i\alpha r e^{i\varphi}} - e^{-\alpha r e^{i\varphi}}}{2i}\right|}{r} = \alpha\left|\sin\varphi\right|$$

olur.

4.8. Tam Fonksiyonun Artış Hızı İle Onun Kuvvet Serisine Açılımının Katsayılarının Azalma Hızı Arasındaki İlişki

Tam f(z) fonksiyonunun aşağıdaki kuvvet serisine açıldığını var sayalım, yani

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

olsun. f(z) fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan bu seri tüm kompleks düzlemde yakınsaktır, yani bu serinin yakınsaklık yarıçapı için

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| a_n \right|}} = \infty$$

olduğundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| a_n \right|} = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu sonucu eşitlikten tam fonksiyonun kuvvet serisinin katsayılarının modülleri azalan sayısal dizi oluşturduklarını görüyoruz. Tam fonksiyonun artış hızını karakterize eden σ tertibi ve α tipi onun kuvvet serisinin katsayılarının azalma hızı ile belli bir bağlantısı vardır.

Tam fonksiyonun artış hızı ile kuvvet serisinin katsayılarının azalma hızı arasındaki bu bağlantı aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 4.8. Tam f(z) fonksiyonunun ρ tertibi ve α tipi onun

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z + \ldots$$

kuvvet serisinin a_n katsayıları ile aşağıdaki formüllerle bulunur. Buna göre

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{1}{|a_n|}} \tag{4.8.46}$$

ve

$$\alpha = \frac{1}{\sigma} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n|^{\sigma}} \right) \tag{4.8.47}$$

dır, burada e = 2.7182818284... sabit sayısıdır.

İspat. Tam fonksiyonun kuvvet serisinin katsayıları için Cauchy eşitsizliklerinden

$$|a_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n} \qquad , \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

ve tam fonksiyonun modülünün maximumu M_f(r) fonksiyonunun asimtotik

$$M_f(r) < e^{Ar^k}$$

değerlendirilmesinden kuvvet serisinin a_n katsayıları için

$$|a_n| < e^{Ar^k} r^{-h}$$

asimtotik değerlendirilme bulunur. Bu eşitsizliğin sağ yanındaki r ye bağlı $e^{Ar^k} r^{-n}$ fonksiyonunun r değişkenine göre türevini alıp sıfıra eşitlersek ve bu fonksiyonun $r > 0$ bölgesinde

$$r_0 = \left(\frac{n}{A.k} \right)^{\frac{1}{k}}$$

noktasında en küçük değer aldığını buluruz. Böylece, sonuçta a_n katsayıları için

$$|a_n| < \left(\frac{eAk}{n} \right)^{\frac{n}{k}} \tag{4.8.48}$$

değerlendirmeyi bulmuş oluruz.

Şimdi öyle N numarası seçelim ki, f(z) fonksiyonun kuvvet serisinin n > N şartını sağlayan her bir a_n z^n terimi $|z| = r > r_0$ için

$$|a_n z^n| < 2^{-n}$$

eşitliğini sağlasın. Bunun için,

$$|a_n|.|z^n| < 2^{-n} \qquad ,$$

$$|a_n|.r^n < 2^{-n} \qquad ,$$

$$\left(\frac{eAk}{n} \right)^{\frac{n}{k}}.r^n < 2^{-n} \qquad ,$$

$$\left(2^k r^k \frac{eAk}{n} \right)^{\frac{n}{a}} < 1$$

$$2^k.r^k \frac{eAk}{n} < 1$$

ve

$$n > 2^k r^k e A k$$

eşitsizlikleri sağlandığında $\left| a_n z^n \right| < 2^{-n}$ eşitsizliği sağlanır. Buna göre de N sayısı olarak $2^k r^k eAk$ sayısının en büyük ve tam kısmını $\left[2^k r^k .eAk\right] = N$ alsak, keyfi n > N için $\left| a_n z^n \right| < 2^{-n}$ eşitsizliği sağlanır. Böylece, $| f(z) |$ için

$$| f(z) | < \sum_{n=0}^{N} | a_n | r^n + 2^{-N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right)$$

değerlendirme yazılabilir. Burada

$$\mu(r) = \max_n | a_n | r^n$$

işaret edelim. r değişkenine bağlı μ(r) fonksiyonuna tam fonksiyonun kuvvet serisine açılımının *maksimal terimi* olarak adlandırılır.

O zaman

$$M_f(r) \le (N+1)\mu(r) + 2^{-N}$$

veya

$$M_f(r) \le \left(1 + 2^k e A k r^k\right)\mu(r) + 2^{-N} \tag{4.8.49}$$

elde edilir. Tam f(z) fonksiyonu polinom olmadığında onun modülünün maksimum fonksiyonu M_f(r) keyfi dereceli P(z) polinomunun modülünün maksimumu M_p(r) fonksiyonundan (Genelleşmiş Lioaville Teoremine esasen) r değişkeninin artmasıyla daha büyük hızla artar, yani $\lim_{r \to \infty} \frac{M_p(r)}{M_f(r)} = 0$ olur. Buna göre de (4.8.49) eşitsizliğinden alınır ki, f(z) fonksiyonunun kuvvet serisine açılımının maksimal μ(r) teriminin indisi, r değişkeninin artmasına bağlı artar.

(4.8.48) eşitsizliğinden f(z) fonksiyonunun kuvvet serisine açılımının maksimal terimi için

$$\mu(r) \leq \max_n \left(\frac{eAk}{n} \right)^{\frac{n}{k}} . r^n$$

veya

$$\mu(r) \leq \max_n \left(\frac{eAk}{n} r^k \right)^{\frac{n}{k}} \qquad .$$

şeklinde üstten değerlendirmeyi buluruz. Bu eşitsizliğin sağ yanı n = Akr^k olduğunda en büyük değer aldığı açıktır. Buna göre de, f(z) fonksiyonunun kuvvet serisinin maksimal terimi için aşağıdaki asimtotik değerlendirmeyi buluruz, yani

$$\mu(r) \leq e^{Ar^k}$$

dır. Sonuncu eşitsizliği (4.8.49) eşitsizliğinde dikkate alırsak

$$M_f(r) < \left(2 + 2^k eAkr^k\right) e^{Ar^k} . \tag{4.8.50}$$

buluruz. Burada biz $M_f(r) < e^{Ar^k}$ eşitsizliğinden (4.8.48) $|a_n| < \left(\frac{eAk}{n} \right)^{\frac{n}{k}}$ eşitsizliğinin alındığını ve sonuncu eşitsizlikten ise, (4.8.50) eşitsizliğinin bulunduğunu gösterdik.

Bu da gösterir ki, f(z) tam fonksiyonunun ρ mertebesi (4.8.48) eşitsizliğini sağlayan k sayılarının infimum değeridir. Bu fonksiyonun α tipi ise, (4.8.48) eşitsizliğinde k sayısı yerine k=ρ aldığımızda (4.8.48) eşitsizliğini sağlayan A sayılarının infimum değeridir. Böylece, buradan (4.8.46) ve (4.8.47) formüllerini buluruz.

Dikkate alalım ki, tam f(z) fonksiyonunun kuvvet serisinin katsayıları için Cauchy eşitsizliklerinden ve (4.8.50) eşitsizliğinden bu fonksiyonun kuvvet serisinin maksimal μ (r) terimi için

$$\mu(r) \leq M_f(r) < r^{\sigma+\varepsilon} \mu(r)$$

asimtotik değerlendirmede yazılabilir, burada σ sayısı $f(z)$ fonksiyonunun mertebesi, ε sayısı ise keyfi pozitif sayıdır.

Burada ispatlanmış teorem esasında verilmiş tertipli ve verilmiş tipli tam fonksiyon elde edilebilir. Gerçekten de,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Az)^n}{\Gamma(\beta.n+1)}$$

kuvvet serisinde A>0 ve β>0 reel sayılar ve $\Gamma(\beta.n+1)$ ise, β.n+1 değişkeninin Gamma fonksiyonu olsun.

Stirling formülüne esasen

$$\Gamma(\beta.n+1)=\left(\frac{\beta.n}{e}\right)^{\beta n}\sqrt{2\pi\beta n}\left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

ve (4.8.46), (4.8.47) formüllerinden $f(z)$ fonksiyonu için,

$$\rho=\frac{1}{\beta}, \qquad \alpha=A$$

olduğunu görürüz. Böylece, bu seride A ve β sayılarını seçmekle istenilen tertipli ve istenilen tipli tam fonksiyon inşa edilebilir.

Eğer

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

kuvvet serisinde

$$a_0=0, \qquad a_n=\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}, \qquad n=1,2,\ldots$$

alırsak ρ mertebeli ve maksimal tipli

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}z^n$$

tam fonksiyonunu inşa etmiş oluruz.

Ama

$$a_0 = a_1 = 0 \text{ ve } a_n = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{\frac{n}{\rho}} \quad , \qquad n = 2, 3, \ldots$$

alırsak,

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln\, n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$$

ρ tertipli minimal tipli $f(z)$ tam fonksiyonunu elde etmiş oluruz. $a_n = e^{-n^2}$ aldığımızda ise, sıfır tertipli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$$

tam fonksiyonu inşa edilmiş olur.

Eğer (4.8.46) ve (4.8.47) formüllerinde a_n yerine (n+1)a_n alırsak üst limitin değeri değişmediğinden tam fonksiyonu diferansiyellenir ve de onun tertibinin ve tipinin değişmediği görülür.

4.9. Eksponensial Tipli Tam Fonksiyonlar

Tertibi birden büyük olmayan $\rho \leq 1$, olan normal tipli tam fonksiyonlara eksponensial tipli veya sonlu dereceli tam fonksiyon denir. Bu halde fonksiyonun tipi

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r} \tag{4.9.51}$$

formülü ile tanımlanır ve fonksiyonun <u>üstü</u> veya <u>derecesi</u> adlanır.

Böylece, tanıma esasen tertibi birden küçük olan veya tertibi bire eşit olup minimal tipli tam fonksiyonların derecesi (üstü) sıfıra eşit olur.

Sonlu dereceli fonksiyonlara bir çok uygulamalarda, mesela harmonik analizde ve diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümünde, control problemlerinin çözümünde, vs. sık sık rastlanır.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.9. $f(z)$ fonksiyonunun sonlu α dereceli tam fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! |a_n|} \tag{4.9.52}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada a_n sayıları $f(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisine açılımının katsayılarıdır.

İspat. Bu teoremi ispat etmek için aşağıdaki iki eşitsizliğin eşdeğer (ekvivalent) olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r} \le A \quad , \tag{4.9.53}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! |a_n|} \le A \tag{4.9.54}$$

Gerçektende, bu eşitsizlikler ekvivalent olduğunda ve α sayısı bu eşitsizliklerden birini sağlayan A sayısının en küçük değeri olduğunda, yani bu eşitsizliği eşitliğe dönüştürdüğünde, o zaman bu sayı diğer eşitsizliği de eşitliğe dönüştürür.

Şimdi (4.9.53) ve (4.9.54) eşitsizliklerinin eşitliğe dönüştüğünü ve bu eşitliklerin sağ yanında aynı α sayısının olduğunu varsayalım. O zaman da (4.9.51) ve (4.9.52) formüllerini karşılaştırarak teoremin ispatını alırız. Şimdi (4.9.53) ve (4.9.54) eşitsizliklerinin ekvivalent olduklarını ispatlayalım. Yani bu eşitsizliklerden herhangi birinin sağlanmasından diğerinin sağlandığını gösterelim. (4.9.53) eşitsizliğinin sağlanmasından (4.9.54) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için $f(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin katsayıları için Cauchy eşitsizliklerini kullanalım

$$|a_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n} \quad , \qquad n = 0,1,2\ldots$$

ε keyfi pozitif sayı olsun. O zaman (4.9.53) eşitsizliğinden,

$$M_f(r) \le e^{(A+\varepsilon)r}$$

ve böylece,

$$|a_n| \le \frac{e^{(A+\varepsilon)r}}{r^n}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu sonucu eşitsizliğin sağ yanı r değişkenli fonksiyon olup r > 0 bölgesinde minimumunu.

$$r = \frac{n}{A+\varepsilon}$$

noktasında alır. Buna göre

$$|a_n| \le \frac{e^n (A+\varepsilon)^n}{n^n}$$

veya

$$\frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n|} \le A+\varepsilon$$

buluruz. Bu eşitsizlikte ε keyfi olduğundan buradan (4.9.54) eşitsizliğinin sol kısmının sağlandığı anlaşılır. Aşağıdaki

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[\sqrt{2\pi n} + 0(1)\right]$$

Stirling formülünden ise (4.9.54) eşitsizliğinin ikinci kısmının doğru olduğu görülür.

