

**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
YENİ JAKOBİ ELİPTİK FONKSİYON ÇÖZÜMLERİ**

**Nail TURHAN**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR**

**Yozgat 2015**



**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
YENİ JAKOBİ ELİPTİK FONKSİYON ÇÖZÜMLERİ**

**Nail TURHAN**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR**

**T.C.**  
**BOZOK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEZ ONAYI**

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111313004 numaralı öğrencisi Nail TURHAN'ın hazırladığı “**Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Yeni Jakobi Eliptik Fonksiyon Çözümleri**” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 11/09/2015 Cuma günü saat 14:00’te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR (Danışman)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 18 / 09 / 2015 tarih ve 26 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

18, 09, 2015



Doç. Dr. Fuat KÖKSAL  
Bozok Üniversitesi  
Fen Bil. Enst. Müdürü

# İÇİNDEKİLER

|  | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| <b>ÖZET .....</b>  | <b>iii</b>   |
| <b>ABSTRACT .....</b>  | <b>iv</b>    |
| <b>TEŞEKKÜR .....</b>  | <b>v</b>     |
| <b>ŞEKİLLER LİSTESİ.....</b>   | <b>vi</b>    |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>  | <b>1</b>     |
| 1.1. Temel Tanımlar.....   | 3            |
| 1.1.1. Diferansiyel Denklemler.....  | 3            |
| 1.1.2. Jakobi Eliptik Fonksiyonlar.....  | 5            |
| 1.1.3. Solitonlar.....   | 8            |
| 1.2. Dengeleme Terimi.....   | 10           |
| <b>2. YENİ TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....</b>   | <b>12</b>    |
| 2.1. Yeni Versiyon Genelleştirilmiş $F$ -Açılım Yöntemi.....                                 | 12           |
| 2.2. Yeni Genelleştirilmiş $F' / F$ -Açılım Yöntemi.....                                     | 14           |
| <b>3. YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ <math>F</math> -AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI.....</b> | <b>16</b>    |
| 3.1. Benjamin-Bona-Mahony Denklemi ve Uygulamaları.....                                      | 16           |
| 3.2. Davey-Stewartson Denklemi ve Uygulamaları .....   | 22           |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ <math>F' / F</math> -AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI.....</b> | <b>35</b> |
| 4.1. Benjamin-Bona-Mahony Denkleminde Uygulamaları .....                                 | 35        |
| 4.2. Davey-Stewartson Denkleminde Uygulamaları.....                                      | 44        |
| <b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>  | <b>56</b> |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>  | <b>58</b> |
| <b>EKLER.....</b>  | <b>63</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>   | <b>66</b> |

# KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YENİ JAKOBİ ELİPTİK FONKSİYON ÇÖZÜMLERİ

Nail TURHAN

Bozok Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi

2015; Sayfa: 66

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

## ÖZET

Bu çalışmada, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yeni jakobi eliptik fonksiyon çözümlerinin bulunabilmesi için mevcut olan  $F$ -Açılım yöntemi ve  $G'/G$ -Açılım yöntemlerinin yeniden geliştirilerek yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi ile yeni geliştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yöntemleri verilmiştir. Bu yöntemler Benjamin-Bona-Mahony denklemi ile Davey-Stewartson denklem sistemine uygulanmış ve literatürde bulunmayan yeni jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Bulunan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizilerek soliton dalgalarının zamana bağlı davranışları gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi, Yeni geliştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yöntemi, Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler

**NEW JACOBI ELLIPTIC FUNCTION SOLUTIONS OF PARTIAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Nail TURHAN**

**Bozok University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Master of Science Thesis**

**2015; Page: 66**

**Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yusuf PANDIR**

**ABSTRACT**

In this study, to find new available Jacobi elliptic function solutions of nonlinear partial differential equations, new version of the generalized  $F$ -expansion and new generalized  $F'/F$  expansion methods are given that available  $F$ -expansion method and  $G'/G$ -expansion methods are improved again. These methods are applied to Benjamin-Bona-Mahony equation and system of equations Davey-Stewartson and new Jacobi elliptic function solutions that cannot be found in literature, are obtained. Also, the behavior of solutions is determined by two and three dimensional graphics depending on the time.

**Keywords:** New version of the generalized F-expansion method, New generalized  $F'/F$  expansion method, Nonlinear partial differential equations, Jacobi elliptic function solutions,



## TEŞEKKÜR

Bu alıőmamın her aőamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve deneyimlerinden her zaman yararlandığım danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR' a, tezin oluőturulması sırasında yaptıkları katkılarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE ve Hasan Hüseyin DÜZGÜN' e teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans yapmamı teővik eden, maddi ve manevi desteğini daima yanımda hissettiğim sevgili eőim Neslihan TURHAN' a çok teşekkür ederim

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
| <b>Şekil 1.1:</b>  | Dalga modeli .....  | 9  |
| <b>Şekil 3.1:</b>  | (3.9) çözüm fonksiyonunun $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1, m = 1/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....                       | 19 |
| <b>Şekil 3.2:</b>  | (3.17) çözüm fonksiyonunun $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1, m = 1/2$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....                      | 21 |
| <b>Şekil 3.3:</b>  | (3.39) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1/2, e_2 = 1, \gamma = 7, p = -1, q = 1, y = 0, m = 1/8$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....   | 26 |
| <b>Şekil 3.4:</b>  | (3.40) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1/2, e_2 = q = 1, \gamma = 7, p = -1, y = 0, m = 1/8$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....      | 26 |
| <b>Şekil 3.5:</b>  | (3.51) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1/2, e_2 = 1/3, \gamma = 2, p = -1, q = 1, y = 0, m = 1/3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..... | 28 |
| <b>Şekil 3.6:</b>  | (3.52) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1/2, e_2 = 1/3, \gamma = 2, p = -1, q = 1, y = 0, m = 1/3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..... | 28 |
| <b>Şekil 3.7:</b>  | (3.63) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 20, p = -1, q = 1, y = 0, m = 4/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 31 |
| <b>Şekil 3.8:</b>  | (3.64) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 20, p = -1, q = 1, y = 0, m = 4/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 31 |
| <b>Şekil 3.9:</b>  | (3.75) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 33 |
| <b>Şekil 3.10:</b> | (3.76) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 34 |
| <b>Şekil 4.1:</b>  | (4.13) çözüm fonksiyonunun $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1, m = 1/3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....                      | 39 |
| <b>Şekil 4.2:</b>  | (4.21) çözüm fonksiyonunun $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1, m = 1/2$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....                      | 41 |
| <b>Şekil 4.3:</b>  | (4.29) çözüm fonksiyonunun $\alpha = \beta = \delta = 1, m = 3/4, e_1 = -1$   |    |

|                    |   |    |
|--------------------|---|----|
|                    | değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....  | 44 |
| <b>Şekil 4.4:</b>  | (4.36) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....   | 47 |
| <b>Şekil 4.5:</b>  | (4.37) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....   | 47 |
| <b>Şekil 4.6:</b>  | (4.54) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 1/2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 1/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..... | 50 |
| <b>Şekil 4.7:</b>  | (4.55) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 1/2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 1/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..... | 51 |
| <b>Şekil 4.8:</b>  | (4.66) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 2, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 1/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 53 |
| <b>Şekil 4.9:</b>  | (4.67) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 2, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 1/5$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....    | 53 |
| <b>Şekil 4.10:</b> | (4.72) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....   | 55 |
| <b>Şekil 4.11:</b> | (4.73) çözüm fonksiyonunun $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1,$<br>$y = 0, m = 3/4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi....    | 55 |

## 1. GİRİŞ

Yaşadığımız dünya ve onunla beraber tüm evren birbirine bağlı olayların bir düzeni içinde zamanla akan bir nehir gibi akıp gitmektedir. Bu düzen doğa yasalarıyla sağlanmakta olup, yasalar ise matematiksel kavramlarla anlaşılabilir. Bu yasaları anlamamızı sağlayan matematik bilgimiz artıkça bu akıp giden düzeni anlamamız daha da kolaylaşacaktır. Bu düzeni oluşturan yasalara göre gerçekleşen pek çok olayın neticesinde ortaya çıkan fiziksel problemler, bu problemlerin çözümleri üzerine önerilen yöntemler ve yöntemlerin uygulanmasından çıkan çözümler matematik diliyle ifade edilerek anlamlı hale gelir. İşte bahsettiğimiz bu problemler doğa yasalarının ortaya koyduğu normlarla bir diferansiyel denklem ile kendine karşılık bulur. Genellikle fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi bilimsel alanlarda ortaya çıkan bu problemler matematiksel modellerle yani diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilir.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması bu durumda oldukça önemlidir. Özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri üzerine yapılan araştırmalar daha da önemli bir hale gelmiştir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü veren pek çok farklı yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler bazen benzer çözümler sunarken bazen de farklı çözümler ortaya çıkarabilmektedir. İşte elde edilen bu çözümlerin diferansiyel denkleme karşılık gelen fiziksel olayı anlamada önemli yararları vardır. Uygulamalı bilimlerde daha çok karşılaşılan, zamana göre türevi içeren lineer olmayan oluşum (evrim) denklemleri olarak da bilinen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integrallenebilmeleri veya çözümlerinin varlığı için geliştirilen yöntemler önemini artırmıştır. Özellikle son yapılan çalışmalar lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmaya yoğunlaşmıştır. Çünkü bu tür denklemler pek çok problemde karşımıza çıkmaktadır. Genel bir çözüm yöntemi olmayan bu tür denklemler özel yöntemlerle incelenip yeni çözümler üretilmeye çalışılmıştır.

Lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemin çözümlerinin uygulanabilirliği pek çok fiziksel olayı anlamada bize yardımcı olan dalga kavramı ile açıklanabilir. Yani bulunan çözümler bir dalganın zamana bağlı hareketi ile ifade

edilebilirse fiziksel olayı anlamak kolaylaşabilir. Örneğin bu dalgalı hareketlilikler belli bir düzende esnek ortamlarda, akışkan mekânlarda, optik iletim ortamlarında kendini gösterir. Bir dalga çeşidi olan soliton lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini ifade etmede oldukça kullanışlıdır. Bundan dolayı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga (soliton) modelinde çözümlerini bulmak için çok sayıda yaklaşım yöntemi öne sürülmüş ve öne sürülen bu yöntemler zamanla da geliştirilmiştir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için önerilen bazı analitik yöntemler; Hirota bilineer yöntemi [1], ters açılım yöntemi [2], Darboux dönüşüm yöntemi [3], Painleve açılım yöntemi [4], sine-cosine yöntemi [5], tanh fonksiyon yöntemi [6], ilk integral yöntemi [7], üstel fonksiyon yöntemi [8], deneme denklem yöntemi [9-11], genişletilmiş deneme denklem yöntemi [12-16], Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi [17-19], Weierstrass eliptik fonksiyon açılım yöntemi [20],  $F$ -Açılım yöntemi [21-28] ve  $G'/G$ -Açılım yöntemi [29-31] sayılabilir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini elde etmek oldukça önemlidir. Yürüyen dalga çözümlerinin eliptik fonksiyona karşılık getiren Jakobi eliptik  $F$ -Açılım yöntemi [32-35], geliştirilmiş Jakobi eliptik  $F$ -Açılım yöntemi [36-38], genelleştirilmiş Jakobi eliptik  $F$ -Açılım yöntemi [39-40], uzatılmış Jakobi eliptik  $F$ -Açılım yöntemi [41] geliştirilmiştir. Ayrıca Jakobi eliptik denklem yöntemi [42] ile geliştirilmiş genel eşleme deformasyon yöntemleri [43-44] Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri veren diğer analitik yöntemler olarak sayılabilir.

Bu tez çalışmasında  $F$ -Açılım yöntemi ve  $G'/G$ -Açılım yöntemlerine farklı açılardan bakarak bu iki yöntemin bir birleşimi olan yeni yöntemler sunulmuştur. Bu yöntemler lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerinin bulunması için yeni versiyon genelleştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi ile yeni genelleştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yöntemi olarak verilmiştir. Bu yöntemler sırasıyla Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ile Davey-Stewartson (DS) denklem sistemine uygulanmıştır. Bu uygulanacak yeni tam çözüm yöntemlerinin algoritmalarının yazılması ve bu algoritmaların uygulanabilmesi için oluşturduğumuz

yöntemler düzenlenerek sembolik bilgisayar programları yardımıyla denklemlerin çözümleri elde edilmiştir. Bilgisayar programı olarak Mathematica kullanılmış ve gerekli kodlar hazır programlar aracılığıyla düzenlenmiştir. Elde edilen çözümlerin grafikleri için farklı çizim programlarından da faydalanılmıştır.