Şimdi ise (4.9.54) eşitsizliğinin sağlanmasından (4.9.53) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

kuvvet serisi açılımından

$$M_f(r) \le |a_0| + |a_1| r + \ldots + |a_n| r^n + \ldots \qquad (4.9.55)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.9.54) eşitsizliğinden onunla eşdeğer olan

$$|a_n| \leq \frac{(A+\varepsilon)^n}{n!} \tag{4.9.56}$$

eşitsizliği yazılır.

(4.9.56) eşitsizliği n sayısının yeteri kadar büyük değerlerinde sağlanır, yani ε > 0 verildiğinde öyle N sayısı bulabiliriz ki n > N için (4.9.56) eşitsizliği sağlanır.

(4.9.55) ve (4.9.56) dan

$$M_f(r) \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| r^n + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n \tag{4.9.57}$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=N} \frac{(A+\varepsilon)^n r^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+\varepsilon)^n r^n}{n!} = e^{(A+\varepsilon)r}$$

buluruz. Diğer yandan, yeteri kadar büyük r (r > R) sayıları için,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |a_n| r^n < e^{(A+\varepsilon)r} \tag{4.9.58}$$

eşitsizliği yazılabilir (polinom eksponentden daha zayıf hızla arttığından).(4.9.57) ve (4.9.58) eşitsizliklerinden r sayısının büyük değerleri (r > R) için

$$M_f(r) < 2e^{(A+\varepsilon)r} < e^{(A+2\varepsilon)r} \tag{4.9.59}$$

buluruz. Buradan da

$$\frac{\ln M_f(r)}{r} < A + 2\varepsilon \tag{4.9.60}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuncu eşitsizlikten de ε sayısının keyfiliğinden (4.9.53) eşitsizliği alınır.

Sonuc 6. $f(z)$ fonksiyonu sonlu α dereceli tam fonksiyonun türevi $f'(z)$ fonksiyonunda sonlu α dereceli fonksiyon olduğunu gösterelim.

$f(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin a_n katsayıları ile $f'(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin katsayıları a'_n arasında

$$a'_n = (n+1)a_{n+1}$$

bağlantısı vardır.

Buradan da (4.9.52) formülüne esasen

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|\,a'_n\,|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)!\,|\,a_{n+1}\,|}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n+1]{(n+1)!|\,a_{n+1}\,|}\right]^{\frac{n+1}{n}} = \alpha .$$

buluruz. Burada sonlu dereceli tam fonksiyonlara örnekler gösterelim.

1) $e^{\alpha z}$ fonksiyonunun kuvvet serisi

$$e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$$

şeklinde olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\frac{\alpha^n}{n!}} = \alpha$$

alınır. Böylece, $e^{\alpha z}$ fonksiyona α dereceli eksponensial tipli fonksiyondur.

2) $\cos\alpha z$ fonksiyonunun kuvvet serisi

$$\cos\alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2n)!\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}} = \alpha$$

olur. Böylece cosα z (uygun olarak $\cos(\alpha z+\beta)$) fonksiyonu eksponensial tipli olup derecesi α sayısına eşittir.

3) $\Im_0(2z)$ Bessel fonksiyonunun kuvvet serisi

$$\Im_0(2z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2z}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}.(-1)^n$$

olduğundan,

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{(2n)!\left|a_{2n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{(2n)!\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}2^{2n}}{(n!)^2}}=2$$

dır. Böylece, $\Im_0$ (2z) Bessel fonksiyonunun derecesi 2 olan eksponensial fonksiyondur.

f(z) fonksiyonunun α dereceli tam fonksiyon olduğunu farz edelim m sayısı tam pozitif sayı olduğun da z^m f(z) fonksiyonununda α dereceli eksponensial tipli tam fonksiyon olduğunu gösterelim. z^m f(z) fonksiyonunun kuvvet serisine açılımın da z^{n+m} kuvvetinin katsayısı a_n olduğundan (burada a_n katsayısı f(z) fonksiyonunun kuvvet serisine açılımında z^n kuvvetinin katsayısıdır)

$$\frac{n+m}{e}\sqrt[n+m]{\left|a_n\right|}=\frac{n+m}{n}.\frac{n}{e}\left(\sqrt[n]{\left|a_n\right|}\right)^{\frac{n}{n+m}}$$

buluruz. Bu sonuncu eşitlikten görüyoruz ki, bu eşitliğin sağ yanı ile $\frac{n}{e}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}$ ifadesinin $n\to\infty$ şartında ele alınan m sayısında aynı bir limite α sayısına yaklaştığı görülür.

Aynı yöntemle, p(z) keyfi polinom olduğunda $p(z)e^{\alpha z}$ fonksiyonununda α dereceli eksponansial tipli fonksiyon olduğu gösterilebilir. Aşağıdaki,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n\ln n)^n} \tag{4.9.61}$$

fonksiyonu için $a_n=\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^n$ olmakla ρ tertibini ve α tertibini hesaplayalım.

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln\dfrac{1}{|a_n|}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{n\ln n+n\ln\ln n}=1$$

ve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{e}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{e\ln n}=0$$

şeklindedir. Böylece, (4.9.61) serisi ile verilmiş f(z) fonksiyonu sıfır dereceli eksponensial tipli fonksiyondur.

4.10. Borel Dönüşümü

Kuvvet serisi aşağıdaki

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n \tag{4.10.62}$$

şeklinde yazılmış α dereceli üstel tipli her bir f(z) tam fonksiyonuna aşağıdaki

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}} \tag{4.10.63}$$

fonksiyonu karşı getirilir. Tersine $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha<+\infty$ şartı sağlandığında ise, (4.10.63) serisi ile tanımlanan her bir g(z) fonksiyonuna (4.10.62) serisi ile tanımlanan f(z) fonksiyonu karşı getirilir. Bu halde g(z) fonksiyonuna karşı tutulmuş f(z) fonksiyonunun α dereceli eksponensial tipli tam fonksiyon olduğu açıktır.

(4.10.63) serisi ile tanımlanmış g(z) fonksiyonuna f(z) fonksiyonuna Borel anlamda uydurulmuş (*assocıated*) fonksiyon denir. (4.10.63) eşitliğinde elemanlar $\dfrac{1}{\mathrm{z}}=\mathrm{w}$ dönüşümünü yaparsak bu dönüşüm g(z) fonksiyonunu

$$\Psi(w) = g\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^{n+1} \qquad (4.10.64)$$

fonksiyonuna dönüştürür. Burada $f(z)$ fonksiyonu sonlu α dereceli eksponensial tipli fonksiyon olduğundan,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! \left| \frac{a_n}{n!} \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \qquad (4.10.65)$$

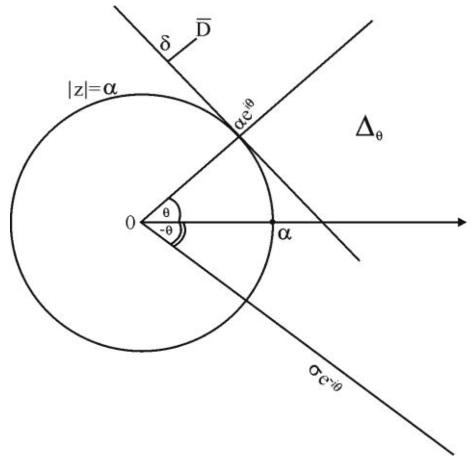
Buna göre de (4.10.64) kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R için buluruz.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\alpha}$$

Böylece, (4.10.63) serisinin $|z| > \alpha$ bölgesinde analitik fonksiyon olduğunu buluruz. Şimdi aşağıdaki ifadeyi ele alalım

$$\int f(\xi)\, e^{-z\varphi} d\xi = g\,(z,\theta) \quad (\xi = \rho\, e^{-i\theta},\ 0 \le \rho < \infty) \qquad . \quad (4.10.66)$$

Burada, integral koordinat başlangıcından başlayan ve reel eksenin pozitif yönü ile (-θ) açısı oluşturan argξ = -θ ışını üzere alınır. $|z| = \alpha$ çemberini içinde sağlamayan ve sınırı $|z| = \alpha$ çemberine $\alpha e^{i\theta}$ noktasında teğet olan doğrudan oluşan açık yarı düzlemi Δ_θ ile gösterelim (Bak.Şek.4.1).



Şekil 4.1.

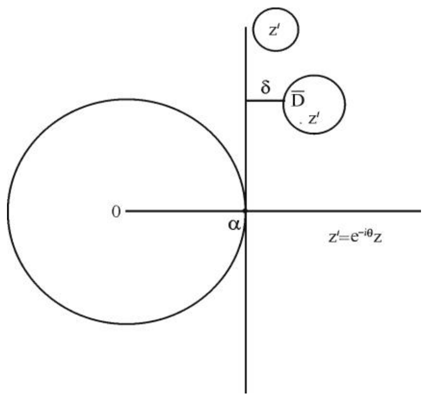
$|z| = \alpha$ çemberini sağlayan, sınır $|z| = \alpha$ çemberine $\alpha e^{i\theta}$ noktasında teğet olan doğrudan oluşan açık Δ_θ yarı düzleminde g(z,θ) fonksiyonuna f(z) fonksiyonunun Borel dönüşümü denir.

(4.10.66) integrali Δ_θ yarı düzleminin dahilinde yerleşen her bir kapalı bölgede düzgün ve mutlak yakınsaktır. Böylece, g(z,θ) fonksiyonu Δ_θ yarı düzlemi dahilinde analitik fonksiyondur.

Bunu gösterelim. $\overline{D}$ bölgesi Δ_θ yarı düzleminde yerleşen kapalı bölge olsun. Bu zaman $\overline{D}$ bölgesinden alınmış her bir z noktasından Δ_θ yarı düzleminin sınırına dek mesafe bir $\delta > 0$ sayısından büyük olur. Δ_θ yarı düzleminin sınırı $|z| = \alpha$ çemberine $z = \alpha e^{i\theta}$ noktasında teğet olduğundan $z' = e^{-i\theta} z$ dönüşümü Δ_θ yarı düzlemini z = 0 noktası etrafında saat ibresinin hareketi yönünde +θ açısı kadar dönderir. Bu zaman Δ_θ yarı düzleminin sınırı absis eksenine x = α noktasında dik olur (Bak. Şekil 4.2). $\overline{D}$ bölgesinde yerleşen her bir z = x + iy noktası için $\xi = \rho e^{-i\theta}$ ve

$$\mathrm{Re}(z\,\xi) = \mathrm{Re}(z\,\rho) = \mathrm{Re}[(x + iy)\,\rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \rho\,(x\cos\theta + y\sin\theta) > \rho\,(\alpha + \delta) \qquad (4.10.67)$$



Şekil 4.2

Δ_θ yarı düzleminin sınırının absis eksenine x = α noktasında dik olduğu haldir.

Diğer yandan f(z) fonksiyonu sonlu α dereceli tam fonksiyon olduğundan yeteri kadar büyük modüllü ξ sayıları için;

$$|f(\xi)| \leq e^{\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)|\xi|} \tag{4.10.68}$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman öyle C sabiti bulabiliriz ki, tüm ξ sayıları için;

$$|f(\xi)| \leq C.e^{\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)|\xi|} \tag{4.10.69}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre de z noktası $\overline{\mathrm{D}}$ bölgesinde yerleştiğinde ve ξ noktası ise $\xi = \rho e^{-i\theta}\ (0 \leq \rho < \infty)$ ışını üzerinde yerleştiğinde (4.10.67) ve (4.10.69) eşitsizliklerinin yardımıyla aşağıdaki değerlendirme yapılabilir. Yani

$$\left| f(z)e^{-z\,\xi} \right| \leq C\,e^{\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)\rho} e^{-\mathrm{Re}\left(z\,\rho\, e^{-i\theta}\right)} < C.e^{-\frac{\delta}{2}\rho} \tag{4.10.70}$$

dir. Böylece, keyfi $\mathrm{z} \in \overline{\mathrm{D}}$ için

$$\left|\int f(\xi)e^{-z\,\xi}d\xi\ \right| < C\int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{2}\rho}d\rho = \frac{2}{\delta}\,C < +\infty \tag{4.10.71}$$

buluruz.

Böylece, Δ_θ yarı düzleminde yerleşen her bir kapalı $\overline{D}$ bölgesinde (4.10.66) integrali düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Şimdi Δ_θ yarı düzleminde, yani Δ_θ yarı düzleminden alınmış her bir z için,

$$\mathrm{g(z,\theta) = g(z)} \tag{4.10.72}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Burada g(z) fonksiyonu (4.10.63) formülü ile tanımlanmış f(z) fonksiyonunda Borel anlamda uydurulmuş fonksiyondur.

g(z) ve g(z,θ) fonksiyonlarının her biri Δ_θ yarı düzleminde analitik olduklarından bu fonksiyonların Δ_θ yarı düzleminin bir kısmında çakıştığını gösterirsek tüm Δ_θ yarı düzleminde çakıştığını anlarız. g(z) ve g(z,θ) fonksiyonlarının, mesela,

$$\operatorname{Re}\left(z e^{-i\theta}\right) > 3\alpha \tag{4.10.73}$$

bölgesinde çakıştığını gösterelim. (4.10.73) şartını sağlayan z noktaları için f(z) fonksiyonunun (4.10.62) açılımını (4.10.66) formülünde yazıp sonra terim terime integrallemenin mümkün olduğunu gösterelim. Δ_θ yarı düzleminin (4.10.73) şartını sağlayan z noktaları için buluruz:

$$\left| e^{-z g e^{-i\theta}} \right| < e^{-3\alpha g} \tag{4.10.74}$$

(4.10.62) serisinin katsayıları için Cauchy eşitsizliği,

$$\frac{|a_n|}{n!} < \frac{M f(r)}{r^n} \tag{4.10.75}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizliği r > ρ için kullanarak (4.10.62) serisinin kalan terimi için aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım

$$|R_n(\rho)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \rho^k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M_f(r)}{r^k} \rho^k = M_f(r) \frac{\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{\rho}{r}}$$

veya

$$|R_n(\rho)| < \frac{M_f(r)}{1-\dfrac{\rho}{r}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \tag{4.10.76}$$

olur. Diğer yandan f(z) sonlu α dereceli üstel tipli tam fonksiyon olduğundan,

$$M_f(r) < e^{(\alpha+\varepsilon) r} \quad (\varepsilon > 0) \tag{4.10.77}$$

Şimdi (4.10.76) eşitsizliğinde r = 2ρ alırsak ve (4.10.77) eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki değerlendirme bulunur.

$$|R_n(\rho)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{2(\alpha+\varepsilon)\rho} \tag{4.10.78}$$

(4.10.74) ve (4.10.78) eşitsizliklerinden

$$f(\xi)e^{-z\,\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-z\,\xi} \frac{a_k}{k!} \xi^k \tag{4.10.79}$$

serisinin $\xi = \rho e^{-i\theta}$ ($\rho > 0$) ışını üzerinde düzgün yakınsak olduğu alınır.

O halde integral,

$$\int e^{-z\xi} \xi^k d\xi = \frac{k!}{z^{k+1}} \tag{4.10.80}$$

için formülü doğru olduğundan (4.10.79) eşitliğinin terim terime integrallenmesinden her bir $z \in \Delta_\theta$ için

$$g(z,\theta) \equiv \int f(\xi)\, e^{-z\,\xi} d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \equiv g(z) \tag{4.10.81}$$

buluruz. (4.10.81) integralinin yakınsaklık bölgesi Δ_θ yarı düzleminden daha geniş olabilir, yani integralin yakınsaklık bölgesi Δ_θ yarı düzlemini içinde sağlayabilir. (4.10.81) bağlantısı $|z| > \alpha$ bölgesinde tanımlanmış, g(z) fonksiyonunu daha geniş bölgeye Borell dönüşümü ile devam ettirmenin mümkün olabilmesinin mümkün olduğunu gösterir. Dikkat edelim ki, Borel dönüşümünde θ = 0 alırsak integralleme reel eksenin pozitif kısmı üzere yapılır, o zaman bu integral

$$g(z,\theta) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-z\,t} dt$$

klasik Laplace dönüşümünü ifade eder.

5. EKSPONENSİAL TİPLİ TAM FONKSİYONLARIN SPEKT-RAL AÇILIMI

5.1. Fourier İntegrali ve Onun Bazı Özellikleri

5.1.1. L_1 (-∞, ∞) Sınıfından Olan Fonksiyonların Fourier Dönüşümü

φ(x) fonksiyonu (a,b) , (-∞≤ a, b ≤ +∞) aralığında tanımlanmış fonksiyon olsun.

Eğer,

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx < +\infty$$

şartı sağlanırsa, o zaman φ(x) fonksiyonu (a,b) aralığında integrallenendir, eğer,

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx < +\infty$$

şartı sağlanırsa, φ(x) fonksiyonu (a,b) aralığında karesi ile integrallenendir denir. (a,b) aralığında integrallenen fonksiyonların kümesi L_1(a,b) gibi karesi ileintegrallenen fonksiyonların kümesi ise uygun olarak L_2(a,b) şeklinde gösterilir.

Teorem 5.1. (Riemann-Lebesque). L_1(-∞,∞) sınıfından alınmış F(ω) fonksiyonu için,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (5.1.1)$$

eşitliği ile tanımlanan f(t) fonksiyonuna F(ω) fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir.

(5.1.1) integrali ile tanımlanan f(t) fonksiyonu -∞< t < +∞ aralığında sınırlıdır, her bir t∈(-∞,∞) noktasında süreklidir ve $|t| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsaktır:

$$\lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0$$

İspat. f(t) fonksiyonunun (-∞,∞) aralığında sınırlı olması,

$$|\, f(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\, F(\omega)|\, d\omega \qquad (5.1.2)$$

eşitsizliğinden ve F(ω) fonksiyonunun (-∞,∞) aralığında integrallenen olmasından, yani L_1(-∞,∞) sınıfından olmasından anlaşılır.

F(ω) fonksiyonuna L_1(-∞,∞) uzayında yakınsak olan {F_n(ω) } ⊂ L_1(-∞, ∞) dizisini ele alalım. Böylece n→∞ şartında,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, F(\omega) - F_n(\omega)|\, d\omega \to 0 \qquad (5.1.3)$$

F_n(ω) fonksiyonlarının uygun Fourier dönüşümünü f_n(t) ile gösterelim. O zaman her bir t∈ (-∞, ∞) için

$$\begin{aligned} |\, f(t) - f_n(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega) - F_n(\omega)) e^{i\omega t} d\omega\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega) - F_n(\omega)|\, d\omega \qquad . \end{aligned} \qquad (5.1.4)$$

buluruz. (5.1.4) eşitsizliğinden ve (5.1.3) limit eşitliğinden {f_n(t)} dizisinin f(t) fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu bulunur.

Aşağıdaki,

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & a \leq \omega \leq b \\ 0, & \omega \notin [a,b] \end{cases} \qquad (5.1.5)$$

fonksiyonuna (a,b) aralığının karakteristik fonksiyon denir. (a,b) aralığının karakteristik fonksiyonunun $\wp$(t) Fourier dönüşümünü hesaplayalım.

$$\wp(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_k(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it} \qquad (5.1.6)$$

(5.1.6) eşitliğinden x(t) fonksiyonunun tüm reel -∞ < t < ∞ ekseninde sürekli olduğu ve $|\, t\,| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\psi(\omega)$ fonksiyonu sonlu sayıda aralıkların karakteristik fonksiyonlarının integrallenen lineer kombinasyonu olsun: $\psi(\omega)\in L_1(-\infty,\infty)$ ve $\psi(\omega)=\sum_{k=1}^{n} C_k\chi_k(\omega)$. Burada C_k sabit katsayılar, $\chi_k(\omega)$ fonksiyonları ise *k* numaralı aralığın karakteristik fonksiyonudur. Böylece, $\psi(\omega)$ fonksiyonunun integrallenen merdiven şekilli fonksiyon olduğunu varsayalım.

$\psi(\omega)$ fonksiyonunun her bir toplamı bir aralığın karakteristik fonksiyonunun bir sonlu sabite çarpımı olduğundan, bu fonksiyonun her bir toplamının Fourier dönüşümü var ve $(-\infty,\infty)$ aralığında t değişkeninin sürekli fonksiyonudur ve $|t|\to\infty$ şartında sıfıra yakınsaktır. Bu özellikler merdiven şekilli integrallenen her bir $\psi(\omega)$ fonksiyonunun $\psi(t)$ Fourier dönüşümü içinde sağlanır.

$L_1(-\infty,\infty)$ uzayından keyfi $F(\omega)$ fonksiyonunu alalım. O zaman her bir doğal n sayısı için merdiven şekilli öyle $\psi_n(\omega)\in L_1(-\infty,\infty)$ fonksiyonu bulmak olur ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)-\psi_n(\omega)\right|d\omega<\frac{1}{n} \tag{5.1.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $\{\psi_n(\omega)\}$ dizisinin $F(\omega)$ fonksiyonuna $L_1(-\infty,\infty)$ aralığında yakınsak olduğu alınır. Yani $L_1(-\infty,\infty)$ uzayından herhangi bir $F(\omega)$ fonksiyonu aldığımızda bu uzaydan $F(\omega)$ fonksiyonuna yakınsak olan merdiven şekilli $\{\psi_n(\omega)\}$ fonksiyonlar dizisi seçmek olur. $\psi_n(t)$ fonksiyonu uygun olarak $\psi_n(\omega)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olsun.

(5.1.4) eşitsizliğinden $\{\psi_n(t)\}$ dizisinin $F(\omega)$ fonksiyonunun $f(t)$ Fourier dönüşümüne düzgün yakınsak olduğu alınır. $\{\psi_n(t)\}$ dizisinin her bir terimi $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ve $|t|\to\infty$ şartında sıfıra yakınsak olduklarından ve $\{\psi_n(t)\}$ dizisinin $f(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasından $f(t)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ve $|t|\to\infty$ şartında sıfıra yakınsak olur. Bununla da Fourier dönüşümü için Riemann-Lebesque teoremi tamamen ispatlanmış olur.

5.1.2. F(ω) Fonksiyonunun Diferansiyellenmesi İle Onun Fourier Dönüşümünün $|t| \to \infty$ Şartında Azalma Hızı Arasında Bağlantı.

F(ω) fonksiyonunun f(t) Fourier dönüşümünün $|t| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsama hızı F(ω) fonksiyonunun diferansiyellenme özelliklerine bağlıdır. Bu özellik aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 5.2. F(ω) fonksiyonunun ve onun $F'(\omega), F''(\omega), \ldots, F^{(n-1)}(\omega)$ türevlerinin tüm (-∞,∞) aralığında integrallenen olduğunu ve bu aralığın her bir $\omega \in$(-∞,∞) noktasında sürekli olduklarını ve $|\omega| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsak olduklarını varsayalım. $F^{(n)}(\omega)$ türevi ise (-∞,∞) aralığında ω-ya göre integrallenen olsun. O zaman $|t| \to \infty$ şartında,

$$t^n f(t) \to 0 \tag{5.1.8}$$

olur.

İspat. Gerçekten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt$$

eşitliğinin sağ yanına n kez kısmi integrasyon formülünü uygularsak teoremin şartlarının uygulanmasıyla,

$$f(t) = \left(\frac{i}{t} \right)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^{(n)}(w) e^{iwt}\, dw$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her yanı t^n kuvvetine çarpıldıktan sonra $F^{(n)}(w)$ fonksiyonu L_1(-∞,∞) uzayından olduğundan bu fonksiyonun Fourier dönüşümü $|t| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsak olduğundan (5.1.8) limit eşitliği alınır. Bununla da teorem ispatlanmış olur.

Dikkate alalım ki, $\chi(\omega)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün (5.1.6) ifadesinden görüldüğü gibi, F(ω) fonksiyonu süreksiz olduğundan $|t| \to \infty$ şartında t.f(t) sıfıra yakınsak olmayabilir. Bu yüzden Teorem 5.2 nin şartlarını değişmez sağlayarak (5.1.8) limit eşitliğinde, genelde, n yerine n+1 alamayız.

F(ω) fonksiyonuna onun f(t) Fourier dönüşümün spektride denir.

f(t) fonksiyonu bir (t_1,t_2) aralığı dışında aynılıkla sıfıra eşit olursa, f(t) fonksiyonu (t_1,t_2) aralığında finitdir denir. f(t) fonksiyonunun F(ω) spektri bir (ω_1, ω_2) aralığı dışında aynılıkla sıfıra eşit olursa, f(t) fonksiyonu (ω_1, ω_2) aralığında finit spektril fonksiyondur denir.

Şimdi f(t) fonksiyonunun finit spektrli fonksiyon olduğunu varsayalım, yani f(t) fonksiyonunun,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (5.1.9)$$

şeklinde gösterildiğini varsayalım. Bundan ilave α sayısının sonlu olduğunu ve F (ω) fonksiyonunun (-α, α) aralığında karesi ile integrallenen olduğunu da varsayalım.

F(ω) fonksiyonu sonlu aralıkta karesi ile integrallenen olduğundan bu fonksiyon aynı sonlu aralıkta integrallenen olur. Bu yüzden Teorem 5.2 den aşağıdaki sonuçlar alınır.

Sonuç 1. f(t) fonksiyonu (-α,α) aralığında finit spektrli fonksiyon olsun. f(t) fonksiyonunun spektri F(ω) n kez diferansiyellenen olsun ve $F(\pm\alpha) = F'(\pm\alpha) = \ldots = F^{(n-1)}(\pm\alpha) = 0$ şartları sağlansın. $F^{(n)}(\omega)$ fonksiyonu (-α,α) aralığında karesiyle integrallenen olsun. O zaman $t^n f(t)$ fonksiyonu da (-α,α) aralığında finit spektrli fonksiyon olur ve $t^n f(t)$ fonksiyonu $|t| \to \infty$ şartında sıfıra yakınsar. $t^n f(t) \to 0$ olur.