Tezin birinci bölümünde kullandığımız temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümünde ise yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi ile yeni geliştirilmiş  $F'/F$ - Açılım yöntemleri genel hatlarıyla anlatılmıştır. Üçüncü bölümde BBM denklemi ve DS denklem sistemine yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi uygulanmıştır. Dördüncü bölümde aynı denklemlere geliştirilmiş  $F'/F$ - Açılım yöntemi uygulanmıştır. Son olarak da beşinci bölümde ise kullandığımız yöntemler ve bulduğumuz sonuçlar karşılaştırılıp değerlendirilmiştir.

## 1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde diferansiyel denklemler, jakobi eliptik fonksiyonlar ve soliton dalgaları ile ilgili temel kavram ve özellikler verilmiştir.

### 1.1.1. Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemler doğada gerçekleşen pek çok fiziksel olayın neticesinde ortaya çıkmaktadır. Bu fiziksel olaylar matematiksel ifadelerle modellenerek diferansiyel denklemler elde edilir. Bu elde edilen denklemlerin çözümlerinden elde edilen çözüm fonksiyonları fiziksel olayları anlamada bize yardımcı olur.

**Tanım 1.1:** Aranılan fonksiyonun türevini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Aranılan fonksiyon bir değişkene bağlı ise diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem, birden fazla değişkene bağlıysa kısmi türevli diferansiyel denklem denir [45]. Bir adi diferansiyel denklemde bağımsız değişkeni  $x$ , aranılan fonksiyon (bağımlı değişken)  $y = y(x)$  olarak kabul edildiğinde adi diferansiyel denklem

$$O(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde olur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerde ise bağımsız değişkenler  $x, y, t, \dots$  ve aranan fonksiyon  $u = u(x, y, t, \dots)$  şeklinde alındığında kısmi türevli diferansiyel denklem

$$\tilde{P}(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

şeklinde olur.

**Tanım 1.2:** Bir diferansiyel denklemin içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi, en yüksek mertebeli türevin derecesine de diferansiyel denklemin derecesi denir.

Diferansiyel denklemler için farklı sınıflandırmalar vardır. Bir diferansiyel denklem içinde bulunan bağımsız değişken sayısına göre sınıflandırılabilir. Eğer bağımsız değişken sayısı bir ise adi diferansiyel denklem, bağımsız değişken sayısı birden fazla olduğunda ise kısmi türevli diferansiyel denklem olur. Diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesi ve derecesine göre sınıflandırılabilir. Diferansiyel denklemde bulunan türevler ve bağımlı değişkenin lineerlik durumuna göre sınıflandırılabilir. Yani türevler ve bağımlı değişkenin derecesi bir ise lineer (doğrusal) diferansiyel denklem, derece birden fazla ise lineer olmayan diferansiyel denklem olur. Bir diferansiyel denklem türevler ve bağımlı değişkenin katsayılarına göre sabit katsayılı, değişken katsayılı ve kompleks katsayılı diferansiyel denklemler (denklem sistemleri) olarak sınıflandırılabilir [46].

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerde, adi diferansiyel denklemlerde olmayan farklı sınıflandırmalar da yapılabilir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevli terimler lineer ise diferansiyel denklem yarı lineer diferansiyel denklem olur. Bu tür denklemlerde eğer en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise diferansiyel denklem hemen hemen lineer diferansiyel denklem olur. Buradan da anlaşılacağı gibi yarı lineer diferansiyel denklemlerin sınıfı, hemen hemen lineer diferansiyel denklem sınıfını, hemen hemen lineer diferansiyel denklem sınıfı da lineer diferansiyel denklem sınıfını içerir [46].

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının ve denklemin mertebesinin denklemin çözümünde önemli etkileri vardır. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümleri adi diferansiyel denklemde olduğu gibi değildir. Kısmi türevli diferansiyel denklemin pek çok çözümü bulunabileceği gibi bazen sadece bir çözümü bulunabilir bazen de hiç çözümü bulunamayabilir. Ayrıca bazı özel çözümler dışında tüm çözümleri kapsayan genel bir çözüm bulmak da mümkün olabilir. Bu genel çözümdeki keyfi fonksiyon sayısı denklemin mertebesi ile ilişkilidir. Yani  $n$  tane değişken içeren  $m$ . mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü  $n-1$ tane bağımsız değişkenli  $m$  tane keyfi fonksiyon içerir.  $m$ . mertebeden adi diferansiyel denklemde ise benzer biçimde bir bağımsız değişkenli  $m$  tane sabit içeren çözümler elde edilir.

**Tanım1.3:**  $R^n$ ,  $n$  boyutlu bir reel uzay olmak üzere  $u$  fonksiyonunun bağımsız değişkenlerinin bir  $D \subset R^n$  alt kümesine kısıtlandığını düşünelim.  $u: D \rightarrow R$  fonksiyonu  $m$ . mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin  $D$  kümesindeki bir çözümü,  $D$  kümesinin bütün iç noktalarını sağlayan  $C^m$  sınıfından ( $m$ . mertebeden türevleri var ve sürekli) bir fonksiyondur. Yani  $m$ . mertebe bir kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü  $m$  tane  $C^m$  sınıfından keyfi fonksiyon içeren bir çözümdür. Bu keyfi fonksiyonların hiç birisi genel çözümü kaybetmeden ortadan kaldırılamaz veya birleştirilemez. Ancak keyfi fonksiyonlara bağlı olarak verilen kısmi türevli diferansiyel denkleminin genel çözümüne, türev alma ve yok etme yöntemleri uygulanarak kısmi türevli diferansiyel denklem elde edilebilir [47].

Genel çözümden keyfi fonksiyonların özel seçimi ile elde edilen çözümlere özel çözüm denir. Uygulamada daha çok diferansiyel denkleme başlangıç veya sınır koşulları eklenerek özel çözümler bulunur.

### 1.1.2. Jakobi Eliptik Fonksiyonlar

**Tanım 1.4:**

$$w = F(m, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 < m < 1 \quad (1.3)$$



şeklinde tanımlanan integrale birinci tip eliptik integral denir. Bu gösterim eliptik integralin Legendre biçimi olarak adlandırılır. Burada  $\phi$ ,  $w$ 'nun genliğidir ve  $\phi = am(w)$  ile gösterilir.  $m$  ise  $w$ 'nun modülü olarak adlandırılır. (1.3) eliptik integralinde  $v = \sin \theta$  dönüşümü yapıp,  $x = \sin \phi$  olarak alındığında

$$F(m, x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}} \quad (1.4)$$

birinci tip eliptik integralin Jakobi biçimi elde edilir [48]. Burada  $\phi = am(w)$  olduğundan  $x = \sin(am(w))$  olarak yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} x &= \sin(am w) = sn(w, m) \\ \sqrt{1-x^2} &= cn(w, m) \\ \sqrt{1-m^2x^2} &= dn(w, m) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Jakobi eliptik fonksiyonların tanımına varılmıştır. Burada kısaca Jakobi eliptik fonksiyonlar kısaca  $sn(w, m) = sn(w)$ ,  $cn(w, m) = cn(w)$ ,  $dn(w, m) = dn(w)$  olarak yazılabilir.

Diğer Jakobi eliptik fonksiyonlar

$$\begin{aligned} ns(w) &= \frac{1}{sn(w)}, & nc(w) &= \frac{1}{cn(w)}, & nd(w) &= \frac{1}{dn(w)}, & sc(w) &= \frac{sn(w)}{cn(w)}, \\ cs(w) &= \frac{cn(w)}{sn(w)}, & sd(w) &= \frac{sn(w)}{dn(w)}, & ds(w) &= \frac{dn(w)}{sn(w)}, & cd(w) &= \frac{cn(w)}{dn(w)}, \\ dc(w) &= \frac{dn(w)}{cn(w)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Jakobi eliptik fonksiyonlarla ilgili önemli eşitlikler aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$cn(-w) = cn(w), \quad , sn(-w) = -sn(w), \quad dn(-w) = dn(w)$$

$$sn^2(w) + cn^2(w) = 1, \quad m^2 sn^2(w) + dn^2(w) = 1,$$

$$sn^2(w) = \frac{1 - cn(2w)}{1 + dn(2w)}, \quad \frac{sn(w) dn(w)}{cn(w)} = \sqrt{\frac{1 - cn(2w)}{1 + cn(2w)}}, \quad (1.6)$$

**Tanım 1.5:**

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} \quad (1.7)$$

olmak üzere  $sn(w + 2K) = -sn(w)$ ,  $cn(w + 2K) = -cn(w)$ ,  $dn(w + 2K) = dn(w)$ ,  
 $sn(w + 4K) = sn(w)$ ,  $cn(w + 4K) = cn(w)$  olur. Buradan da  $sn$  ve  $cn$ ,  $4K$   
periyotlu,  $dn$ ,  $2K$  periyotlu bir fonksiyon olduğu görülür.

Ayrıca Tanım 1.4 de verilen  $m$  modülünün aldığı değerlerin sıfıra ya da bire yaklaşması durumunda Jakobi eliptik fonksiyonlar

$$m \rightarrow 0 \text{ için } cn(w) \rightarrow \cos(w), \quad sn(w) \rightarrow \sin(w), \quad dn(w) \rightarrow 1$$

$$m \rightarrow 1 \text{ için } cn(w) \rightarrow \operatorname{sech}(w), \quad sn(w) \rightarrow \tanh(w), \quad dn(w) \rightarrow \operatorname{sech}(w)$$

şeklinde trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonlara yakınsar.

Jakobi eliptik fonksiyonların  $w$  değişkenine göre türev ve integralleri

$$(sn(w))' = cn(w)dn(w), \quad (cn(w))' = -sn(w)dn(w), \quad (dn(w))' = -m^2 sn(w)cn(w)$$

$$\int sn(w) dw = \frac{\ln(dn(w) - mcn(w))}{m}, \quad \int cn(w) dw = \frac{\operatorname{Arc} \cos(dn(w))}{m}, \quad (1.9)$$

$$\int dn(w) dw = am(w)$$

şeklindedir.

Adi diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak da Jakobi eliptik fonksiyonlar karşımıza çıkabilmektedir. Örneğin  $P, Q$  ve  $R$  reel sayıları için

$$F'(\xi)^2 = PF(\xi)^4 + QF(\xi)^2 + R \quad (1.10)$$

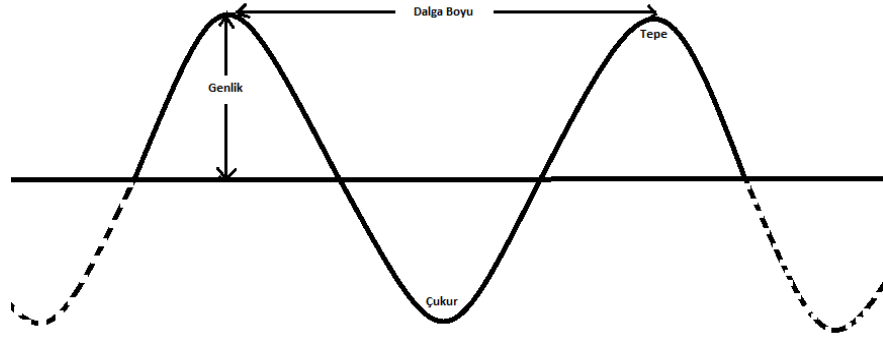
adi diferansiyel denkleminin  $F(\xi) = F(\xi, m)$  Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri Ek 1' de verilmiştir.

### 1.1.3. Solitonlar

Fizikte pek çok olayın izahında karşımıza çıkan dalga, belli bir ortamda yayılan enerjinin taşınmasını olanak sağlayan titreşimler olarak tanımlanabilir. Örneğin suda ilerleyen yüzey dalgaları, belli bir madde ortamında ilerleyen ses dalgaları, ışık şeklinde ilerleyen parçacıklar ve depremin sırasında ortaya çıkan enerjinin oluşturduğu sarsıntılar dalga şeklindedir. Bir dalganın karakterini; genliği, frekansı ( $f$ ) ve dalga boyu ( $\lambda$ ) belirler. Burada salınımın şiddeti genlik, salınımın sıklığı frekansı ve dalgaların iki tepesi veya çukuru arasındaki uzaklık ise dalga boyudur. Dalganın hareketi belli titreşimlerle periyodik veya periyodik olmayan salınımlar şeklindedir. Örneğin bir kemandaki nota sesi periyodik iken, bir patlama sonucu oluşan ses periyodik olmayan dalgadır. Dalgalar duran ve ilerleyen dalgalar olarak iki şekilde olabilir. Duran dalgalar sabit bir pozisyonda olup ortamın hareketine ters hareket yapıp durağan görünümdeki dalgalardır. İlerleyen dalgalar belli iki nokta arasında enerjinin ortama yayılması sonucu hareket eder şekilde görünen dalgalardır. Belli bir ortamda ilerleyen dalganın frekansını artırdığımızda dalga boyu azalır. Bu durumda dalganın hızını ( $v$ ) veren matematiksel ifade

$$v = f\lambda \quad (1.11)$$

şeklindedir.