Örnek olarak dikkate alalım ki,

$$F(w) \cong \begin{cases} e^{-\frac{1}{\alpha-\omega}-\frac{1}{\alpha+\omega}}, & -\alpha < \omega < +\alpha \\ \\ 0 & , \quad \omega \geq \alpha, \omega \leq -\alpha \end{cases}$$

fonksiyonu (-α,α) aralığında finit fonksiyondur ve tüm (-∞,∞) aralığında sonsuz mertebeden diferansiyellenen fonksiyondur.

Sonuç 2. f(t) fonksiyonu spektri F(ω) fonksiyonu [-α,α] aralığı dışında sıfıra eşittir ve tüm (-∞,∞) aralığında sonsuz mertebeden diferansiyellenendir, bu yüzden $F^{(n)}(\alpha) = F^{(n)}(-\alpha) = 0$ n = 0,1,2,... olur ve keyfi p(t) polinomu için p(t)f(t) fonksiyonu da f(t) fonksiyonu ile birlikte finit spektrli fonksiyondur ve p(t)f(t) fonksiyonu da (5.1.9) açılımı şeklinde gösterilebilir.

Gerçektende, F(ω) fonksiyonu (-∞,∞) aralığında sonsuz mertebeden diferansiyellenen olduğundan ve [-α,α] aralığı dışında aynılıkla sıfıra eşit olduğundan (5.1.9) formülünde n kez kısmi integrasyon işlemini uygulamakla aşağıdaki formülü buluruz:

$$t^n \; f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} i^n \, F^{(n)}(\omega) \, e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\left(i \frac{d}{d\omega} \right)^n F(\omega) \right] e^{i\omega t} \, d\omega \qquad (5.1.10)$$

olur, burada integral altındaki $\left(i \frac{d}{d\omega} \right)^n F(\omega)$ işareti $i \frac{d}{d\omega}$ operatörünün ardışık olarak F(ω) fonksiyonundan n kez alınmasıdır. Buna göre de p(t) herhangi bir polinom olduğunda,

$$p(t) f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[p\left(i \frac{d}{d\omega} \right) F(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega \qquad (5.1.11)$$

şeklinde gösterilir.

$$F_p(\omega) = p\left(i\frac{d}{d\omega}\right)F(\omega)$$

gibi işaret edelim.

$F^{(n)}(\pm\alpha) = 0$, n = 0,1,2,...ve $|\omega| \geq \alpha$ olduğunda ise F(ω) ≡0 olduğu ve -α ≤ ω ≤ α aralığında ise sonsuz mertebeden diferansiyellenen olduğundan,

$$p(t)\, f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} F_p(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

ifadesinde $F_p(\omega)$ fonksiyonunda (-α, α) aralığında süreklidir ve $F_p(\omega)$ fonksiyonu [-α, α] aralığında finit fonksiyon olduğundan p(t)*f*(t) fonksiyonu finit spektrli fonksiyon olduğu ve $|t| \to \infty$ şartında p(t)*f*(t)→0 olduğu alınır.

5.1.3. L_2 (-∞, ∞) Sınıfından Olan Fonksiyonların Fourier Dönüşümü

f(t)∈L_2(-∞,∞) olsun. Tüm (-∞,∞) ekseninde karesi ile integrallenen bu aralıkta integrallenen olmayabilir. Mesela, $\psi(t) = \dfrac{1}{1+|t|}$ ve $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ fonksiyonları karesi ile integrallenen olmalarına$\left(\psi(t), \varphi(t) \in L_2(-\infty,\infty)\right)$ bakmayarak kendileri (-∞,∞) aralığında integrallenen değildir, yani $\left(\psi(t), \varphi(t) \notin L_1(-\infty,\infty)\right)$ dir. Buna göre de tüm (-∞,∞) aralığında karesi ile integrallenen, yani $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonu için $L_1(-\infty,\infty)$ sınıfından alınmış, fonksiyonlar için yazılmış,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

integralinin her bir ω için anlamı olmayabilir. Buna göre

$$\tilde{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt \tag{5.1.12}$$

eşitliği ile tanımlanmış $\tilde{f}(\omega)$ fonksiyonunun, genelde her bir ω için anlamı olmaya da bilir. Bu yüzden $L_2(-\infty,\infty)$ uzayından olan fonksiyonlar için Fourier dönüşümü özel bir yöntemle tanımlanması gerekmektedir.

Bunun için önce $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında dizilerin yakınsaklığının “ortalama yakınsaklık” veya orta quadratik yakınsaklık anlamını hatırlatalım. $\{ f_n(t) \} \subset L_2(-\infty,\infty)$ ve $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | f(t) - f_n(t)|^2 \, dt = 0 \qquad (5.1.13)$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman $\{f_n(t)\} \subset L_2(-\infty,\infty)$ dizisi $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonuna orta quadratik yakınsaktır denir.

(a,b) aralığında tanımlanmış karesiyle integrallenen kompleks değerli f(t) ve g(t) , ($-\infty \le a < b \le \infty$) fonksiyonları için Cauchy Schwarz eşitsizliği,

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \le \sqrt{\int_a^b | f(t)|^2 \, dt} \, . \sqrt{\int_a^b | g(t)|^2 \, dt} \qquad (5.1.14)$$

doğrudur.

Bu anlamlardan istifade ederek $L_2(-\infty,\infty)$ uzayından alınmış fonksiyonlar için Fourier dönüşümünü tanımlayalım.

Keyfi $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonu için, ω

$$\tilde{f}(\omega, N) = \int_{-N}^{N} f(t) \, e^{-i\omega t} dt \qquad (5.1.15)$$

eşitliği ile tanımlanan $\tilde{f}(\omega, N)$ fonksiyonunu tanımlayalım. (5.1.14) Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak her bir (değişmez sağlanan) N sayısı için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında ω değişkeninin sürekli fonksiyonu olduğunu gösterelim.

Bunun için sabit alınmış N sayısı için yazılmış,

$$\left|\tilde{f}(\omega+\lambda,N)-\tilde{f}(\omega,N)\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-N}^{N} f(t)e^{-i\omega t}\left(e^{-i\lambda t}-1\right)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-N}^{N}\left| f(t)\right|^2 dt}\;.\;\sqrt{\int_{-N}^{N}\left|e^{-i\omega t}-1\right|^2 dt}$$

eşitsizliğinin her yanından $\lambda\to 0$ şartında limit alalım. Bu eşitsizliğin sağ yanı $\lambda\to 0$ şartında sıfıra yakınsak olduğundan eşitsizliğin sol yanında sıfıra yakınsak olur. Bunula da $\tilde{f}(\omega,N)$ fonksiyonunun her bir N sayısında $\omega\in(-\infty,\infty)$ noktasında ω değişkenine göre sürekli olduğu ispatlanmış olur.

Fourier integrali teorisinde aşağıdaki çok önemli olan teorem ispatlanır.

Teorem 5.3 (Plancherel). $L_2(-\infty,\infty)$ uzayından alınmış her bir $f(t)$ fonksiyonu için (5.1.15) formülü ile tanımlanan $\tilde{f}(\omega,N)\in L_2(-\infty,\infty)$ dizisi orta quadratik olarak bir $\tilde{f}(\omega)\in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonuna yakınsak olur. Böylece, $\tilde{f}(\omega)$fonksiyonu $-\infty<\omega<\infty$ aralığında karesi ile integrallenendir ve

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\left|\tilde{f}(\omega,N)-\tilde{f}(\omega)\right|^2 d\omega=0$$

dır. Burada belirlenen $\tilde{f}(\omega)$ fonksionuna $f(t)$ fonksiyonunun $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında Fourier dönüşümü denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (5.1.16)$$

ve

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (5.1.17)$$

.

$\tilde{f}(\omega)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki Parseval eşitliği doğrudur.

Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{f}(\omega) \right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt \qquad (5.1.18)$$

dır. Eğer özel halde $L_1(-\infty,\infty)$ uzayına da dahil olursa, o zaman $\tilde{f}(\omega)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonunun adi anlamda Fourier dönüşümü olur.

Aşağıdaki dönüşüm formülleri doğrudur, yani

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-it} \, dt, \qquad (5.1.19)$$

ve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} \, d\omega \qquad (5.1.20)$$

olur. (5.1.19) ve (5.1.20) formüllerindeki eşitlikler uygun olarak hemen hemen tüm ω ve t değişkenleri için doğrudur.

(5.1.19) ve (5.1.20) formüllerinde diferansiyelleme ve integralleme işlemlerinin yerleri değiştirilebildiğinde (5.1.19) – (5.1.20) dönüşüm formülleri adi Fourier dönüşüm formülleri olur.

Örnek. $f(t) = \dfrac{\sin \alpha t}{t}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için $(-\infty,\infty)$ aralığında $|f(t)|$ fonksiyonunun integrali yoktur. Buna göre de $L_1(-\infty,\infty)$ anlamda bu fonksiyonun Fourier dönüşümü yoktur. Burada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} e^{-i\omega t} \, dt$$

integrali $\omega = \pm\alpha$ değerlerinde ıraksak olur. Ama,

$$f(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}$$

fonksiyonu karesi ile integrallenen fonksiyondur. Buna göre de bu fonksiyonun $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında Fourier dönüşümü vardır. Yani,

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\frac{\left(e^{-i\omega t}-1\right)}{-it}dt$$

eşitliği w değişkeninin hemen hemen tüm değerlerinde anlamı vardır. Bu formülde integral altındaki fonksiyon mutlak integrallenendir.

$\alpha > 0$, $\omega > 0$ için,

$$\tilde{f}_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\frac{e^{-i\omega t}-1}{-it}\,dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha t\sin\omega t}{t^2}\,dt=\begin{cases}\pi\omega & ,\omega<\alpha\\ \pi\alpha & ,\omega>\alpha\end{cases}$$

olduğu bulunur. Buna göre de,

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{d}{d\omega}\tilde{f}_1(\omega)=\begin{cases}\pi & ,\omega<\alpha\\ 0 & ,\omega>\alpha\end{cases}$$

formülü bulunur.

5.2. Eksponensial Tipli Tam Fonksiyonlarla Finit Spektrli Fonksiyonlar Arasında Bağlantı.

5.2.1. Wiener-Paley Teoremi

Aşağıda ifade edeceğimiz Wiener-Paley teoremi eksponensial tipli tam fonksiyonlarla finit spektrli fonksiyonlar arasında bağlantı olduğunu gösterir.

$L_2(-\alpha,\alpha)$ uzayından herhangi bir $\tilde{f}(\omega)\in L_2(-\alpha,\alpha)$ fonksiyonunu ele alalım. Burada α sayısının sonlu olduğunu $[-\alpha,\alpha]$ aralığı dışında $\tilde{f}(\omega)=0$ olduğunu da varsayalım.

O zaman

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \tag{5.2.1}$$

formülü ile tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ aralığında karesiyle integrallenen olduğunu, yani $f(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ olduğunu ve $f(t)$ fonksiyonunun tüm kompleks $z=t+i\tau$ düzlemine derecesi α sayısını aşmayan tam fonksiyon gibi devam ettirilebildiğinin mümkün olduğunu gösterelim.

(5.2.1) eşitliği ile gösterilen $f(t)$ fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ aralığında karesiyle integrallenen olduğu, yani $f(t)\in L_2\,(-\infty,\infty)$ olması aşağıdaki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\, \tilde{f}(\omega)\right|^2 d\omega < +\infty \tag{5.2.2}$$

Parseval eşitliğinden alınır.

$f(t)$ fonksiyonunun reel $-\infty < t < +\infty$ ekseninden kompleks $z = t + i\tau$ düzlemine analitik devam ettirmek için (5.2.1) formülünde t yerine $z = t + i\tau$ alalım. O zaman

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega z}\, d\omega \tag{5.2.3}$$

buluruz. (5.2.3) eşitliği ile tanımlanan bu $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemin her bir z noktasında $f'(z)$ türevi olduğundan bu fonksiyon tüm z kompleks düzlemde analitiktir ve aşağıdaki şekilde değerlendirilir.

$$|\, f(z)\,| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\, \tilde{f}(\omega)\right| e^{|\, t\,\omega\,|}\, d\omega \le c\, e^{\alpha |\,\tau\,|} \le c\, e^{\alpha |\, z\,|}$$

Burada,

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\, \tilde{f}(\omega)\right|\, d\omega$$

dır. Böylece,

$$|\, f(z)| \le c\, e^{\alpha |\, z\,|}$$

eşitsizliği $|z|$-nin yeteri kadar büyük değerlerinde sağlandığından (5.2.3) eşitliği ile tanımlanan ve kompleks düzlemde analitik olan $f(z)$ fonksiyonunun derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon olduğu görülür.

Reel $-\infty < t < +\infty$ ekseninde karesiyle integrallenen ve tüm $z = t + i\tau$ kompleks düzleminde ise derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyonların tüm mümkün kümesini W_α ile işaret edelim. Burada biz (5.2.1) eşitliği ile gösterilen finit spektrli $f(t)$ fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ reel ekseninden $z = t + i\tau$kompleks düzlemine analitik devamı olan $f(z)$ fonksiyonunun W_α sınıfına dahil olduğunu gösterdik.

Bunun tersinin de doğru olduğu gösterilir. $f(z) \in W_\alpha$ olduğunda, yani $f(z)$ fonksiyonu reel $(-\infty,\infty)$ ekseninde karesiyle inteğrallenen ve tüm z kompleks düzlemde derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli fonksiyon olduğunda bu fonksiyonun spektri $[-\alpha,\alpha]$ taşıyıcılı finit fonksiyon olur, yani bu fonksiyon $[-\alpha,\alpha]$ aralığı dışında sıfıra eşit olan ve karesiyle integrallenen bir $f(\omega)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olur.

Tüm bu sonuclar Wiener-Paley teoreminde verilir:

Wiener-Paley Teoremi.

Reel $-\infty < t < +\infty$ ekseninde karesiyle integrallenen $f(t)$ fonksiyonunun $\tilde{f}(\omega) \in L_2(-\alpha,\alpha)$ olmak üzere,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{5.2.1}$$

şeklinde gösterilebilmesi için, yani $f(t)$ fonksiyonunun karesiyle integrallenen finit spektrli fonksiyon olması için gerekli ve yeterli şart $f(t)$ fonksiyonunun tüm kompleks $z = t + i\tau$ düzlemine derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam analitik fonksiyon gibi analitik devam ettirilebilmesidir.

İspat. Bu teoremin yeterlilik şartı üstte ispatlanmıştır. Yani $f(t)$ fonksiyonu (5.2.1) şeklinde gösterildiğinde bu fonksiyonun (5.2.3) formülünün yardımıyla derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam analitik fonksiyon gibi tüm kompleks düzlemde tanımlandığını ve reel $(-\infty,\infty)$ aralığında ise karesiyle integrallenen olduğunu gösterdik. Şimdi burada biz teoremin şartının gerekli olduğunu ispatlayalım. Burada biz W_α sınıfından alınan her bir $f(z)$ fonksiyonunun (5.2.3) formülü ile gösterilebildiğini gösterelim. (5.2.3) formülü ile gösterilen $f(z)$ fonksiyonu reel $(-\infty,\infty)$ ekseninde (5.2.1) formülü ile verilen $f(t)$ fonksiyonu ile çakıştığından (5.2.1) formülü W_α sınıfından alınan eksponensial tipli tam fonksiyonların spektral açılımı olur.

W_α sınıfının tanımına esasen $f(t)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında karesiyle integrallenendir, yani $L_2(-\infty,\infty)$ uzayına dahildir. Buna göre de $f(t)$ fonksiyonunun karesiyle integrallenen $\tilde{f}(\omega)$ Fourier dönüşümü vardır:

$$\tilde{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt}\, dt \tag{5.2.4}$$

Bu eşitlik orta quadratik yakınsaklık anlamdadır. Böylece, (5.2.4) eşitliği ile tanımlanan $\tilde{f}(w)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olduğundan ve $\tilde{f}(w)$ fonksiyonu (5.2.1) gösterilişinin esasını oluşturduğundan bizim esas problemimiz $f(z)$ fonksiyonunun W_α sınıfına dahil olmasından, özellikle de $f(z)$ fonksiyonunun derecesi α sayısını aşmayan tam fonksiyon olmasından $\tilde{f}(w)$ fonksiyonunun $(-\alpha,\alpha)$ aralığı dışında hemen hemen tüm ω için sıfıra eşit olmasını ispatlamaktan oluşmaktadır, yani $\tilde{f}(w) = 0$, $\omega > \alpha$ ve $\omega < -\alpha$ göstermemiz gerekmektedir.

Gerçekten de, eğer

$$\tilde{f}(w) = 0, \quad |w| > \alpha \tag{5.2.5}$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman ters Fourier dönüşümüne esasen,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(w)\, e^{iwt}\, dw \tag{5.2.6}$$

eşitliği yazılır.

(5.2.6) formülünde t değişkeni yerine $z = t + i\tau$ alsak (5.2.6) eşitliğinin sağ yanı W_α sınıfına dahil olan tam fonksiyon olur. Aynı zamanda bu fonksiyon reel $(-\infty,\infty)$ ekseninde $f(t)$ fonksiyonu ile çakıştığından analitik fonksiyonların teklik teoreminden

$f(z) \in W_{\alpha}$ fonksiyonu ile (5.2.6) formülünün sağ yanı ile tanımlanan tam fonksiyonun çakıştığı anlaşılır.

Şimdi (5.2.5) eşitliğini ispatlayalım. Bunun için önce $f(t)$ fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ ekseninde mutlak integrallenen olduğunu da, yani $f(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ olduğunu da varsayalım. O zaman (5.2.4) Fourier dönüşümü adi anlamda tanımlanmış olur. Bu halde $\tilde{f}(\omega)$ fonksiyonu her bir $\omega \in (-\infty,\infty)$ noktasında sürekli fonksiyon olur. (5.2.4) dönüşümünü aşağıdaki iki integrale ayıralım, buna göre

$$\tilde{f}(w) = \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-iwt} \, dt + \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \tag{5.2.7}$$

olur. (5.2.7) eşitliğinin sağ yanındaki birinci ve ikinci integralleri uygun olarak

$$\phi_{+}(iw) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \tag{5.2.8}$$

ve

$$\phi_{-}(iw) = \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{iwt} dt \tag{5.2.9}$$

şeklinde işaret edelim.

Böylece, (5.2.5) eşitliğinin ispatı, $\tilde{f}(w) = \phi_{+}(iw) + \phi_{-}(iw)$ olduğundan,

$$\phi_{+}(iw) + \phi_{-}(iw) = 0, \qquad |w| > \alpha \tag{5.2.10}$$

eşitliğinin ispatına getirilmiş olur.

Şimdi (5.2.8) formülünde $i\omega$ yerine $z = \rho + i\,\omega$ alalım. O zaman,

$$\phi_{+}(z) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-zt} dt \tag{5.2.11}$$

fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonunun $\theta = 0$, yani

$$t = \rho e^{i\theta}\big|_{\theta=0} = \rho$$

hali için Borel dönüşümü olduğu görülür. $\phi_{+}(z)$ fonksiyonu sağ yanı z = ρ + i ω düzleminde analitiktir ve sanal eksenle birlikte kapalı sağ yarı düzlemde süreklidir.

f(z) fonksiyonu W_α sınıfından alındığından $\phi_{+}(z)$ fonksiyonu $|z| > \alpha$ bölgesinde f(z) fonksiyonunun Borell anlamda "assosiasiya" olunmuş g(z) fonksiyonu ile çakışır. $\phi_{+}(z)$ integralinde seçilmiş integralleme yolu için $\phi_{+}(z)$ fonksiyonu g(z) fonksiyonu ile Rez = ρ >α yarı düzleminde çakışırlar.

(5.2.11) formülü ile tanımlanan,

$$\phi_{+}(\rho + iw) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\rho + i w)t}\, dt \tag{5.2.12}$$

integrali keyfi ε > 0 sayısı verildiğinde ρ >ε için düzgün yakınsak olduğundan g(z) fonksiyonu ρ > 0 değerine kadar analitik devam ettirir.

Benzer şekilde,

$$\xi = \rho e^{-i\pi} = -\rho$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{-}(z) &= \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-zt} dt = -\int_{0}^{-\infty} f(t)\, e^{-zt} dt = \\ &= \int_{0}^{\infty} f(-\xi)\, e^{z\,\xi} d\xi = -\int f(\xi)\, e^{-z\xi}\, d\xi \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

buluruz. Buna göre de $-\phi_{-}(z)$ fonksiyonu f(ξ φ) fonksiyonunun θ=π için Borell dönüşümüdür. Burada seçilmiş integralleme eğrisinde $-\phi_{-}(z)$ fonksiyonunun, Rez = ρ < -α için f(z) fonksiyonunun Borell anlamda "assosiasiya" olunmuş g(z) fonksiyonu ile çakışır. Diğer yandan keyfi ε > 0 sayısı verildiğinde ρ < -ε < 0 için (5.2.13) integrali düzgün yakınsak olduğundan (5.2.13) integrali g (z) fonksiyonunun sanal eksendeki analitik devamını verir.

Böylece, $\phi_+(z)$ fonksiyonu g(z) fonksiyonunun tüm sağ yarı düzlemde analitik devamını, $-\phi(z)$ fonksiyonu ise g(z) fonksiyonunun tüm sol yarı düzlemdeki analitik devamını verir.

$$g(z)=\begin{cases}\phi_+(z) & , \quad \rho>0 \\ -\phi_-(z) & , \quad \rho<0\end{cases} \tag{5.2.14}$$

Bundan ilave g(z) fonksiyonu $|z|>\alpha$ bölgesinde analitik olduğundan, sanal eksenin $|i\omega|>\alpha$ kısmında da analitiktir. Buna göre de g(z) fonksiyonu kompleks düzlemin sanal eksenin

$$-\alpha \leq \ \mathrm{Im} z \ \leq \alpha$$

aralığı üzere kesilmesinden sonra yerde kalan bölgesinde analitiktir.

Buna göre de $\omega > \alpha$ ve $\omega < -\alpha$ için aşağıdaki limitler vardır.

$$\begin{cases} g(iw)=\lim\limits_{\sigma\to+0} g(\sigma+iw)=\lim\limits_{\sigma\to0+} \phi_+(\sigma+iw)=\phi_+(iw) \\ g(iw)=\lim\limits_{\sigma\to0-} g(\sigma+iw)=\lim\limits_{\sigma\to0}\left(-\phi_-(\sigma+iw)\right)=-\phi_-(iw)\end{cases} \tag{5.2.15}$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak (5.2.10) eşitliğini elde ederiz.

Böylece, biz teoremin gereklilik şartını $f(t)$ fonksiyonunun karesiyle ve birinci dereceden integrallenen olduğu hal için ispatladık. Ama teoremde $f(t)$ fonksiyonunun yalnız karesiyle integrallenen olduğu farz olunur. Teoremi $f(t)$ fonksiyonunun yalnız karesiyle integrallenen olduğu haller için ispatlamak amacıyla bir ε parametresine bağlı $f_\varepsilon(t)=f(t)\dfrac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}$ formülü ile tanımlanan $f_\varepsilon(t)$ fonksiyonlar kümesini ele alalım. Burada,

$$f_\varepsilon(t)=f(t)\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t} \tag{5.2.16}$$

formülünde $f(t)$ fonksiyonu derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyondur ve bu fonksiyonun reel eksende karesiyle integrallenen olduğunu varsayalım. (5.2.16) formülündeki $\dfrac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t}$ fonksiyonu ise ε dereceli tam fonksiyondur. Bu yüzden $|z|$-nin büyük değerlerinde,

$$|f(z)| < c_1 e^{\alpha |z|}$$

ve

$$\left|\frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z}\right| < c_2 e^{\varepsilon |z|}$$

eşitliklerinden,

$$|f_\varepsilon(z)| < c e^{(\alpha+\varepsilon)|z|} \qquad (5.2.17)$$

eşitsizliği bulunur.

(5.2.17) eşitsizliğinden $f_\varepsilon(z)$ fonksiyonunun derecesi $(\alpha+\varepsilon)$ sayısını aşmayan tam fonksiyon olduğu görülür.

$f_\varepsilon(z)$ fonksiyonunda reel eksende sadece integrallenendir, yani her bir ε sayısı için $f_\varepsilon(t) \in L_1(-\infty,\infty)$. Gerçekten de,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t}\right| dt \le \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt}.\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{(\varepsilon t)^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt} \qquad (5.2.18)$$

dır. Bu eşitsizliğin sağ yanı her bir ε > 0 sayısı için sınırlıdır. Buna göre de üstte ispatlanmış hale uygun olarak $f_\varepsilon(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümün $\tilde{f}_\varepsilon(w)$ fonksiyonu $|w| > \alpha+\varepsilon$ bölgesinde sıfıra dönüşür.

$\tilde{f}(w)$ ile f(t) fonksiyonunun orta quadratik anlamda, yani $L_2(-\infty,\infty)$ anlamında Fourier dönüşümünü işaret edelim. Şimdi $f(t) - f_\varepsilon(t)$ fonksiyonu için Parseval eşitliğini yazalım.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(w)-\tilde{f}_{\varepsilon}(w)\right|^2 dw=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)-f_{\varepsilon}(t)\right|^2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2\left|1-\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}\right|^2 dt \quad . \tag{5.2.19}$$

Bu eşitliğin sol yanı $\varepsilon\to 0$ şartında sıfıra yakınsak olduğundan

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(w)-\tilde{f}_{\varepsilon}(w)\right|^2 dw=0 \tag{5.2.20}$$

buluruz. Buradan da, $|w|>\alpha$ şartını sağlayan hemen hemen tüm w için $\tilde{f}(w)=0$ olduğu alınır. Bununla da bu teorem –Wiener- Paley teoremi tam olarak ispatlanmış olur.