**Şekil 1.1.** Dalga modeli

Solitonlar ise şekil, hız ve enerjileri değişmeden yayılan dalgalardır. Ayrıca solitonlar karşılıklı çarpıştıklarında ya da belli darbelere maruz kaldıklarında özelliklerini kaybetmeden koruyabilen dalgalardır. Solitonlar doğrusal olmayan hızı sürekli değişen fiziksel olayların oluşturduğu sistemlerin çözümlerinde ortaya çıkarlar. Özellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilen fiziksel olayların açıklanmasında çözüm olarak katkıda bulunurlar. Örneğin akışkanlar mekaniğinde, parçacık fiziğinde ve biyolojik sistemlerde karşımıza çıkan solitonlar teknolojinin ilerlemesiyle kendine birçok alanda uygulama alanı bulmaktadır. Örneğin, sinir sisteminde nöronların gönderdiği sinyaller, mıknatısların oluşturduğu manyetik hareketler, haberleşmede optik ışınlarının iletimlerinde solitonlar gözlemlenir.

Soliton dalgalar ilk olarak 1834 yılında Scott Russell tarafından gözlenmiştir. Bu gözlemlerde bir soliton şeklinde olan su dalgasının genliği  $\ell$ , yerden uzaklığı (derinliği)  $h$  olduğu  $g$  yer çekim ivmeli bir ortamda dalganın hızı  $v$

$$v = \sqrt{g(\ell + h)} \quad (1.12)$$

olduğunu göstermiştir. Buradan bu oluşan dalganın lineer olmayan bir özellik taşıdığını gözlemlemiştir. Bu özellik solitonun lineer olmayan dinamiklerin açıklanmasında önemli bir aktör olmasını sağlamıştır. Daha sonra 1895 yılında ilk defa D. J. Korteweg ve G. De Vries adlı bilim insanları KdV denklemini olarak bilinen

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.13)$$

denkleminin  $u = u(x, t)$  çözümlerinin  $\eta$  dalga sayısı olmak üzere

$$u(x, t) = \ell \operatorname{Sech}^2(\eta(x - vt)), \quad v = 2\ell = 4\eta^2 \quad (1.14)$$

soliton özelliğinde bir dalganın  $x$  konumunda  $t$  zamanında yerden uzaklığını verdiği göstermişlerdir. KdV denklemi derinliği az sulara meydana gelen dalgaların sürekli bir biçimde yayılışını açıklayan model olarak ortaya konmuştur.

### 1.1. Dengeleme Terimi

Yeni versiyon genelleştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi ile yeni genelleştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yöntemleri dengeleme bağıntısı (balans prosedürü) lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemlere indirgemesinden sonra en yüksek mertebeden türev içeren terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında kurulmaktadır.  $m, n, k, p, r, q$  ve  $s$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere bu denkleminin  $u = u(\xi)$  şeklinde bir çözümü bulunsun. Bu denklemin indirgendiği adi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeden türev içeren terimi  $u(\xi)^m \frac{d^n u(\xi)}{d\xi^n}$  ve en yüksek dereceden lineer

olmayan terimi  $u(\xi)^r \left( \frac{d^k u(\xi)}{d\xi^k} \right)^p$  olarak alınsın. ( $n > k$ )

$u = u(\xi)$  çözümü

$$u(\xi) = B_s f(\xi)^s + \dots \quad (1.14)$$

şeklinde kabul edildiğinde  $f(\xi)$  fonksiyonun türevi

$$f'(\xi) = C_q f(\xi)^q + \dots \quad (1.15)$$

olarak verilmiş olsun. Dengelenen terimleri  $u(\xi)^m \frac{d^n u(\xi)}{d\xi^n} \approx u(\xi)^r \left( \frac{d^k u(\xi)}{d\xi^k} \right)^p$

şeklinde gösterilerek

$$\begin{aligned}
u(\xi)^m \frac{d^n u(\xi)}{d\xi^n} &= B_s^m f(\xi)^{sm} C_q^n s(s+q-1)(s+2q-2)\dots(s+nq-n) f(\xi)^{s+nq-n} + \dots \\
&= B_s^m C_q^n s(s+q-1)(s+2q-2)\dots(s+nq-n) f(\xi)^{sm+s+nq-n} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(\xi)^r \left( \frac{d^k u(\xi)}{d\xi^k} \right)^p &= B_s^r f(\xi)^{sr} C_q^{kp} \left( s(s+q-1)(s+2q-2)\dots(s+kq-k) f(\xi)^{s+kq-k} \right)^p + \dots \\
&= B_s^r C_q^{kp} \left( s(s+q-1)(s+2q-2)\dots(s+kq-k) \right)^p f(\xi)^{sr+(s+kq-k)p} + \dots
\end{aligned}$$

işlemlerinden sonra dengeleme bağıntısı

$$s(m+1) + n(q-1) = sr + (s+kq-k)p \quad (1.16)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan da  $s$  sayısı (dengeleme terimi) belirlenmiş olur.

## 2. YENİ TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

$F$ -Açılım ve  $G'/G$ -Açılım yöntemleri ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve bu yöntemler geliştirilerek lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı çözümleri bulunmuştur [49-56]. Bu bölümde geliştirilmiş  $F$ -Açılım yönteminin yeni bir versiyonu verilmiştir. Daha sonra bu önerilen yöntemi geliştirerek yeni bir geliştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yönteminden bahsedilmiştir.

### 2.1. Yeni Versiyon Geliştirilmiş $F$ - Açılım Yöntemi

Bu bölümde, literatürde tanımlı olan geliştirilmiş  $F$ -Açılım yönteminin yeni bir versiyonunun ana hatları tanıtılmıştır.  $x, y, z, \dots, t$  (zaman) bağımsız değişkenler olmak üzere bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleminin genel hali

$$\tilde{P}(u, u_x, u_y, u_z, \dots, u_t, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, \dots, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde olsun. Burada  $e_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ) sabitler,  $\tilde{P}$ ' de  $u = u(x, y, z, \dots, t)$ ' nun ve  $u$ ' nun kısmi türevlerinin bir polinomudur. Yürüyen dalga dönüşümü

$$\xi = e_1 x + e_2 y + e_3 z + \dots + e_m t \quad (2.2)$$

için  $u(x, y, z, \dots, t) = u(\xi)$  bağıntısı kullanılmıştır. (2.1) denkleminde bu tanımlanan yürüyen dalga dönüşümü uygulandıktan sonra kısmi türevler denkleminde yerine yazılıp gerekli görülen integral işlemlerinden sonra

$$O(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2.3) denklemindeki  $u(\xi)$  çözüm fonksiyonunun;  $F = F(\xi)$  Jakobi eliptik fonksiyon olmak üzere literatürde var olan

Geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemindeki çözüm fonksiyonuna  $c_i \left(\frac{F'}{F}\right)^i + d_i \left(\frac{F}{F'}\right)^i$  terimleri eklenerek aşağıdaki gibi tanımlandığını varsayalım

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left( a_i F^i + \frac{b_i}{F^i} + c_i \left(\frac{F'}{F}\right)^i + d_i \left(\frac{F}{F'}\right)^i \right). \quad (2.4)$$

Buradaki  $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) katsayıları daha sonra belirlenecektir. Ayrıca  $F$  fonksiyonunu

$$(F')^2 = PF^4 + QF^2 + R \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlı birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin uygun  $P, Q$  ve  $R$  sabitlerine göre elde edilen bir Jakobi eliptik fonksiyon çözümü olarak alalım. (2.4) fonksiyonunda bulunan  $N$  sayısı (2.3) ifadesinde bulunan lineer olmayan yüksek dereceden terimle en yüksek mertebeden türev içeren terim arasında kurulan dengeleme (balans) ile belirlenir. (2.3) denkleminde bulunan ilgili terimler; (2.4) ve (2.5) ifadeleri yardımıyla  $F$  ve  $F'$  türünden ifade edilen

$$\begin{aligned} (F')^2 &= PF^4 + QF^2 + R \\ F'' &= 2PF^3 + QF \\ F''' &= 6PF^2F' + QF' \end{aligned} \quad (2.6)$$

...

eşitlikleri ile elde edilir. Hesaplanan ilgili terimler (2.3) denkleminde yerlerine yazılır. Ortaya çıkan polinom  $(F'(\xi))^r F(\xi)^p$  ( $r=0, 1; p=0, 1, 2, \dots$ ) fonksiyonlarına bağlıdır. Bu ifadeyi bir sıfır polinomu olarak düşünüp, bu polinomdaki  $F$  veya  $F'$  fonksiyonlarının oluşturduğu terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Mathematica paket programı yardımıyla elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülüp, bulunması gereken  $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) ve  $e_j$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) katsayıları bulunur. Elde



edilen bu katsayılar (2.4) çözümünde yerlerine yazılarak  $u = u(\xi)$  şeklinde Jakobi eliptik fonksiyon içeren periyodik ve dejenere olmayan soliton çözümler bulunur.

## 2.2. Yeni Genelleştirilmiş $F' / F$ - Açılım Yöntemi

Bu bölümde yeni geliştirdiğimiz yöntem ile farklı Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerinin elde edilmesi düşünülmüştür. Benzer şekilde (2.1) denkleminde (2.2) ifadesinde belirtilen şartlar altında yürüyen dalga dönüşümü uygulanıp, alınması gereken türevler hesaplanıp ve gerekiyorsa integral işlemleri yapılarak (2.3) gibi bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

$F = F(\xi)$  Jakobi eliptik fonksiyon olmak üzere, (2.4) çözüm fonksiyonunda  $F$  fonksiyonu yerine  $\frac{F'}{F}$  fonksiyonu yazılarak, (2.3) denkleminin farklı yeni bir çözümü fonksiyonunu

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left( a_i \left( \frac{F'}{F} \right)^i + b_i \left( \frac{F}{F'} \right)^i + c_i \left( \left( \frac{F'}{F} \right)' \frac{F}{F'} \right)^i + d_i \left( \left( \left( \frac{F'}{F} \right)' \right)^{-1} \frac{F'}{F} \right)^i \right) \quad (2.7)$$

şeklinde alalım. Buradaki  $F$  fonksiyonu yine (2.5) denkleminin bir çözümüdür. (2.3) ifadesinde bulunan lineer olmayan yüksek dereceden terimle en yüksek mertebeden türev içeren terim arasında kurulan dengeleme (balans) ile (2.7) yeni çözüm fonksiyonunda bulunan  $N$  sayısı belirlenir. (2.6) denklemleri yardımıyla alınması gereken ilgili türevler

$$\left( \left( \frac{F'}{F} \right)' \right)^2 = \left( \frac{F'}{F} \right)^4 - 2Q \left( \frac{F'}{F} \right)^2 - 4PR + Q^2 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F'}{F}\right)'' &= 2\left(\frac{F'}{F}\right)^3 - 2Q\left(\frac{F'}{F}\right) \\
\left(\frac{F'}{F}\right)''' &= 6\left(\frac{F'}{F}\right)^2\left(\frac{F'}{F}\right)' - 2Q\left(\frac{F'}{F}\right)' \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.9}$$

hesaplanır. Hesaplanan bu ifadeler (2.7) yeni çözüm fonksiyonda yerlerine yazılarak

$\left(\left(\frac{F'}{F}\right)'\right)^r \left(\frac{F'}{F}\right)^p$  ( $r=0, 1; p=0, 1, 2, \dots$ ) fonksiyonlarına bağlı bir sıfır polinomu

oluşturulur. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bulunan cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımıyla çözümlenir,  $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) ve  $e_j$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) katsayıları belirlenir. Bulunan bu katsayılar (2.7) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak Jakobi eliptik fonksiyonları içeren yeni ve farklı  $u = u(\xi)$  çözümleri elde edilir.

## 2. YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ F- AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ile Davey-Stewartson (DS) denklem sistemi genel hatlarıyla incelenip, daha sonra yeni versiyon  $F$ -Açılım yönteminin bu denklemlere uygulamaları incelenmiştir.

### 3.1. Benjamin-Bona-Mahony Denklemi ve Uygulamaları

Genel formdaki lineer olmayan kısmi türevli BBM denklemi

$$u_t + \alpha u_x + \beta uu_x - \delta u_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

şeklinindedir. Burada  $\alpha, \beta$  ve  $\delta$  birer pozitif sabit  $u$  denklemi sağlayan  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olarak verilmiştir. BBM denklemi akışkanlar mekaniğinde lineer olmayan iyi frekans dağılım davranışını sergileyen ileriye doğru yayılan kısa dalga modellerini açıklamaktadır [57-59].

(3.1) denkleminde yeni versiyon genelleştirilmiş  $F$ -açılım yöntemini uygulamak için öncelikle yürüyen dalga dönüşümü

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = e_1 x + e_2 t \quad (3.2)$$

ele alalım.  $u = u(\xi)$  ve  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = u'$  olmak üzere, (3.1) denklemini

$$(e_1 \alpha + e_2)u' + \beta e_1 uu' - \delta e_1^2 e_2 u'' = 0 \quad (3.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde indirgenir. (3.3) eşitliğinin her iki tarafının  $\xi$  değişkenine göre integrali alınıp ve oluşacak integral sabitini sıfır olarak seçildiğinde

$$(e_1 \alpha + e_2)u + \frac{\beta e_1}{2} u^2 - \delta e_1^2 e_2 u'' = 0 \quad (3.4)$$

2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Önerilen çözüm fonksiyonu (2.4) için elde edilen denklemde en yüksek mertebeden türev içeren  $u''$  terimi ile en

yüksek dereceden lineer olmayan  $u^2$  terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi aşağıdaki gibi yapılmıştır. (2.5) denkleminde

$$F'(\xi) = \pm \sqrt{PF(\xi)^4 + QF(\xi)^2 + R} \cong \pm \sqrt{PF(\xi)^2 + \dots}$$

şeklinde yazılabileceğinden çözüm fonksiyonu (2.4) kısaca

$$u = a_N^N F(\xi)^N + \dots$$

olarak alınmıştır. Buna göre dengelemeyi sağlayan terimler

$$u^2 = a_N^{2N} F(\xi)^{2N} + \dots$$

$$u''(\xi) \cong N(N+1)a_N^N PF(\xi)^{N+2} + \dots$$

şeklinde hesaplandığında elde edilen  $u'' \approx u^2$  terimlerinin denkliğinden dengeleme bağıntısından dengeleme terimi (balans)  $N=2$  olarak bulunmuştur. Böylece bulunan bu dengeleme terimi (2.4) denkleminde yerine yazıldığında (3.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + \frac{b_1}{F(\xi)} + \frac{b_2}{F^2(\xi)} + c_1 \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} + c_2 \left( \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} \right)^2 + d_1 \left( \frac{F(\xi)}{F'(\xi)} \right) + d_2 \left( \frac{F(\xi)}{F'(\xi)} \right)^2, \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. (3.5) ifadesinden elde edilen  $u''$  ve  $u^2$  karşılıkları (3.4) denkleminde yerine yazıldığında  $(F'(\xi))^r F(\xi)^p$  ( $r=0, 1; p=0, 1, 2, \dots$ ) Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom denklem elde edilir. Bu polinom sıfır polinomu olarak düşünülüp, katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programıyla çözüldüğünde  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1$  ve  $e_2$  katsayıları ile  $\xi$  dönüşümü aşağıda belirtilen durumlarda bulunmuştur. Bulunan katsayılar (3.5) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak  $F(\xi)$  veya  $F'(\xi)$  Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı  $u = u(\xi)$  çözümleri bulunur. Ayrıca (2.5) denkleminde özel olarak seçilen  $P = m^2$ ,  $Q = -1 - m^2$  ve  $R = 1$  katsayılarına karşılık

$F(\xi) = sn(\xi)$  Jakobi eliptik fonksiyonu için aşağıda belirtilen durumlarda çözümler verilmiştir.

### 1. Durum:

$$a_0 = -\frac{8\alpha\delta e_1^2 \left( 2\sqrt{Q^2 - 3PR} (1 + 8Q\delta e_1^2) + (Q + 32\delta e_1^2 (Q^2 - 3PR)) \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad a_1 = 0,$$

$$a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}, \quad d_1 = 0, \quad (3.6)$$

$$d_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (Q^2 - 4PR) (1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad e_1 = e_1, \quad e_2 = -\frac{\alpha\delta e_1}{\beta(1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})},$$

katsayıları için (3.5) çözüm fonksiyonu

$$u_1(\xi_1) = a_0 + c_2 \left( \frac{F'(\xi_1)}{F(\xi_1)} \right)^2 + d_2 \left( \frac{F(\xi_1)}{F'(\xi_1)} \right)^2, \quad \xi_1 = e_1 x + e_2 t, \quad (3.7)$$

şeklindedir. Eğer  $F(\xi_1) = sn(\xi_1)$  olarak alındığında;  $A = 16\delta e_1^2 \sqrt{1 - m^2 + m^4}$ ,

$$A_1 = \frac{\alpha(A - 8\delta e_1^2 (1 + m^2))}{\beta(A - 1)}, \quad A_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(A - 1)}, \quad A_3 = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (m^2 - 1)^2}{\beta(A - 1)},$$

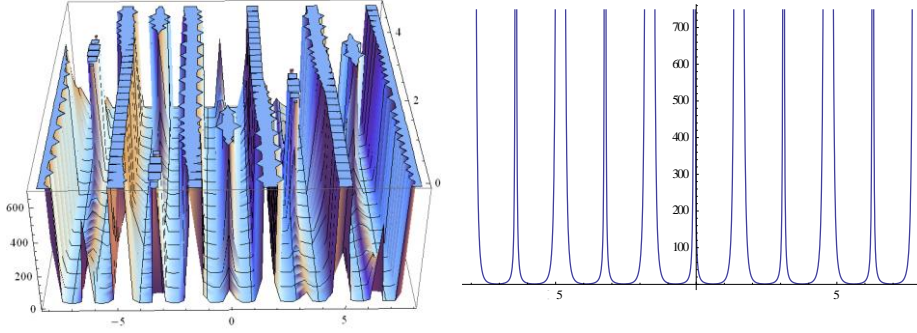
olmak üzere

$$\xi_1 = e_1 \left( x - \frac{\alpha\delta}{\beta(1 - A)} t \right), \quad (3.8)$$

dönüşümü ile (3.1) denkleminin literatürde bulunmayan

$$u_1(\xi_1) = A_1 + A_2 cn^4(\xi_1) dn^4(\xi_1) ns^2(\xi_1) + \frac{A_3}{cn^4(\xi_1) dn^4(\xi_1) ns^2(\xi_1)}, \quad (3.9)$$

yeni bir çözüm fonksiyonu elde edilir.



**Şekil 3.1.** (3.9) çözüm fonksiyonunun  $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1$ ,  $m = 1/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 2. Durum:

$$a_0 = \frac{-4\alpha\delta e_1^2 \left( \sqrt{Q^2 + 12PR} (1 - 4Q\delta e_1^2) - Q + 4\delta e_1^2 (Q^2 + 12PR) \right)}{\beta(-1 + 16\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))}, \quad a_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{12P\alpha\delta e_1^2 \left( 1 + 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR} \right)}{\beta(-1 + 16\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))}, \quad b_2 = \frac{12R\alpha\delta e_1^2 \left( 1 + 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR} \right)}{\beta(-1 + 16\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))} \quad (3.10)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0, b_1 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0, e_1 = e_1, e_2 = -\frac{\alpha e_1}{1 - 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR}},$$

elde edilen katsayıları için (3.5) çözüm fonksiyonu

$$u_2(\xi_2) = a_0 + a_2 F(\xi_2)^2 + \frac{b_2}{F(\xi_2)^2}, \quad \xi_2 = e_1 x + e_2 t, \quad (3.11)$$

formundadır.  $F(\xi_2) = sn(\xi_2)$  olarak seçildiğinde;  $A_4 = 4\delta e_1^2 \sqrt{(1 + 14m^2 + m^4)}$ ,

$$A_5 = \frac{\alpha(A_4 + 4(1 + m^2)\delta e_1^2)}{\beta(A_4 - 1)}, \quad A_6 = \frac{12m^2\alpha\delta e_1^2(1 + A_4)}{\beta(-1 + A_4^2)} \quad \text{ve} \quad A_7 = \frac{12\alpha\delta e_1^2(1 + A_4)}{\beta(-1 + A_4^2)}$$

olmak üzere

$$\xi_2 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1 - A_4} t \right), \quad (3.12)$$

dönüşümü ile

$$u_2(\xi_2) = A_5 + A_6 sn^2(\xi_2) + A_7 ns^2(\xi_2), \quad (3.13)$$

çözümü bulunur.

### 3. Durum:

$$a_0 = \frac{16\alpha\delta e_1^3 \sqrt{Q^2 - 3PR} (1 - 4\delta e_1^2 Q) + 4\delta e_1^2 (\alpha e_1 Q - 64\alpha\delta e_1^3 (Q^2 - 3PR))}{\beta e_1 (-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad a_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{12P\delta\alpha e_1^2 (1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}{\beta (-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{12R\delta\alpha e_1^2 (1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}{\beta (-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))},$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (Q^2 - 4PR) (1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}{\beta (-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad (3.14)$$

$$e_1 = e_1, \quad e_2 = -\frac{\alpha e_1}{1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR}},$$

katsayıları için (3.5) çözüm fonksiyonu

$$u_3(\xi_3) = a_0 + a_2 F(\xi_3)^2 + \frac{b_2}{F(\xi_3)^2} + d_2 \left( \frac{F(\xi_3)}{F'(\xi_3)} \right)^2, \quad \xi_3 = e_1 x + e_2 t, \quad (3.15)$$

bulunur.  $F(\xi_3) = sn(\xi_3)$  olarak alındığında;  $A_8 = -\frac{\alpha(A - 4(1+m^2)\delta e_1^2)}{\beta(-1+A^2)}$  ve

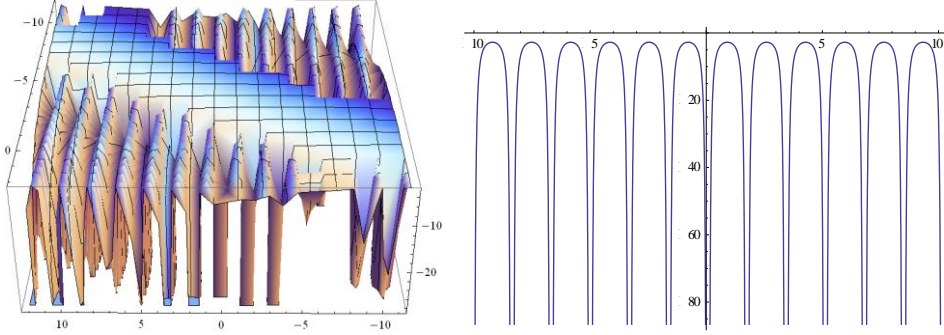
$A_9 = -\frac{12\delta e_1^2 \alpha}{\beta(1+A)}$  olmak üzere

$$\xi_3 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1-A} t \right), \quad (3.16)$$

dönüşümü ile (3.1) denkleminin literatürde bulunmayan

$$u_3(\xi_3) = A_8 + A_9 \left( ns^2(\xi_3) + m^2 sn^2(\xi_3) + (1 - m^2 + m^4) sc^2(\xi_3) nd^2(\xi_3) \right), \quad (3.17)$$

çözümü elde edilir.



**Şekil 3.2.** (3.17) çözüm fonksiyonunun  $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1$ ,  $m = 1/2$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

#### 4. Durum:

$$a_0 = \frac{1}{3} \left( -3Qc_2 + \frac{Q - 4\sqrt{Q^2 - 3PR}}{Q^2 - 3PR} \right), \quad a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0, \quad a_2 = P \left( -c_2 + \frac{d_2}{Q^2 - 4PR} \right),$$

$$b_2 = R \left( -c_2 + \frac{d_2}{Q^2 - 4PR} \right), \quad c_2 = c_2, \quad d_2 = d_2, \quad e_2 = \frac{\beta d_2}{12\delta e_1 (Q^2 - 4PR)}, \quad (3.18)$$

$$e_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta d_2}{-3\delta\alpha(Q^2 - 4PR) + 4\delta\beta d_2 \sqrt{Q^2 - 3PR}}},$$

katsayıları için (3.5) çözüm fonksiyonu

$$u_4(\xi_4) = a_0 + a_2 F(\xi_4)^2 + \frac{b_2}{F(\xi_4)^2} + c_2 \left( \frac{F'(\xi_4)}{F(\xi_4)} \right)^2 + d_2 \left( \frac{F(\xi_4)}{F'(\xi_4)} \right)^2, \quad \xi_4 = e_1 x + e_2 t, \quad (3.19)$$

bulunur.  $F(\xi_4) = sn(\xi_4)$  olarak alındığında ise  $A_{10} = 4d_2 \sqrt{1 - m^2 + m^4}$

$$A_{11} = (1 + m^2)c_2 - \frac{1 + m^2 + 4\sqrt{1 - m^2 + m^4}}{3(m^2 - 1)^2}, \quad A_{12} = \frac{d_2}{(m^2 - 1)^2} - c_2, \quad \text{olmak üzere}$$



$$e_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta d_2}{-\delta \left( 3\alpha (m^2 - 1)^2 - \beta A_{10} \right)}}, \quad (3.20)$$

için

$$\xi_4 = e_1 \left( x + \frac{\beta d_2}{12\delta e_1^2 (m^2 - 1)^2} \right), \quad (3.21)$$

dönüşümü ile (3.1) denkleminin literatürde bulunmayan

$$u_4(\xi_4) = A_{11} + A_{12} (m^2 \operatorname{sn}^2(\xi_4) + n s^2(\xi_4)) + c_2 (cs(\xi_4) dn(\xi_4))^2 + d_2 (sc(\xi_4) nd(\xi_4))^2, \quad (3.22)$$

yeni bir çözüm fonksiyonu elde edilir.