Not. $f(z)$ fonksiyonu derecesi α sayısını aşmayan tam fonksiyon olduğunda $f'(z)$ fonksiyonunun da derecesi α sayısını aşmayan tam fonksiyon olduğu önceki bölümde gösterilmişti. Burada $f(z)$ fonksiyonu W_α sınıfından olduğunda $f'(z)$ fonksiyonunun da W_α sınıfından olduğunu gösterelim. Bunun için (5.2.1) eşitliğinin her yanını t değişkenine göre diferansiyelleyelim. O zaman

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}iw\tilde{f}(w)e^{iwt}dw \tag{5.2.21}$$

buluruz. Burada $|w|>\alpha$ şartını sağlayan hemen hemen tüm w için $\tilde{f}(w)=0$ olduğundan $iw\tilde{f}(w)$ fonksiyonunda $(-\alpha,\alpha)$ aralığı dışında hemen hemen tüm ω için sıfıra eşit olur. Bundan ilave her bir sonlu α sayısı için $\tilde{f}(w)\in L_2(-\alpha,\alpha)$ olduğundan $iw\tilde{f}(w)\in L_2(-\alpha,\alpha)$ olduğunda alınır. (5.2.21) eşitliğini göz önünde tutarak Wiener-Paley teoremini (5.2.21) eşitliğine uygulayarak $f'(z)$ fonksiyonunun W_α sınıfına dahil olduğunu alırız. Bu uygulama projesine ardışık devak ettirerek $f(z)$ fonksiyonunun W_α sınıfına dahil olmasından bu fonksiyonun tüm $f^{(n)}(z)$, n = 1,2,3,... türevlerinin de W_α sınıfına dahil olduğunu alırız.

5.2.2. Wiener-Paley Teoreminin Genelleşmesi

Burada önce W_α sınıfından alınan her bir f (z) fonksiyonunun reel (-∞, ∞) ekseninde sınırlı olduğunu dikkate alalım. Gerçekten de, Cauchy-Schwarz eşitsizliğine esasen

$$
\begin{aligned}
| f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(w) e^{iwt} dw \right| \le \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \tilde{f}(w) \right|^2 dw \int_{-\alpha}^{\alpha} dw} \\
&= \sqrt{\frac{2\alpha}{(2\pi)^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \tilde{f}(w) \right|^2 dw}
\end{aligned}
\tag{5.2.22}
$$

buluruz. Ama genelde, sonlu dereceli eksponensial tipli tam fonksiyonun reel (-∞,∞) ekseninde sınırlı olmasından onun bu reel eksende karesi ile integrallenmesi alınmıyor. Mesela, $f(t) = \cos\omega_0 t$ fonksiyonu ω_0 dereceli tam fonksiyondur ve reel eksen üzerinde sınırlıdır. Ama bu fonksiyon reel eksende karesiyle integrallenmiyor:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 w_0 t \, dt = \infty
$$

dır. Derecesi α sayısını aşmayan ve reel (-∞,∞) ekseni üzerinde sınırlı olan eksponensial tipli tam fonksiyonların kümesini B_α ile gösterelim. B_α sınıfından alınan her bir fonksiyon reel (-∞,∞) ekseninde kendi sabiti ile sınırlıdır, yani $f \in B_\alpha$ olduğunda, öyle $c_f > 0$ sabiti bulunur ki, keyfi $t \in (-\infty, \infty)$ için $|f(t)| < c_f$ olur. Mesela,

$$
f(z) = \sum_K c_K e^{i\omega_K z} \qquad , \qquad -\alpha < \omega_K < \alpha
$$

şekilli fonksiyonlar $\sum_K |c_K| < +\infty$ şartında B_α sınıfına dahil olur. Genelde

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t} d\omega
$$

integrali ile gösterilen $f(z)$ fonksiyonunun

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \tilde{f}(w) \right| dw < +\infty$$

şartında B_α sınıfına dahil olduğu açıktır. Ama bu sonuncu şarttan, genelde $\left| \tilde{f}(w) \right|^2$ fonksiyonunun integrali sınırlı olmayabilir. Buna göre de B_α sınıfı W_α sınıfından daha geniş bir sınıf olduğu görülür.

B_α sınıfından her hangi bir $f(z)$ fonksiyonu alalım. $f(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan bu fonksiyonu tüm kompleks düzlemde yakınsak olan aşağıdaki kuvvet serisi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(0) + z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu sonuncu eşitlikten,

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

fonksiyonunun da derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon olduğu alınır. Diğer yandan $-\infty < t < +\infty$ için,

$$|f(t)| \le C$$

olduğundan t değişkeninin büyük değerleri için,

$$|g(t)| \le \frac{2C}{|t|}$$

eşitsizliği bulunur. Bu sonuncu eşitsizlikten de,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < +\infty$$

eşitsizliği bulunur. Böylece, $g(z) \in W_\alpha$. Buna göre de, Wiener-Paley teoremine esasen g(z) fonksiyonu için aşağıdaki gösteriliş doğrudur, yani

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{g}(w)e^{iwz}dw$$

dır. Bu gösterilişte $\tilde{g}(w)$ fonksiyonu (-α,α) aralığında karesiyle integrallenen fonksiyondur. Sonuçta B_α sınıfına dahil olan her bir $f(z)\in B_\alpha$ için aşağıdaki

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{g}(w)\,e^{iwz}dw \tag{5.2.23}$$

gösterilişi almış oluruz. Şimdi reel eksende $|t|\to\infty$ şartında $|t|^m$ kuvvetinden büyük hızla artmayan yani $t\in(-\infty,\infty)$ için $|t|\to\infty$ şartında,

$$|f(t)|\leq C|t|^m$$

eşitsizliğini sağlayan, derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyonların tüm mümkün kümesini $S_{\alpha m}$ ile işaret edelim. m = 0 olduğunda $S_{\alpha 0}$ sınıfının B_α sınıfı ile çakıştığı açıktır.

Şimdi burada $S_{\alpha m}$ sınıfının fonksiyonları için spektral açılım verelim. Bunun için $S_{\alpha m}$ sınıfından keyfi $f(z)$ fonksiyonu alalım. $f(z)$ tam fonksiyon olduğundan bu fonksiyonu tüm kompleks düzlemde yakınsak olan aşağıdaki kuvvet serisi şeklinde gösterebiliriz. Buna göre

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n=C_0+C_1 z+\ldots+C_m z^m+z^{m+1}\sum_{n=m+1}^{\infty}C_n z^{n-m-1} \tag{5.2.24}$$

dır, burada,

$$C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad , \qquad n=0,1,2,...$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada $f(z)$ fonksiyonu reel $(-\infty,\infty)$ ekseninde $|t|\to\infty$ şartında $|t|^m$ kuvvetinin artma hızını aşmayan hızla artabilmesi mümkün olduğundan,

$$g(z)=\frac{f(z)-\left(f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\ldots+\frac{f^{(m)}(0)}{n!}z^m\right)}{z^{m+1}}=\sum_{n=m+1}^{\infty}C_n\,z^{n-m-1}$$

fonksiyonu da derecesi α sayısını aşmayan fonksiyondur ve g(z) fonksiyonu reel -∞ < t < +∞ ekseninde karesi ile integrallenen fonksiyon olur. Buna göre de Wiener-Paley teoremine esasen g(z) fonksiyonu için aşağıdaki spektral açılımı

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{g}(w)\,e^{iwz}dw \qquad (5.2.25)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\tilde{g}(w)$ fonksiyonu (-α,α) aralığında karesi ile integrallenen fonksiyondur. Buradan da her bir $f(z)\in S_{\alpha m}$ fonksiyonu için

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\ldots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}z^m+\frac{z^{m+1}}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{g}(w)e^{iwz}dw \qquad (5.2.26)$$

açılımı buluruz. $S_{\alpha m}$ sınıfının fonksiyonları için aldığımız bu açılımı Fourier dönüşümü şeklinde yazmak için aşağıdaki

$$z^k=i^k\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta^{(k)}(w)\,e^{iwz}dw \qquad (5.2.27)$$

formülünden istifade edelim. Burada ε > 0 keyfi pozitif sayı δ(ω) Dirac-ın δ-fonksiyonu $\delta^{(k)}(w)$ ise $\delta(w)$ fonksiyonunun k-ıncı mertebeden türevidir.

(5.2.27) formülünden istifade ederek (5.2.26) açılımını aşağıdaki şekilde yazalım:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{z^{m+1}\tilde{g}(w)+2\pi\sum_{K=0}^{m}\frac{i^k f^{(k)}(0)}{K!}\delta^{(k)}(W)\right\}e^{iwz}dw \qquad (5.2.28)$$

Böylece, aşağıdaki Wiener-Paley-Schwarz teoremi ispatlanmış olur.

Wiener-Paley-Schwarz Teoremi.

Reel -∞ < t < +∞ ekseninde $|\,t\,| \to \infty$ şartında $|\,t\,|^m$ kuvvetinin artma hızını aşmayan hızla artabilen f(t) fonksiyonunun (5.2.28) şeklinde gösterilebilmesi için, yani (5.2.28) şekilli finit spektrli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart bu f(t) fonksiyonunun reel -∞ < t < +∞ ekseninden z = t + iτ kompleks düzlemine derecesi α sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon gibi analitik devam ettirilebilmesidir.

5.3. Eksponensial Tipli Tam Fonksiyonlarla Finit Fonksiyonlar Arasında Bağlantı

Reel -∞ < t < +∞ aralığında karesiyle integrallenen f(t) fonksiyonu [-T,T] aralığı dışında sıfıra dönüştüğünde bu fonksiyonun $\tilde{f}(\omega)$ Fourier dönüşümü karesiyle integrallenen olmakla birlikte onu -∞ < ω < ∞ reel ekseninden z = ω + iσ kompleks düzlemine derecesi T sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon gibi analitik devam ettirmek olur. Gerçekten de,

$$\tilde{f}(z) = \int_{-T}^{T} f(t)e^{-izt}dt$$

ifadesi tüm kompleks z = ω + i ρ düzleminin her bir z noktasında tanımlanmıştır. Bu ifade z değişkeninin analitik fonksiyonu olmakla birlikte

$$|\,\tilde{f}(z)| \le \int_{-T}^{T} |\,f(t)|e^{|\,\rho t\,|}\,dt \le C\,e^{T\,|\,\rho\,|} \le C\,e^{T\,|\,z\,|}$$

şekilde değerlendirilebilir, burada C seçilmiş sabittir.

Buradan da karesiyle integrallenen ve [-T,T] aralığı dışında sıfıra dönüşen f(t) fonksiyonunun $\tilde{f}(w)$ Fourier dönüşümünün derecesi T sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon olduğu görülür.

Buna ters olan aşağıdaki teoremde doğrudur.

Teorem 5.4 (Wiener-Paley Teoremi). Reel -∞ < ω < ∞ ekseninde karesiyle integrallenen $\tilde{f}(z)$ fonksiyonu z=ω+iτ kompleks düzleminde derecesi T sayısını aşmayan eksponensial tipli tam fonksiyon olduğunda bu $\tilde{f}(w)$ fonksiyonu [-T, T] aralığı dışında sıfıra eşit olan reel $-\infty < t < \infty$ ekseninde karesiyle integrallenen bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür.

Bu teoremin ispatı verilmiş Wiener-Paley teoreminin ispatı gibi ispatlanır.

6. TAM FONKSİYONLARIN SONSUZ ÇARPANLARINA AÇILIMI

6.1. Sonsuz Çarpımlar ve Onların Bazı Özellikleri

6.1.1. Yakınsak ve Iraksak Sonsuz Çarpımlar

Sıfırdan farklı, sonlu α_1, α_2, ...,α_n, ... kompleks sayılarının

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad (6.1.1)$$

sonsuz çarpımını ele alalım.

Bu çarpımın birinci n çarpanlarının çarpımını P_n ile gösterelim ve

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

eşitliği ile tanımlanmış $\{P_n\}$ dizisini ele alalım.

Eğer $\{P_n\}$ dizisinin sonlu ve sıfırdan farklı limiti varsa, yani $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, o zaman (6.1.1) sonsuz çarpımı yakınsaktır denir ve P sayısına bu çarpımın değeri denir. Böylece

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad (6.1.2)$$

$P = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k \neq 0$ olduğundan (6.1.1) sonsuz çarpımı yakınsak olduğunda,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \qquad (6.1.3)$$

eşitliği alınır. Böylece, (6.1.1) sonsuz çarpımının yakınsaklığı için (6.1.3) şartı gerekli şarttır.