### 3.2. Davey-Stewartson Denklemleri ve Uygulamaları

Lineer olmayan (2+1) boyutlu DS denklem sistemi genel halde

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} - \lambda u_{yy} + 2p(v + |u|^2)u &= 0, \\ v_{xx} + qv_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde olup burada  $\lambda, p$  ve  $q$  birer sabit  $x, y$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerine bağlı olan  $u$  kompleks değerli bir fonksiyonu ve  $v$  reel değerli bir fonksiyon olarak verilmiştir. Genel olarak DS denklem sistemi, bir doğrultuda yayılan ancak genlikleri iki uzay ortamında ortaya çıkan zayıf lineer olmayan dalgaların yayılımını açıklar. Ayrıca  $\lambda = 1$  alındığında (3.23) denklemleri DS1 denklemlerine,  $\lambda = -1$  alındığında ise DS2 denklemlerine dönüşür [60-62].

Tezin bu bölümünde DS2 denklemlerine yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi uygulanmıştır. Bunun için  $\lambda = -1$  olduğunda (3.23) denklemleri

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} - u_{yy} + 2p(v + |u|^2)u &= 0, \\ v_{xx} + qv_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

formunda yazılır. Bu kompleks değişkenli denklem için yürüyen dalga dönüşümü

$$\omega = e_1x + e_2y + e_3t, \quad \theta = \phi(x + y - \gamma t), \quad (3.25)$$

ve

$$u(x, y, t) = e^{i\theta}U(\omega), \quad v(x, y, t) = V(\omega), \quad (3.26)$$

şeklinde uygulanırsa, (3.24) denkleminden

$$(\phi\gamma - 2\phi^2)U + 2p(UV + U^3) + (e_1^2 + e_2^2)U'' + i(e_3 + 2e_1\phi + 2e_2\phi)U' = 0, \quad (3.27)$$

kompleks katsayılı bir adi diferansiyel denklem ile

$$(e_1^2 + qe_2^2)V'' + 2e_1^2(U^2)'' = 0, \quad (3.28)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem sisteminde kompleks sayıların eşitliği kullanılarak (3.27) 'den

$$e_3 = -2\phi(e_1 + e_2), \quad (3.29)$$

katsayısı ile

$$(\phi\gamma - 2\phi^2)U + 2p(UV + U^3) + (e_1^2 + e_2^2)U'' = 0, \quad (3.30)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. (3.28)'de eşitliğin iki tarafının arka arkaya iki kere integrali alınır ve oluşacak integral sabitleri sıfır olacak şekilde seçildiğinde

$$V = -\frac{2e_1^2U^2}{e_1^2 + qe_2^2}, \quad (3.31)$$

eşitliği ile  $V$  fonksiyonunun  $U$  fonksiyonu türünden ifadesi yazılır. Elde edilen bu eşitlik (3.30)'da yerine yazıldığında

$$(\phi\gamma - 2\phi^2)U + \frac{(qe_2^2 - e_1^2)2p}{e_1^2 + qe_2^2}U^3 + (e_1^2 + e_2^2)U'' = 0, \quad (3.32)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. Önerilen çözüm fonksiyonu (2.4) için elde edilen (3.32) denkleminde en yüksek mertebeden türev içeren terim  $U''$  ile en yüksek dereceden lineer olmayan  $U^3$  terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi aşağıdaki gibi yapılmıştır. (2.5) denkleminde

$$F'(\omega) = \pm \sqrt{PF(\omega)^4 + QF(\omega)^2 + R} \cong \pm \sqrt{PF(\omega)^2} + \dots$$

şeklinde yazılabileceğinden çözüm fonksiyonu (2.7) kısaca

$$U = a_N^N F(\omega)^N + \dots$$

olarak alınmıştır. Buna göre dengelemeyi sağlayan terimler

$$U^3 = a_N^{3N} F(\omega)^{3N} + \dots$$

$$U'' \cong N(N+1)a_N^N PF(\omega)^{N+2} + \dots$$

şeklinde hesaplandığında elde edilen  $U'' \approx U^3$  terimlerinin denkleğinden denge terimi  $N=1$  olarak tespit edilir. Elde edilen bu dengeleme terimi (2.4) ifadesinde yerine yazıldığında (3.32) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$U(\omega) = a_0 + a_1 F(\omega) + \frac{b_1}{F(\omega)} + c_1 \left( \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} \right) + d_1 \left( \frac{F(\omega)}{F'(\omega)} \right), \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilmiştir. (3.33)'dan elde edilen  $U''$  ve  $U^3$  terimlerinin karşılıkları (3.32) denkleminde yerine yazıldığında  $(F'(\omega))^r F(\omega)^p$  ( $r=0, 1; p=0, 1, 2, \dots$ ) Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı sıfır polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde  $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \phi$  ve  $e_3$  katsayıları ile  $\omega$  ve  $\theta$  dönüşümleri için aşağıdaki durumlar bulunmuştur. Bulunan bu katsayılar ve dönüşümler (3.33) fonksiyonunda yerine yazılarak  $F(\omega)$  veya  $F'(\omega)$  Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı  $U = U(\omega)$  çözümleri elde edilir. Böylece (3.25), (3.26) ve

(3.31) dikkate alınarak  $u(\omega)$  ve  $v(\omega)$  çözümleri elde edilebilir. Burada ayrıca (2.5) denkleminde özel olarak seçilen  $P = m^2$ ,  $Q = -1 - m^2$  ve  $R = 1$  katsayılarına karşılık  $F(\omega) = sn(\omega)$  Jakobi eliptik fonksiyonu için özel çözümler verilmiştir.

### 1. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = \sqrt{\frac{P(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, b_1 = 0, d_1 = 0, c_1 = 0,$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.34)$$

katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonu

$$U(\omega_1) = a_1 F(\omega_1), \quad \omega_1 = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad (3.35)$$

bulunur. Eğer  $F(\omega_1) = sn(\omega_1)$  olarak seçilirse

$$\omega_1 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2} t (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(1 + m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.36)$$

ve

$$\theta_1 = -\frac{1}{4} \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(1 + m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (3.37)$$

dönüşümleri için ve

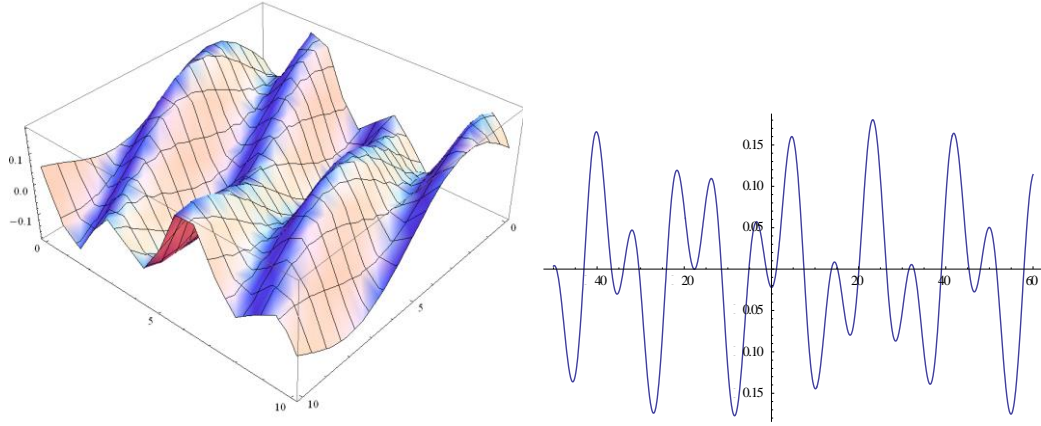
$$B_1 = \sqrt{\frac{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, \quad B_2 = -\frac{2e_1^2(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}, \quad (3.38)$$

olmak üzere (3.24) denkleminin

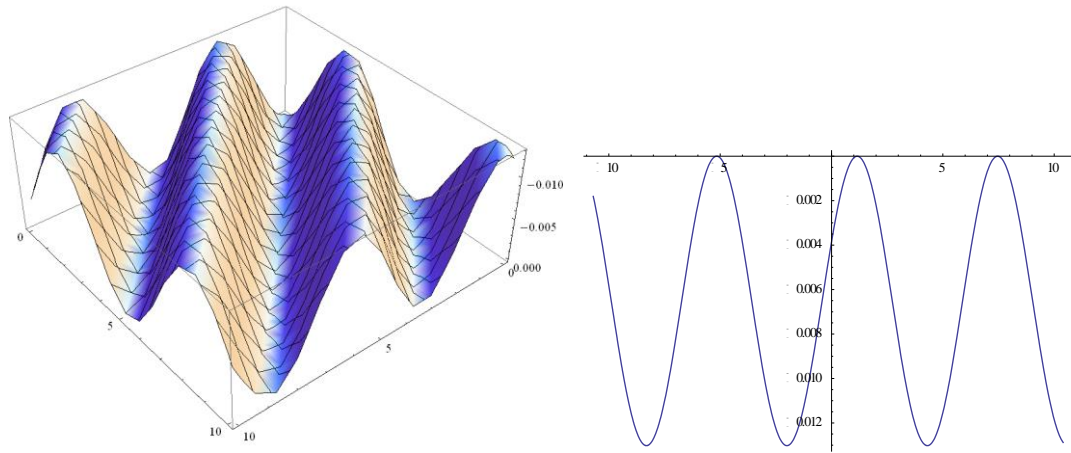
$$u(\omega_1) = B_1 m e^{i\theta_1} sn(\omega_1), \quad (3.39)$$

$$v(\omega_1) = B_2 m^2 sn^2(\omega_1), \quad (3.40)$$

yeni jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilir.



**Şekil 3.3.** (3.39) çözümünün fonksiyonunun  $e_1 = 1/2$ ,  $e_2 = 1$ ,  $\gamma = 7$ ,  $p = -1$ ,  $q = 1$ ,  $y = 0$ ,  $m = 1/8$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.4.** (3.40) çözümünün fonksiyonunun  $e_1 = 1/2$ ,  $e_2 = 1$ ,  $\gamma = 7$ ,  $p = -1$ ,  $q = 1$ ,  $y = 0$ ,  $m = 1/8$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 2. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, d_1 = 0, c_1 = 0, b_1 = -\frac{\sqrt{R(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), e_3 = -\frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.41)$$

katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonu

$$U(\omega_2) = \frac{b_1}{F(\omega_2)}, \quad \omega_2 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (3.42)$$

elde edilir.  $F(\omega_2) = sn(\omega_2)$  olarak alındığında

$$\omega_2 = e_1x + e_2y - \frac{1}{2}t(e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (3.43)$$

ve

$$\theta_2 = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (3.44)$$

dönüşümleri ve katsayıları için (3.24) denkleminin

$$u(\omega_2) = -B_1 e^{i\theta_2} ns(\omega_2), \quad (3.45)$$

$$v(\omega_2) = B_2 ns^2(\omega_2), \quad (3.46)$$

çözümleri bulunmuştur.

### 3. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = -\frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, d_1 = 0, b_1 = 0,$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) (-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)}), \quad (3.47)$$

elde edilen katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonu

$$U(\omega_3) = c_1 \frac{F'(\omega_3)}{F(\omega_3)}, \quad \omega_3 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (3.48)$$

elde edilir.  $F(\omega_3) = sn(\omega_3)$  olarak alındığında ise

$$\omega_3 = e_1 x + e_2 y - \frac{1}{2}(e_1 + e_2)(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)})t, \quad (3.49)$$

ve

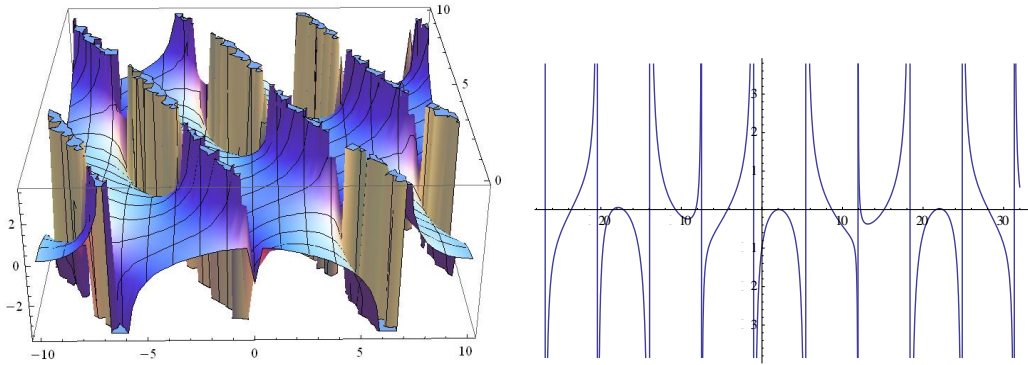
$$\theta_3 = \frac{1}{4}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)})(x + y - \gamma t), \quad (3.50)$$

dönüşümleri için ve (3.24) denkleminin

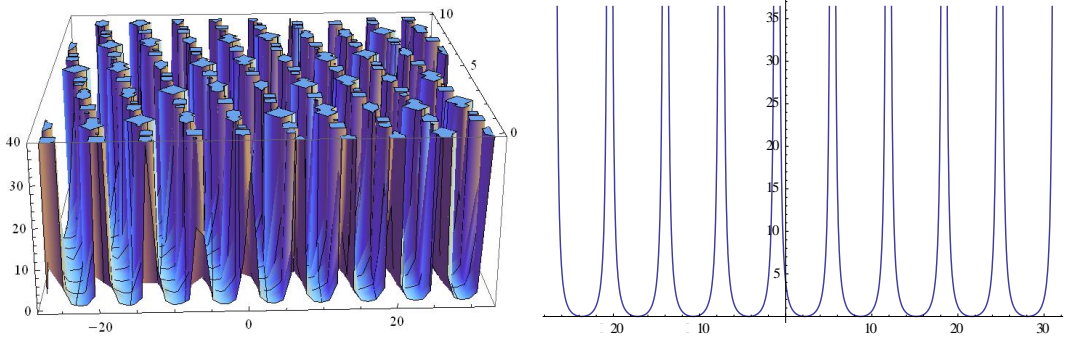
$$u(\omega_3) = -B_1 e^{i\theta_3} cs(\omega_3) dn(\omega_3), \quad (3.51)$$

$$v(\omega_3) = B_2 cs^2(\omega_3) dn^2(\omega_3), \quad (3.52)$$

yeni çözüm fonksiyonu elde edilmiştir.