Örnek 1. Sonsuz

$$1.\frac{2^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{3^2-1}\cdots\frac{n^2}{n^2-1}\cdots$$

çarpımının yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$P_n=1.\frac{2^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{3^2-1}\cdots\frac{n^2}{n^2-1}$$

alalım. P_n sonlu çarpımını

$$P_n=1.\frac{2^2}{(2+1)(2-1)}\cdot\frac{3^2}{(3+1)(3-1)}\cdot\frac{4^2}{(4+1)(4-1)}$$
$$\cdots\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\cdot\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}=\frac{2n}{n+1}$$

şekilde gösterelim. Buradan da $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ olur. Böylece bu sonsuz çarpımın değeri 2-dir.

Örnek 2. Sonsuz

$$1\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3}\,....\,\frac{1}{n}\cdots$$

sonsuz çarpımının ıraksak olduğunu gösterelim. Bu sonsuz çarpım için $P_n=\frac{1}{n!}$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$. Buna göre de bu sonsuz çarpım ıraksaktır.

(6.1.1) sonsuz çarpımını

$$(1+a_1)\,(1+a_2)\ldots(1+a_k)\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) \qquad (6.1.4)$$

şekilde yazalım. Burada a_1, a_2, ..., a_k, ... kompleks sayılardır. Uygun olarak (6.1.4) sonsuz çarpımı için $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$ dizisinin sonlu sıfırdan farklı p limiti olduğunda bu sonsuz çarpım yakınsaktır denir. Bu tanımdan (6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerekli şart

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+a_k\right)=1 \qquad (6.1.5)$$

olduğu çıkar.

(6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsaklığının tanımından bu çarpımın yakınsak olması halinde her bir 1+a_k, k = 1,2,3,... çarpanlarının sıfıra eşit olmadığı görülür. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ şartının (6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerekli şart olduğu açıktır.

Sonsuz çarpımın yakınsaklığının tanımı eşitsizlikle de verilir. (6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsaklığını eşitsizlikle vermek için önce bu çarpımın P sayısına yakınsak olduğunu varsayalım. Bu halde $\frac{P}{P_n}$ dizisi 1 sayısına yakınsaktır.

Gerçekten de,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P}{P_n}=\frac{P}{\lim\limits_{n\to\infty}P_n}=\frac{P}{P}=1$$

dir. Tersine, eğer $\frac{P}{P_n}$ orantısı 1 sayısına yakınsak olursa, o zaman (6.1.4) çarpımının p ≠ 0 sayısına yakınsak olduğu alınır. Buna göre (6.1.4) çarpımının yakınsaklığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Keyfi alınmış ε > 0 sayısına karşı öyle N sayısı bulunur ki, her bir n ≥ N sayıları için,

$$\left|\frac{P}{P_n}-1\right|<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanırsa, (6.1.4) çarpımı P≠0 sayısına yakınsaktır denir.

6.1.2. Sonsuz Çarpımların Yakınsaklık Kriterleri

(6.1.4) çarpımının yakınsaklığını incelemek için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+a_k\right) \tag{6.1.6}$$

seriyi de ele alalım. Bu seride logaritma aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\ln\left(1+a_k\right)=\ln\left|1+a_k\right|+i\arg\left(1+a_k\right) \tag{6.1.7}$$

$$-\pi<\arg\left(1+a_k\right)\leq\pi \tag{6.1.8}$$

(6.1.4) ve (6.1.6) arasında bağlantıyı göstermek için (6.1.6) serisinin kısmi toplamını yazalım. Buna göre

$$S_N=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+a_k\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+a_k\right)=\ln P_n$$

şeklindedir. Buradan da

$$P_n=e^{S_n} \tag{6.1.9}$$

olduğu bulunur. Buradan ise (6.1.6) serisi yakınsak olduğunda, yani $\lim\limits_{h\to\infty} S_n=S$ olduğun da

$$\lim_{n\to\infty} P_n=P=e^{S}\neq 0$$

limiti bulunur. Bu ise, (6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsak olduğunu gösterir. Tersine (6.1.4) sonsuz çarpımı yakınsak olduğunda (6.1.6) serisinin de yakınsak olduğu gösterilir.

Buna göre de (6.1.4) sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter şart (6.1.6) serisinin yakınsak olması olur.

(6.1.4) sonsuz çarpımına uygun (6.1.6) serisi mutlak yakınsak olduğunda (6.1.4) çarpımı mutlak yakınsaktır denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 6.1. Sonsuz $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ çarpımının mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin mutlak yakınsak olmasıdır.

Gerçekten de, seride ve sonsuz çarpımda yakınsak olduğunda her defa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur. Bu yüzden belli bir numaradan başlayarak tüm n sayıları için $|a_n| < \frac{1}{2}$ olur.

O zaman,

$$\left|\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} - 1\right| = \left| -\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} - \ldots \right| \le \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2}$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\ln(1+a_k)}{a_k} \right| < \frac{3}{2}$$

serilerinin mukayese teoremine esasen,

$\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+a_k)|$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serileri birlikte ya yakınsaktır ya da ıraksaktır.

Tanıma göre bu serilerden birincisinin yakınsaklığı sonsuz çarpımın mutlak yakınsak olmasına eşdeğerdir.

Doğal olarak çarpanları fonksiyonlar olan aşağıdaki şekilde,

$$\prod_{K=1}^{\infty} \{1 + f_K(z)\} \tag{6.1.10}$$

sonsuz çarpımları da ele alınır. Eğer bu çarpım D bölgesinin her bir z_0 noktasında yakınsak olursa, o zaman (6.1.10) sonsuz fonksiyonel çarpımı D bölgesinde yakınsaktır denir.

$P_n(z)=\prod_{K=1}^{n}\{1+f_K(z)\}$ dizisi D bölgesinde düzgün yakınsak olduğunda (6.1.10) çarpımı D bölgesinde düzgün yakınsaktır denir.

(6.1.10) sonsuz çarpımının çarpanları olan $1+f_k(z)$, k = 1,2,... fonksiyonlarının her bir D bölgesinde analitik fonksiyonlar olduğunda Weierstassın birinci teoremine esasen (6.1.10) sonsuz çarpımı D bölgesinde düzgün yakınsak olduğunda $P(z)=\lim_{n\to\infty} P_n(z)$ fonksiyonu da D bölgesinde analitik fonksiyon olur.

6.2. Tam Fonksiyonların Sonsuz Çarpım Şeklinde Gösterilişi

Fonksiyonları analitik ifade etmek için sonsuz serilerle birlikte sonsuz çarpımlardan da istifade edilir. Biz bu kesimde her bir tam fonksiyonun, polinomlar gibi çarpanlarına ayrılabildiğini göstereceğiz ve tam fonksiyonların çarpanlarına ayrımının Weierstrass formülünü vereceğiz.

6.2.1. Tam Fonksiyonların Çarpanlarına Ayrımının Weierstrass Formülü

Her n dereceli

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n \quad a_n\neq 0$$

polinomu

$$P_n(z)=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

şeklinde gösterilebilir, burada $z_1, z_2,\ldots, z_n$ sayıları $P_n(z)$ polinomunun kökleridir.

Tersine $z_1, z_2,\ldots, z_n$ sayıları verildiğinde, kökleri bu sayılar olan n dereceli $Q_n(z)$ polinomu

$$Q_n(z)=A_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

şeklinde olur. Burada A_n sıfırdan farklı, sonlu keyfi kompleks sayıdır.

$f(z)$ tam fonksiyonu kompleks düzlemde sonlu sayıda $z_1, z_2,\ldots, z_n$ sıfırları olan tam fonksiyon olduğunda bu fonksiyonun

$$f(z)=g(z)\prod_{k=1}^{n}(z-z_k) \tag{6.2.1}$$

şeklinde gösterilebildiği açıktır. Burada g(z) fonksiyonu kompleks düzlemde sıfırdan farklı olan tamamen belli bir tam fonksiyondur.

Tam $f(z)$ fonksiyonunun sıfırları kümesi M sonsuz küme olduğunda (6.2.1) formülünün bu hal için genelleştirilmesi şartsız ki, çok büyük merak doğurur. Bu halde analitik fonksiyonların teklik teoreminden M kümesinin sayılabilir olması,

$$M = \{z_1, z_2,..., z_n,...\}$$

yani sıfırların numaralanabilir olması ve bu kümenin yalnız bir tek $z = \infty$ noktasının limit noktası olması gerekir.

Burada genelliği bozmadan $z_1, z_2,..., z_n,...$ köklerinin modüllerinin artması yönünde, yani $|z_{k-1}| \leq |z_k|$ şartının sağlanmasıyla numaralandığını varsayalım.

Modülleri eşit olan kökler keyfi sıra ile numaralanabilir.

Sayılabilir sayıda $z_1, z_2,..., z_n...$ kökleri olan tam $f(z)$ fonksiyonunu inşa etmek için önce, sıfırdan farklı kökleri $z_1, z_2,..., z_n$ olan (bu köklerden tekrarlananları da olabilir) ve z = 0 sayısı ise ν mertebeden tekrarlanan kökü olan P(z) polinomunu

$$P(z)=C.z^{\nu}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) \tag{6.2.2}$$

çarpım şeklinde gösterelim, burada C keyfi sabit sayı olmakla,

$$\lim_{z\to 0}\frac{P(z)}{z^{\nu}}=C$$

limitinin değeridir.

Bu (6.2.2) şeklindeki açılım, genelde tam fonksiyonlar için de yazılabilir. Mukayese için sinz fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon tam fonksiyondur ve 0 , ±π, ± 2π ,..., ± nπ... sayıları bu fonksiyonun tekrarlanmayan sade sıfırları ile numaralarsak ve

$$z_{2k-1}=k\pi, \quad z_{2k}=-k\pi$$

ile gösterirsek, o zaman sinz fonksiyonu için

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{6.2.3}$$

açılım yazılabilir. Ama tam fonksiyonlar için, genel halde böyle basit açılım formülü yazmak mümkün olmamaktadır. Gerçekten de, z = 0 sayısı tam f(z) fonksiyonunun ν mertebeden tekrarlanan kökü ve $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots \left(|z_k| \le |z_{k+1}|\right)$ sıfırdan farklı sayıları ve $\lim_{k\to\infty}|z_k| = \infty$ olmak üzere f(z) fonksiyonunun kökleri olduğunda,

$$z^{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)$$

sonsuz çarpımı, genel halde ıraksak ta olabilir.

İstenilmeyen bu durumun kaldırılması için Weierstrass üstteki çarpımın her bir çarpanını,

$$e^{\frac{z}{z_k}+\frac{z^2}{2\,z_k^2}+\dots+\frac{z^{m_k}}{m_k\,z_k^{m_k}}} \tag{6.2.4}$$

şekilde bir çarpan çarpmıştır. (6.2.4) şeklindeki çarpanlar kompleks düzlemin hiçbir noktasında sıfıra dönüşmezler. Ama bu çarpanların uygun şekilde seçilmesiyle alınan sonsuz çarpımın yakınsaklığı sağlanabilir.

Şimdi,

$$z^{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}+\dots+\frac{z^{m_k}}{m_k\,z_k^{m_k}}}$$

sonsuz çarpımında m_k (k = 1,2,...) sayıları öyle seçilebilir ki, bu sonsuz çarpım her bir keyfi $|z| \le R$ dairesinde düzgün yakınsak olsun. O zaman bu sonsuz çarpım bir F(z) tam fonksiyonu ifade eder ki, bu fonksiyonun sıfırları ile f(z) fonksiyonunun sıfırları çakışır. Buradan da f(z) fonksiyonunun ya F(z) fonksiyonu ile çakıştığı, ya da, F(z) fonksiyonundan $e^{g(z)}$ çarpımı ile farklandığı sonucuna varırız. Burada g(z) tam fonksiyondur. Dikkate alalım ki, $e^{g(z)}$ fonksiyonu kompleks düzlemin hiçbir noktasında sıfıra dönüşmeyen tam fonksiyondur.

Sonunda tam $f(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki sonsuz çarpıma açılım formülünü alırız:

$$f(z)=e^{g(z)}z^{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}+\ldots+\frac{z^{m_k}}{m_k z_k^{m_k}}} \tag{6.2.5}$$

(6.2.5) formülüne tam fonksiyonun sonsuz çarpıma açılımının Weierstrass formülü denir.

6.2.2. Weierstrass Formülünün İspatı

Bu kısımda biz (6.2.5) Weierstrass formülünü ispatlayalım. Bunun için önce aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

Lemma 6.1. Eğer tam $f(z) \neq 0$ ve tam $F(z) \neq 0$ fonksiyonlarının tekrarlanma derecesi eşit olan aynı sıfırları varsa, o zaman

$$f(z)=e^{g(z)}F(z)$$

eşitliği doğrudur. Burada g(z) fonksiyonu herhangi bir tam fonksiyondur (özel durumlarda sabitte olabilir).