**Şekil 3.5.** (3.51) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1/2$ ,  $e_2 = 1/3$ ,  $\gamma = 2$ ,  $p = -1$ ,  $q = 1$ ,  $y = 0$ ,  $m = 1/3$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.6.** (3.52) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1/2$ ,  $e_2 = 1/3$ ,  $\gamma = 2$ ,  $p = -1$ ,  $q = 1$ ,  $y = 0$ ,  $m = 1/3$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

#### 4. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = 0, d_1 = \frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)(Q^2 - 4PR)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), e_3 = -\frac{1}{2} (e_1 + e_2) (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)}), \quad (3.53)$$

bulunan katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonu

$$U(\omega_4) = d_1 \frac{F(\omega_4)}{F'(\omega_4)}, \quad \omega_4 = e_1 x + e_2 y + e_3 t \quad (3.54)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer  $F(\omega_4) = sn(\omega_4)$  olarak seçilirse

$$\omega_4 = e_1 x + e_2 y - \frac{1}{2} t (e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (3.55)$$

ve

$$\theta_4 = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (3.56)$$

dönüşümleri ve katsayılar için (3.24) denkleminin

$$u(\omega_4) = (1 - m^2) B_1 e^{i\theta_4} sc(\omega_4) nd(\omega_4), \quad (3.57)$$

$$v(\omega_4) = (1 - m^2)^2 B_2 sc^2(\omega_4) nd^2(\omega_4), \quad (3.58)$$

yeni Jakobi eliptik fonksiyonlar çözümleri bulunmuştur.

#### 5. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{P(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, b_1 = \frac{\sqrt{R(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, c_1 = 0, d_1 = 0,$$



$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8(Q - 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.59)$$

$$e_3 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8(Q - 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

elde edilen katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonu

$$U(\omega_5) = a_1 F(\omega_5) + \frac{b_1}{F(\omega_5)}, \quad \omega_5 = e_1 x + e_2 y + e_3 t \quad (3.60)$$

şeklinde yazılır. Burada  $F(\omega_5) = sn(\omega_5)$  olarak alındığında ise

$$\omega_5 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2} t (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(1 + m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.61)$$

ve

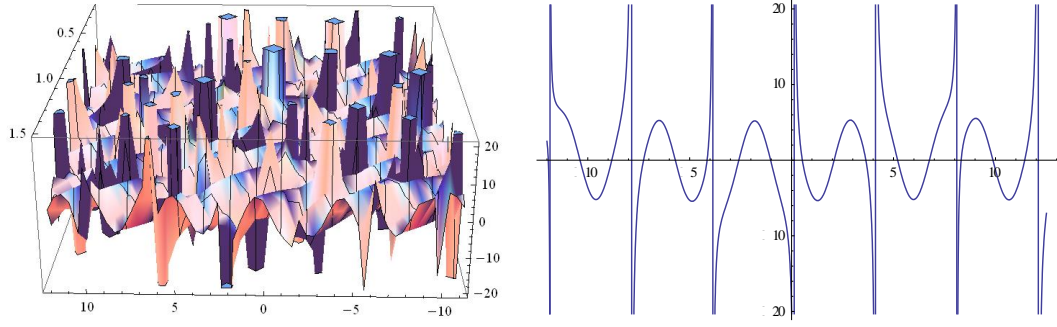
$$\theta_5 = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 8(1 + m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (3.62)$$

dönüşümleri ve gerekli katsayılar için (3.24) denkleminin

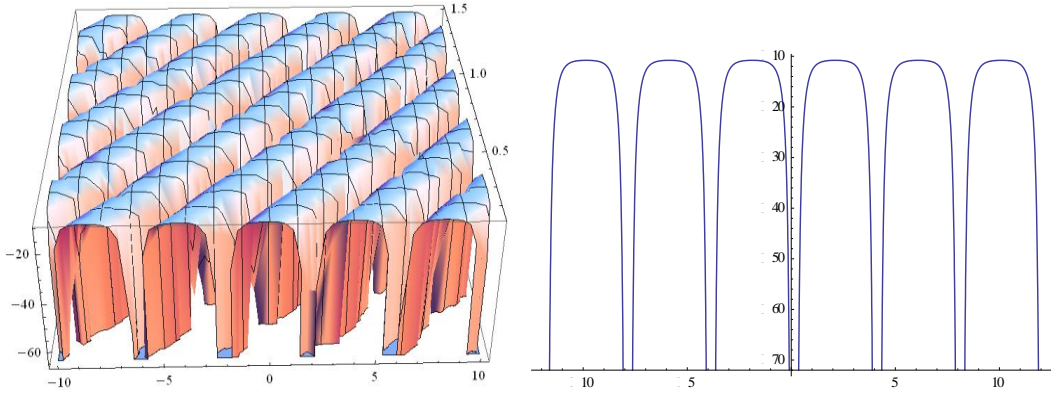
$$u(\omega_5) = B_1 \frac{e^{i\theta_5} (1 + m sn^2(\omega_5))}{sn(\omega_5)}, \quad (3.63)$$

$$v(\omega_5) = B_2 \frac{(1 + m sn^2(\omega_5))^2}{sn^2(\omega_5)}, \quad (3.64)$$

çözümleri elde edilir.



**Şekil 3.7.** (3.63) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 20, p = -1, q = 1, y = 0,$   
 $m = 4/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.8.** (3.64) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 20, p = -1, q = 1, y = 0,$   
 $m = 4/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 6. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = \frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, d_1 = \frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)(Q^2 - 4PR)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16(Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

$$e_3 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16(Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.65)$$

katsayıları için (3.33) çözüm fonksiyonunun diğer bir karşılığı

$$U(\omega_6) = c_1 \frac{F'(\omega_6)}{F(\omega_6)} + d_1 \frac{F(\omega_6)}{F'(\omega_6)}, \quad \omega_6 = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir.  $F(\omega_6) = sn(\omega_6)$  olarak kabul edilirse

$$\omega_6 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2} t (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16(2 - 4m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.67)$$

ve

$$\theta_6 = \frac{1}{4} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16(2 - 4m^2)(e_1^2 + e_2^2)}) (x + y - \gamma t), \quad (3.68)$$

dönüşümleri ve gerekli katsayılar için (3.24) denkleminin

$$u(\omega_6) = B_1 \frac{e^{i\theta_6} (1 - m^2 + m^2 cn^4(\omega_6))}{cn(\omega_6) dn(\omega_6) sn(\omega_6)}, \quad (3.69)$$

$$v(\omega_6) = B_2 \frac{\left( (1 - m^2 + m^2 cn^4(\omega_6)) \right)^2}{cn^2(\omega_6) dn^2(\omega_6) sn^2(\omega_6)}, \quad (3.70)$$

çözümleri bulunmuştur.

## 7. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{\sqrt{P(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}}{2\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{R(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}}{2\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}}{2\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$d_1 = 0, \quad \phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4(Q + 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

$$e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4(Q + 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (3.71)$$

dönüşümleri ve gerekli katsayılar için (3.24) denkleminin

$$U(\omega_7) = a_1 F(\omega_7) + \frac{b_1}{F(\omega_7)} + c_1 \frac{F'(\omega_7)}{F(\omega_7)}, \quad \omega_7 = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad (3.72)$$

olarak ifade edilir.  $F(\omega_5) = sn(\omega_5)$  olarak alındığında

$$\omega_7 = xe_1 + ye_2 + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4(-1 - m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)}\right)t, \quad (3.73)$$

ve

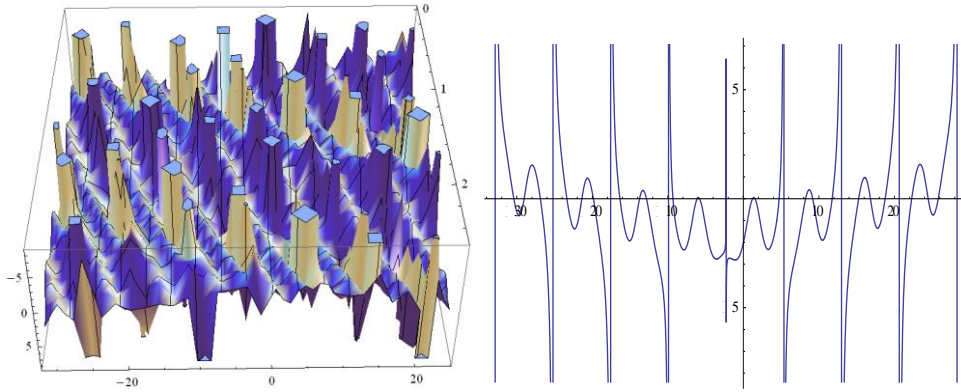
$$\theta_7 = \frac{1}{4}\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4(-1 - m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)}\right)(x + y - \gamma t), \quad (3.74)$$

dönüşümleri ve gerekli katsayılar için (3.24) denkleminin

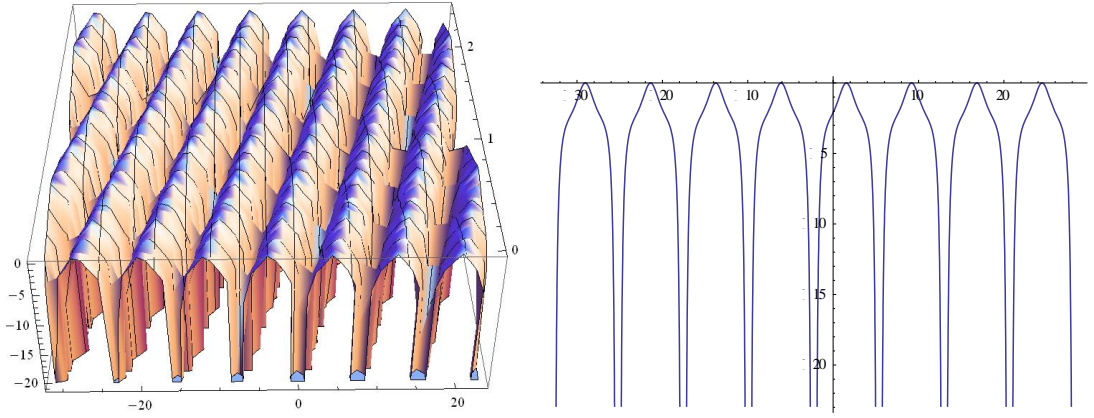
$$u(\omega_7) = B_1 e^{i\theta_7} \frac{(1 + cn(\omega_7)dn(\omega_7) + msn^2(\omega_7))}{2sn(\omega_7)}, \quad (3.75)$$

$$v(\omega_7) = B_2 \frac{(1 + cn(\omega_7)dn(\omega_7) + msn^2(\omega_7))^2}{4sn^2(\omega_7)}, \quad (3.76)$$

şeklinde literatürde bulunmayan yeni Jakobi eliptik fonksiyon çözümü elde edilmiştir.



**Şekil 3.9.** (3.75) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 3.10.** (3.76) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Yukarıda kullandığımız yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemini DS1 denklem sistemine uyguladığımızda da benzer çözümler bulunabilir.

## 4. YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ $F' / F$ -AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ile Davey-Stewartson (DS) denklem sistemine yeni genelleştirilmiş  $F' / F$ -Açılım yönteminin uygulaması verilmiştir.