İspat. Aşağıdaki

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{F(z)}$$

orantıyı ele alalım. $\Psi(z)$ orantısının kutup noktaları yalnız F(z) fonksiyonunun sıfırları olabilir. Ama F(z) fonksiyonunun her bir sıfırı aynı tekrarlanma derecesi ile $f(z)$ fonksiyonunun sıfırıdır. Buna göre de $\Psi(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemde bir tane de polyusu yoktur, yani $\Psi(z)$ orantısı tam fonksiyondur. Aynı yöntemle $\Psi(z)$ orantısının sıfırlarının olmadığı gösterilir. Bu yüzden,

$$h(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

tam fonksiyondur. h(t) tam fonksiyonunu 0 noktasından z noktasına kadar keyfi eğri üzerine integralleyelim. O zaman biz bir $g_1(z)$ tam fonksiyonu

$$g_1(z)=\int_0^z h(\rho)\,d\rho=\int_0^z \frac{\omega'(\rho)}{\omega(\rho)}d\rho=\ln\frac{\omega(z)}{\omega(0)}+2k\pi i$$

elde ederiz. Böylece

$$\ln=\frac{\omega(z)}{\omega(0)}=g_1(z)+2k\pi i, \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

dır. Buradan da,

$$\omega(z)=\psi(0)\,e^{g_1(z)}=e^{g_1(z)+\ln\psi(0)}=e^{g(z)}$$

olur. Burada $g(z)=g_1(z)+\ln\psi(0)$ fonksiyonu tam fonksiyondur. Böylece

$\psi(z)=\dfrac{f(z)}{F(z)}$ orantısından,

$$f(z)=\psi(z)F(z)=e^{g(z)}F(z)$$

olduğu bulunur.

Bununla da lemma ispatlanmış olur.

Bu lemmanın ispatında sıfırları olmayan her bir Ψ(z) tam fonksiyonunun $\psi(z)=e^{g(z)}$ şeklinde yazılabildiği gösterildi, burada g(z) tam fonksiyondur.

Şimdi tam f(z) fonksiyonunun sonlu sayıda sıfırları olduğu hali ele alalım. f(z) tam fonksiyonunun z = 0 sayısı ν mertebeden tekrarlanan sıfırı ve sıfırdan farklı z_1, z_2,..., z_n sayıları ise, f(z) fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları olsun. O zaman

$$P(z)=z^{\nu}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

polinomu ile f(z) fonksiyonunun aynı

$$\underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{\nu},\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$$

sıfırları vardır. Buna göre de lemmaya esasen $f(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$f(z)=e^{g(z)}P(z),$$

veya

$$f(z)=e^{g(z)}\,z^{\nu}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) \tag{6.2.6}$$

dır. Şimdi (6.2.6) şeklinde gösterilişi sonsuz sayıda $z_1, z_2, ..., z_n...$ sıfırdan farklı sıfırları olan $f(z)$ tam fonksiyonu için yazabilmemiz için, sıfırları $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ sayıları olan bir tane tam fonksiyonu inşa etmek gereklidir. Böyle fonksiyonu her zaman inşa etmenin mümkün olduğunu ispatlayalım.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 6.2. Her biri sıfırdan farklı olan, modüllerinin azalmayan sırasıyla dizilmiş, $\left(|z_K|\le|z_{K+1}|\right)$, ∞ noktasına yakınsak olan modüllerinin keyfi $z_1, z_2, ..., z_n...$ sayılarının $\{z_n\}$ dizisi verildiğinde sıfırları bu $\{z_n\}$ sayıları ile çakışan tam $f(z)$ fonksiyonu inşa etmek olur.

Not. $\{z_n\}$ dizisinin bazı terimleri birbirinin yanında yerleşmekle tekrarlanabilir, mesela $z_{n_0+1}=z_{n_0+2}=...=z_{n_0+\alpha}=a$ eşitliği sağlanırsa ve dizinin diğer terimleri a sayısından farklı alınırsa, o zaman a sayısı inşa edilecek $f(z)$ fonksiyonunun α mertebeden tekrarlanan kökü olması gerekir.

İspat. $\{k_n\}$ dizisi negatif olmayan öyle sayısal tam sayıların dizisi olsun ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1} \tag{6.2.7}$$

serisi her bir R ≥ 0 sayısı için yakınsak olsun.

Mesela, teoremin şartındaki özelliğe sahip keyfi $\{z_n\}$ dizisi verildiğinde $\{k_n\}$ dizisi olarak $k_n=[\ln n]$ dizisi istenilen özelliğe sahip olur. Burada $[\ln n]$ işareti $\ln n$ sayısının tam kısmıdır.

$k_n = [\ln n]$ gibi alındığında keyfi R ≥ 0 sayısı için (6.2.7) serisinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$|z_n|$ dizisi $n \to \infty$ şartında +∞ a yakınsak olduğundan öyle N_0 sayısı bulunur ki, n > N_0 eşitsizliğini sağlayan keyfi n sayısı için,

$$\frac{|z_n|}{R} > e^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu sonuncu eşitsizliğin her yanından k_{n+1} mertebeden kuvvet alarak

$$\left(\frac{|z_n|}{R}\right)^{k_n+1} > e^{2([\ln n]+1)} > e^{2\ln n} = n^2$$

eşitsizlikleri yazabiliriz. Buradan ise,

$$\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1} < \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliği bulunur.

Bulunmuş bu sonuncu eşitsizliğe dayanarak mukayese teoremine esasen (6.2.7) serisinin $k_n = [\ln n]$ halinde keyfi R ≥ 0 için yakınsak olduğu görülür.

Ama ayrı ayrı hallerde k_n sayıları olarak bir tane sayı da seçilebilir. Mesela, $|z_n| = n$ olduğunda k_n = 1 almak yeterlidir. Ama $|z_n| = n^2$ olduğunda ise k_n= 0 , n = 1,2,... almak yeterli olur.

$\{z_n\}$ dizisi için gösterilen özellikli $\{k_n\}$ dizisi seçildiğinde sıfırları $\{z_n\}$ sayıları olan $f(z)$ tam fonksiyonu

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\frac{z^2}{2z_n}+\ldots+\frac{z^{k_n}}{K_n\, Z_n^{k_n}}}$$

sonsuz çarpım şeklinde gösterilir. Özel durumda $\{z_n\}$ dizisi için $k_n = 0$ şeklinde seçilirse, o zaman uygun üsler sıfır alınır, yani $f(z)$ fonksiyonu için sonsuz çarpım açılımı bu halde

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

şekilde yazılır. Keyfi pozitif R sayısı alalım. N sayısı $|z_{N+1}| > 2R$ eşitsizliğini sağlayan ilk (birinci) numara olsun. O zaman her bir n > N numarası için $|z_n| > 2R$ eşitsizliği sağlanır.

n > N sayıları için aşağıdaki eşitliği yazalım.

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{\frac{z}{z_m}+\ldots+\frac{z^{k_m}}{K_m z_m^{k_m}}} = \prod_{m=1}^{N}\cdot\prod_{m=N+1}^{n}\cdot \qquad (6.2.8)$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki birinci çarpım $|z| \le 2R$ dairesinde sonlu sayıda $z_1, z_2, \ldots, z_N$ sıfırları olan tam fonksiyondur.

(6.2.8) eşitliğindeki ikinci çarpımı aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k z_m^k}} = \prod_{m=N+1}^{n}\exp\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{K z_m^k}\right\}=$$

$$=\exp\sum_{m=N+1}^{n}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k z_m^k}\right\}$$

$|z| \le R$ ve $m \ge N+1$ için $|z_m| > 2r$ olduğundan,

$$\left|\frac{z}{z_m}\right| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliği doğrudur. Buna göre de,

$$\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k z_m^k}$$

açılımından istifade ederek aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}\right|=\left|\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\frac{z^k}{k\,z_m^k}\right|\le\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k|z_m|^k}\le\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{|z_m|^k}\le$$

$$\le\frac{R^{k_m+1}}{|z_m|^{k_m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{|z_m|^k}=\frac{R^{k_m+1}}{|z_m|^{k_m+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{R}{|z_m|}}<2\frac{R^{k_m+1}}{|z_m|^{k_m+1}},$$

(m>N)

Böylece, sonuçta m > N için,

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}\right|<2\frac{R^{k_m+1}}{|z_m|^{k_m+1}}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten,

$$\sum_{m=N+1}^{\infty}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}\right\}\tag{6.2.9}$$

serisinin mutlak değerinin $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_m|}\right)^{k_m+1}$ serisi ile mukayesesinden (6.2.9) serisinin $|z|<R$ dairesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu alınır.

Buna göre de (8) eşitliğinin her yanından $n\to\infty$ şartında limit alırsak buluruz:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}}=$$

$$=\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{\sum_{k=1}^{k_m}\frac{z^k}{k\,z_m^k}}.e^{\varphi_R(z)}\quad.\tag{6.2.10}$$

(6.2.10) sonsuz çarpımı ile ifade olunan fonksiyon $|z|<R$ dairesinde analitik fonksiyondur.

Dikkate alalım ki, (6.2.9) serisi $|z| < R$ dairesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan,

$$\psi_R(z) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{z_m}\right) + \sum_{k=1}^{k_m} \frac{z^k}{k\, z_m^k} \right\} \tag{6.2.11}$$

serisinin toplamı $\Psi_R(z)$ fonksiyonu $|z| < R$ dairesinde analitik ve bir değerli fonksiyondur.

Burada $R > 0$ sayısı keyfi alındığından,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k\, z_n^k}}$$

sonsuz çarpımının tüm kompleks düzlemde yakınsak olduğunu ve bu çarpımın tüm kompleks düzlemde analitik olan bir fonksiyona yakınsak olduğu alınır. Böylece, sıfırları $\{z_n\}$ sayıları olan $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde inşa edilmiş olur.

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k\, z_n^k}} \tag{6.2.12}$$

sıfırları modüllerinin azalmayan sırasıyla numaralanmış ve $z_n \neq 0$ şartını sağlayan,

$$\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\upsilon}, \qquad z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{6.2.13}$$

sayılar sıfırları olan F(z) fonksiyonu analojik olarak, ispat olunmuş teoreme esasen,

$$F(z) = z^{\upsilon} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k\, z_n^k}}$$

şeklinde inşa edilebilir.

Sonuç da sıfırları (6.2.13) sayıları olan tam $f(z)$ fonksiyonu genel olarak aşağıdaki şekilde gösterildiği bulunur:

$$f(z)=e^{g(z)}z^{\upsilon}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\sum_{k=1}^{k_n}\frac{z^k}{k\,z_n^k}}$$

burada g(z) bir tam fonksiyondur (bu fonksiyon sıfıra da eşit olabilir). Bu ise Weierstrass formülüdür.

Örnek 3. $z_n = n^2$ olduğunda $K_n = 0$ alabiliriz. Buna göre de kökleri $z_n = n^2$ olan tam fonksiyon

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$$

olur.

Eğer $z_n = n$ olursa, $K_n = 1$ alırız. Bu halde kökleri $z_n = n$ olan tam fonksiyon,

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

alınabilir.

Örnek 4.

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

açılımında z yerine $\sqrt{z}$ alsak,

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2\pi^2}\right)$$

açılımını buluruz.

SONUÇ

Bu tezde Tam Fonksiyonların tanımı verildi ve özellikleri gösterildi. Wiener-Paley Teoremi ele alındı ve ispatlandı. Tam Fonksiyonların Artma Hızına Göre Sınıflandırılması verildi.

KAYNAKLAR

1. Privalov İ.İ. Vvedeniye v teoriyu fonksiy kompleksnogo peremennego. M. : Nauka, 1967.
2. Markuşeviç A.İ. Kratkiy Kurs teorii Analitiçeskich fonksiy. M.:Nauka, 1978.
3. Levin B.Ya. Raspredeleniye korney tselıch fonksiy . M . : Gostech izdat, 1956.
4. Churgin Ya.I., Yakovlev **V**.P., Metodı teorii tselıch fonksiy v radio-fizike, teorii svyazii i optike. M.: Fizmatgiz , 1962.
5. Butkovskiy A.G., Structural theory of distributed system .New York 1983.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Sivas'da doğan Sibel KEPENEK, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Kazım Karabekir Paşa İlköğretim Okulu ve Kongre Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında birincilik ile bitirmiştir. 2013 yılında Matematik Öğretmeni olarak Yozgat'ta göreve başlamıştır.

Yüksek lisans eğitimine Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Yatay geçiş yaparak Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında devam etmiştir.

İletişim Bilgileri:

Adres : Aşağı Nohutlu Mah. Öğretmen Vehbi Ulusoy Cad.

Elid Stüdio Sitesi B Blok No:5 YOZGAT

Telefon : (554)6316866

E-posta : sibel_kepenek@hotmail.com