### 4.1. Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Uygulamaları

Genel formdaki lineer olmayan kısmi türevli (3.1) BBM denkleminin 3. Bölümde olduğu gibi  $u(x, t) = u(\eta)$ ,  $\eta = e_1 x + e_2 t$  yürüyen dalga dönüşümü uygulanıp, elde edilen adi diferansiyel denkleme uygulanan integral işlemlerden sonra (3.4) adi diferansiyel denklemi elde edilmiştir. (3.4) denkleminin (2.7) de önerilen yeni çözüm fonksiyonu uygulanacaktır. (3.4) denkleminde yer alan  $u''$  ile  $u^2$  terimleri arasında kurulacak olan dengeleme prosedürü aşağıdaki gibidir. (2.5) denklemi göz önüne alındığında

$$F' = \pm \sqrt{PF^4 + QF^2 + R} \cong \pm \sqrt{PF^2} + \dots$$

şeklinde yazılabileceğinden (2.7)'deki çözüm fonksiyonu kısaca

$$u = a_N^N \left( \frac{F'}{F} \right)^N + \dots \cong \pm a_N^N P^{N/2} F^N + \dots$$

olarak alınır. Buna göre dengeleme prosedürüne tabi olan terimler

$$u^2 = a_N^{2N} \left( \frac{F'}{F} \right)^{2N} + \dots \cong \pm a_N^{2N} P^N F^{2N} + \dots$$

$$u'' \cong N(N+1) a_N^N P^{(N/2)+1} F^{N+2} + \dots$$

şeklinde hesaplanır. Balans prosedürü (3.4) ile verilen denkleminde en yüksek dereceden lineer olmayan  $u^2$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $u''$  terimi arasında yapılır.  $u'' \approx u^2$  dengeleme bağıntısından balans  $N=2$  olarak bulunur. Böylece (2.7)'de önerilen yeni çözüm fonksiyonunun en genel hali

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & a_0 + a_1 \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} + a_2 \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)^2 + b_1 \frac{F(\eta)}{F'(\eta)} + b_2 \left( \frac{F(\eta)}{F'(\eta)} \right)^2 + c_1 \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)' \frac{F(\eta)}{F'(\eta)} \\
& + c_2 \left( \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)' \frac{F(\eta)}{F'(\eta)} \right)^2 + d_1 \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \left( \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)' \right)^{-1} + d_2 \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \left( \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)' \right)^{-1} \right)^2, \quad (4.1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.1) ifadesinden elde edilen  $u''$  ve  $u^2$  karşılıkları (3.4) denkleminde yerine yazılır. Daha sonra (2.8) ve (2.9) denklemleri yardımıyla

$$\left( \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)' \right)^r \left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)^p \quad (r=0, 1; p=0, 1, 2, \dots) \text{ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı}$$

sıfır polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programıyla çözüldüğünde bulunması gereken  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1$  ve  $e_2$  katsayıları ile  $\eta$  dönüşümü aşağıda belirtilen durumlarda bulunmuştur. Bulunan katsayılar (4.1) yeni çözüm

fonksiyonunda yerine yazılarak;  $\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}$  veya  $\left( \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \right)'$  Jakobi eliptik

fonksiyonlarına bağlı ve 3. bölümde Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin yeni versiyon geliştirilmiş  $F$  açılım yöntemi ile bulunan çözümlerinden farklı  $F(\eta) = sn(\eta)$  için yeni  $u = u(\eta)$  çözümleri ifade edilmiştir.

### 1. Durum:

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = b_2 = c_2 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = \frac{-4\alpha\delta e_1^2 \left( \sqrt{Q^2 + 12PR} (1 + 8Q\delta e_1) + 2Q + 4\delta e_1^2 (Q^2 + 12PR) \right)}{\beta \left( -1 + 16\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR) \right)}, \quad (4.2)$$

$$b_2 = 0, \quad a_2 = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta - 4\beta\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR}}, \quad e_2 = \frac{\alpha e_1}{-1 + 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR}},$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_1(\eta_1) = a_0 + a_2 \left( \frac{F'(\eta_1)}{F(\eta_1)} \right)^2, \quad \eta_1 = e_1 x + e_2 t, \quad (4.3)$$

Şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_1) = sn(\eta_1)$  olarak alınırsa

$$C = 4\delta e_1^2 \sqrt{(1+14m^2+m^4)}, \quad C_1 = \frac{-\alpha(A-8(1+m^2)\delta e_1^2)}{\beta(-1+C)} \quad \text{ve} \quad C_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(-1+C)} \quad \text{olmak}$$

üzere

$$\eta_1 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1-A} t \right), \quad (4.4)$$

dönüşümü ile (3.1) denkleminin

$$u_1(\eta_1) = C_1 + C_2 cs^2(\eta_1) dn^2(\eta_1), \quad (4.5)$$

çözümü elde edilmiştir.

## 2. Durum:

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = c_2 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = \frac{4\alpha\delta e_1^2 \left( \sqrt{Q^2 + 12PR} (1 + 8Q\delta e_1^2) - 2(Q + 2\delta e_1^2(Q^2 + 12PR)) \right)}{\beta(-1 + 16\delta^2 e_1^4(Q^2 + 12PR))}, \quad (4.6)$$

$$b_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2(Q^2 - 4PR)(1 - 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR})}{\beta(-1 + 16\delta^2 e_1^4(Q^2 + 12PR))}, \quad e_2 = -\frac{\alpha e_1}{1 + 4\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR}},$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_2(\eta_2) = a_0 + a_2 \left( \frac{F(\eta_2)}{F'(\eta_2)} \right)^2, \quad \eta_2 = e_1 x + e_2 t, \quad (4.7)$$



Şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_2) = sn(\eta_2)$  olarak alınırsa  $C_3 = \frac{-\alpha(C + 16\delta e_1^2(1+m^2))}{\beta(-1+C)}$

ve  $C_4 = \frac{-12\delta\alpha e_1^2(1-m^2)^2}{\beta(1+C)}$  olmak üzere

$$\eta_2 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1+C} t \right), \quad (4.8)$$

dönüşümü için

$$u_2(\eta_2) = C_3 + C_4 sc^2(\eta_2) nd^2(\eta_2), \quad (4.9)$$

çözümü bulunmuştur.

### 3. Durum:

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = -\frac{8\alpha\delta e_1^2 \left( 2\sqrt{Q^2 - 3PR} (1 + 8Q\delta e_1^2) + Q + 32\delta e_1^2 (Q^2 - 3PR) \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))},$$

$$b_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (Q^2 - 4PR) (1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))}, \quad a_2 = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})},$$

$$e_2 = \frac{\alpha e_1}{-1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR}}, \quad (4.10)$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_3(\eta_3) = a_0 + a_2 \left( \frac{F'(\eta_3)}{F(\eta_3)} \right)^2 + b_2 \left( \frac{F(\eta_3)}{F'(\eta_3)} \right)^2, \quad \eta_3 = e_1 x + e_2 t, \quad (4.11)$$

şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_3) = sn(\eta_3)$  olarak alınırsa  $C_5 = 16\delta e_1 \sqrt{(1-m^2 + m^4)} e_1^2$ ,

$$C_6 = \frac{\alpha(-C_5 + 8(1+m^2)e_1^2)}{\beta(-1+C_5)}, C_7 = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1-C_5)} \text{ ve } C_8 = \frac{12\alpha\delta e_1^2(1-m^2)^2}{\beta(-1+C_5)} \text{ olmak}$$

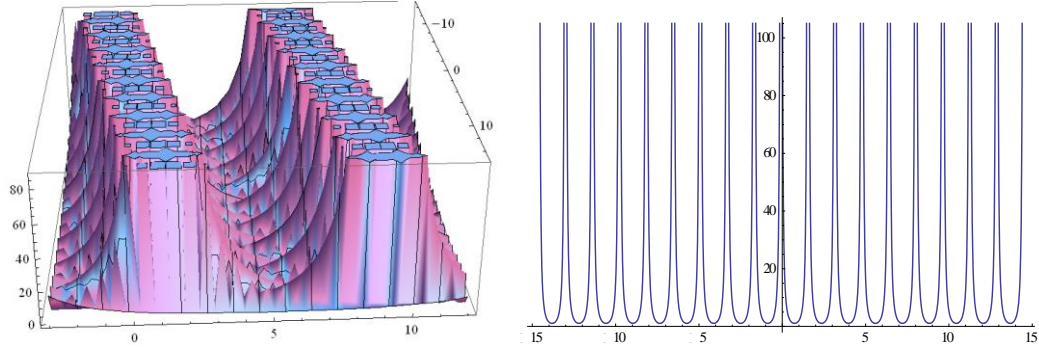
üzere

$$\eta_3 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1-C_5} t \right), \quad (4.12)$$

dönüşümü için

$$u_3(\eta_3) = C_6 + C_7 cs^2(\eta_3) dn^2(\eta_3) + C_8 sc^2(\eta_3) nd^2(\eta_3), \quad (4.13)$$

çözümü elde edilmiştir.



**Şekil 4.1.** (4.13) çözüm fonksiyonunun  $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1, m = 1/3$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

#### 4. Durum:

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = b_2 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = \frac{16\alpha\delta e_1^2 \left( \sqrt{Q^2 - 3PR} (-1 + 16Q\delta e_1^2) + Q - 16\delta e_1^2 (Q^2 - 3PR) \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 - 3PR))},$$

$$c_2 = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR})}, d_2 = 0, e_2 = -\frac{\alpha e_1}{1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR}}, \quad (4.14)$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_4(\eta_4) = a_0 + c_2 \left( \frac{F''(\eta_4)F(\eta_4) - F'(\eta_4)^2}{F(\eta_4)F'(\eta_4)} \right)^2, \quad \eta_4 = e_1 x + e_2 t,$$

(4.15)

şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_4) = sn(\eta_4)$  olarak alınırsa  $C_9 = 16\delta e_1^2 \sqrt{1-m^2+m^4}$ ,

$$C_{10} = \frac{-\alpha(C_9 + 16\delta e_1^2(1+m^2))}{\beta(-1+C_9)} \quad \text{ve} \quad C_{11} = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1-16C_9)} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\eta_4 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1-C_9} t \right), \quad (4.16)$$

dönüşümü için

$$u_4(\eta_4) = C_{10} + \frac{C_{11} \left( -1 + m^2 sn(\eta_4)^4 \right)^2}{cn(\eta_4)^2 dn(\eta_4)^2 sn(\eta_4)^2}, \quad (4.17)$$

çözümü bulunmuştur.

## 5. Durum:

$H = e_1 \sqrt{Q^2 - 3PR}$ ,  $K = (2Q^2 - 3PR)e_1$  ve  $T = 1 - 256H^2\delta^2 e_1^2$  olarak seçildiğinde

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0, \quad e_2 = \frac{\alpha e_1}{-1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 - 3PR}},$$

$$a_0 = \frac{-8\alpha\beta\delta e_1(1+16H\delta e_1) \left( T(Qe_1 - 3H) + \sqrt{(K+2HQ)T^2 e_1} \right)}{T^2},$$

$$d_2 = \frac{-32\alpha\delta(1+16H\delta e_1) \left( 3PKe_1^2 T - (H - Qe_1) \sqrt{(K+2HQ)e_1 T^2} \right)}{\beta T^2}, \quad (4.18)$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_5(\eta_5) = a_0 + d_2 \left( \frac{F(\eta_5)F'(\eta_5)}{F''(\eta_5)F(\eta_5) - F'(\eta_5)^2} \right), \quad \eta_5 = e_1 x + e_2 t, \quad (4.19)$$

şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_5) = sn(\eta_5)$  olarak alınırsa  $\bar{H} = e_1 \sqrt{(1-m^2+m^4)}$ ,  
 $\bar{K} = e_1(2+m^2+2m^4)$  ve  $\bar{T} = 1 - 256\delta^2 e_1^4 (1-m^2+m^4)$  ifadeleri için

$$C_{12} = \frac{8\alpha\beta\delta e_1(1+16\bar{H}\delta e_1) \left( \bar{T}((1+m^2)e_1 + 3\bar{H}) - \sqrt{(\bar{K} - 2\bar{H}(1+m^2))\bar{T}^2} e_1 \right)}{\bar{T}^2},$$

$$C_{13} = \frac{-32\alpha\delta(1+16\bar{H}\delta e_1) \left( 3PK e_1^2 \bar{T} - (\bar{H} + (1+m^2)e_1) \sqrt{(\bar{K} - 2\bar{H}(1+m^2))e_1 \bar{T}^2} \right)}{\beta \bar{T}^2},$$

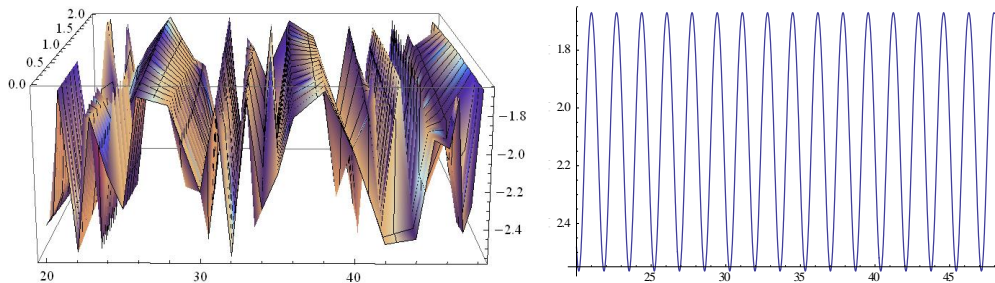
olmak üzere

$$\eta_5 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1-16\delta e_1 H} t \right), \quad (4.20)$$

dönüşümü için

$$u_5(\tau_5) = C_{12} + \frac{C_{13} cn(\tau_5)^2 dn(\tau_5)^2 sn(\tau_5)^2}{(-1+m^2 sn(\tau_5)^4)^2}, \quad (4.21)$$

çözümü bulunur.



**Şekil 4.2.** (4.21) çözüm fonksiyonunun  $\alpha = \beta = \delta = e_1 = 1$ ,  $m = 1/2$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

**6. Durum:**

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{16\alpha\delta e_1^2 \left( \sqrt{Q^2 + 12PR} (16Q\delta e_1^2 - 1) + Q - 16\delta e_1^2 (Q^2 + 12PR) \right)}{\beta \left( -1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR) \right)}, \\
a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = a_2 = b_2 = 0, \quad c_2 &= -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta \left( 1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR} \right)}, \\
d_2 &= \frac{192PR\alpha\delta e_1^2 \left( 1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR} \right)}{\beta \left( -1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR) \right)}, \quad e_2 = -\frac{\alpha e_1}{1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{Q^2 + 12PR}},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$\begin{aligned}
u_6(\eta_6) &= a_0 + c_2 \left( \frac{F''(\eta_6)F(\eta_6) - F'(\eta_6)^2}{F(\eta_6)F'(\eta_6)} \right)^2 + d_2 \left( \frac{F(\eta_6)F'(\eta_6)}{F''(\eta_6)F(\eta_6) - F'(\eta_6)^2} \right)^2, \tag{4.23} \\
\eta_6 &= e_1 x + e_2 t,
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_5) = sn(\eta_5)$  olarak alınırsa  $C_{14} = 16\delta e_1^2 \sqrt{1 + 14m^2 + m^4}$ ,

$$C_{15} = \frac{-\alpha(C_{14} + 16\delta e_1^2(1 + m^2))}{\beta(-1 + C_{14})}, \quad C_{16} = -\frac{12\alpha\delta e_1^2}{\beta(1 - C_{14})} \quad \text{ve} \quad C_{17} = \frac{192\alpha\delta e_1^2 m^2}{\beta(-1 + 16C_{14})} \quad \text{olmak}$$

üzere

$$\eta_6 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1 - C_{14}} t \right), \tag{4.24}$$

dönüşümü için

$$u_6(\eta_6) = C_{15} + \frac{C_{16} \left( -1 + m^2 sn(\eta_6)^4 \right)^2}{cn(\eta_6)^2 dn(\eta_6)^2 sn(\tau_6)^2} + \frac{C_{17} cn(\eta_6)^2 dn(\eta_6)^2 sn(\eta_6)^2}{\left( -1 + m^2 sn(\eta_6)^4 \right)^2}, \tag{4.25}$$

çözümü bulunur.

**7. Durum:**

$$a_0 = -\frac{8\alpha\delta e_1^2 \left( 2\sqrt{(Q^2 + 12PR)}(1 + 8Q\delta e_1^2) + Q + 32\delta e_1^2 (Q^2 + 12PR) \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))}, \quad a_1 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{12\alpha\delta e_1}{\beta(1 - 16\delta e_1^2 \sqrt{(Q^2 + 12PR)})}, \quad b_2 = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (Q^2 - 4PR) \left( 1 + 16\delta e_1^2 \sqrt{(Q^2 + 12PR)} \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))},$$

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{192PR\delta e_1^2 \alpha \left( 1 + 16e_1^2 \delta \sqrt{Q^2 + 12PR} \right)}{\beta(-1 + 256\delta^2 e_1^4 (Q^2 + 12PR))}, \quad (4.26)$$

$$e_2 = \frac{\alpha e_1}{-1 + 16\delta e_1^3 \sqrt{Q^2 + 12PR}},$$

katsayıları için (4.1) çözüm fonksiyonu

$$u_7(\eta_7) = a_0 + a_2 \left( \frac{F'(\eta_7)}{F(\eta_7)} \right)^2 + b_2 \left( \frac{F(\eta_7)}{F'(\eta_7)} \right)^2 + d_2 \left( \frac{F(\eta_7)F'(\eta_7)}{F''(\eta_7)F(\eta_7) - F'(\eta_7)^2} \right)^2, \quad (4.27)$$

$$\eta_7 = e_1 x + e_2 t,$$

şeklinde olur. Eğer  $F(\eta_5) = sn(\eta_5)$  olarak alınırsa  $C_{18} = 16e_1^2 \delta \sqrt{1 + 14m^2 + m^4}$ ,

$$C_{19} = \frac{\alpha(8(1+m^2)\delta e_1^2 - C_{18})}{\beta(1 - C_{18})}, \quad C_{20} = -\frac{12\alpha\delta e_1}{\beta(1 - C_{18})}, \quad C_{21} = \frac{12\alpha\delta e_1^2 (1 - m^2)^2 (1 + C_{18})}{\beta(-1 + C_{18}^2)}$$

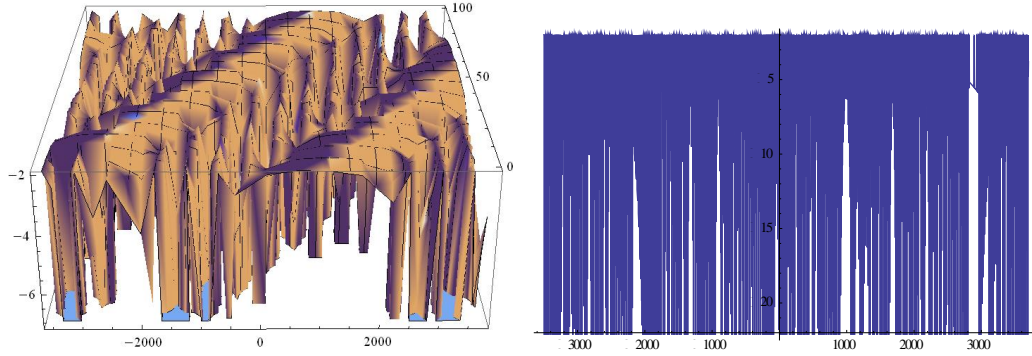
ve  $C_{22} = \frac{192m^2\alpha\delta e_1^2 (1 + C_{18})}{\beta(-1 + C_{18}^2)}$  olmak üzere

$$\eta_7 = e_1 \left( x - \frac{\alpha}{1 - 16e_1 C_{18}} t \right), \quad (4.28)$$

dönüşümü için

$$u(\eta_7) = C_{19} + C_{20}cs^2(\eta_7)dn^2(\eta_7) + C_{21}sc^2(\eta_7)nd^2(\eta_7) + \frac{C_{22}cn(\eta_7)^2 dn(\eta_7)^2 sn(\eta_7)^2}{(-1+m^2 sn(\eta_7)^4)^2}, \quad (4.29)$$

çözümü bulunmuştur.



**Şekil 4.3.** (4.29) çözüm fonksiyonunun  $\alpha = \beta = \delta = 1$ ,  $m = 3/4$ ,  $e_1 = -1$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 4.2. Davey-Stewartson Denkleminin Uygulamaları

Genel formdaki lineer olmayan kısmi türevli (3.24) DS2 denkleminin 3. Bölümde olduğu

$$\mu = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad \psi = \zeta(x + y - \gamma t), \quad (4.30)$$

$$u(x, y, t) = e^{i\psi} U(\mu), \quad v(x, y, t) = V(\mu),$$

yürüyen dalga dönüşümü uygulanıp, elde edilen adi diferansiyel denkleme uygulanan gerekli integral işlemlerinden sonra (3.27) adi diferansiyel denklemi ile (3.28) eşitliği elde edilmiştir. Çözüm fonksiyonu (2.7) için (3.32) denkleminde  $U''$  ile  $U^3$  terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi yapılır.

(2.5) denkleminde

$$F' = \pm \sqrt{PF^4 + QF^2 + R} \cong \pm \sqrt{PF^2 + \dots}$$

şeklinde yazılabileceğinden çözüm fonksiyonu (2.7) kısaca

$$u = a_N^N \left( \frac{F'}{F} \right)^N + \dots \cong \pm a_N^N P^{N/2} F^N + \dots$$

olarak alınmıştır. Buna göre Buna göre dengelemeyi sağlayan terimler

$$u^3 = a_N^{3N} \left( \frac{F'}{F} \right)^{3N} + \dots \cong \pm a_N^{3N} P^{3N/2} F^{3N} + \dots$$

$$u'' \cong N(N+1)a_N^N P^{(N/2)+1} F^{N+2} + \dots$$

şeklinde hesaplandığında elde edilen  $U'' \approx U^3$  dengeleme bağıntısından balans  $N = 1$  olarak bulunmuştur. Böylece

$$U(\mu) = a_0 + a_1 \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} + b_1 \frac{F(\mu)}{F'(\mu)} + c_1 \left( \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \right)' \frac{F(\mu)}{F'(\mu)} + d_1 \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \left( \left( \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \right)' \right)^{-1}, \quad (4.31)$$

şeklinde bulunması düşünülen çözüm fonksiyonun genel hali elde edilmiştir. (4.30) ifadesinden elde edilen  $U''$  ve  $U^3$  karşılıkları (3.32) denkleminde yerine

yazıldığında (2.8) ve (2.9) yardımıyla  $\left( \left( \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \right)' \right)^r \left( \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \right)^p$

( $r = 0, 1; p = 0, 1, 2, \dots$ ) Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı sıfır polinomu elde edilir.

Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programıyla çözüldüğünde  $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \zeta$  ve  $e_3$  katsayıları ile  $\mu$  ve  $\psi$  dönüşümleri aşağıdaki durumlarda bulunmuştur. Bulunan bu katsayılar ve

dönüşümler (4.30) denkleminde yerine yazılarak  $\frac{F'(\mu)}{F(\mu)}$  veya  $\left( \frac{F'(\mu)}{F(\mu)} \right)'$  Jakobi

eliptik fonksiyonlarına bağlı  $U = U(\mu)$  çözümleri bulunmuştur. Daha sonra (4.29)

dikkate alınarak 3. bölümde bulunan çözümlerden farklı olarak  $F(\mu) = sn(\mu)$  için

$u(\mu)$  ve  $v(\mu)$  çözümleri elde edilmiştir.



**1. Durum:**

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, b_1 = 0, d_1 = 0, c_1 = 0, \zeta = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

$$e_3 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.32)$$

katsayılarına karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_1) = a_1 \frac{F'(\mu_1)}{F(\mu_1)}, \quad \mu_1 = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir.  $F(\mu_1) = sn(\mu_1)$  olarak alındığında

$$\mu_1 = e_1 x + e_2 y - \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.34)$$

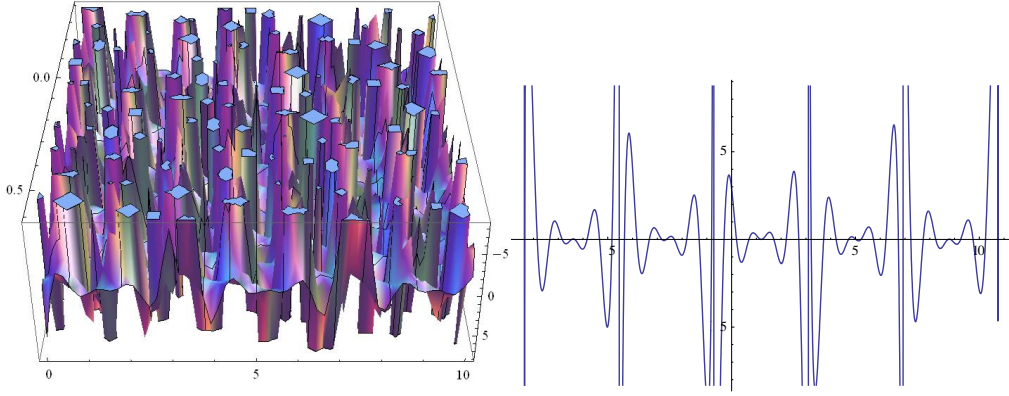
$$\psi_1 = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.35)$$

dönüşümleri için  $D_1 = \sqrt{\frac{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}$  ve  $D_2 = -\frac{2e_1^2(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}$  olmak üzere

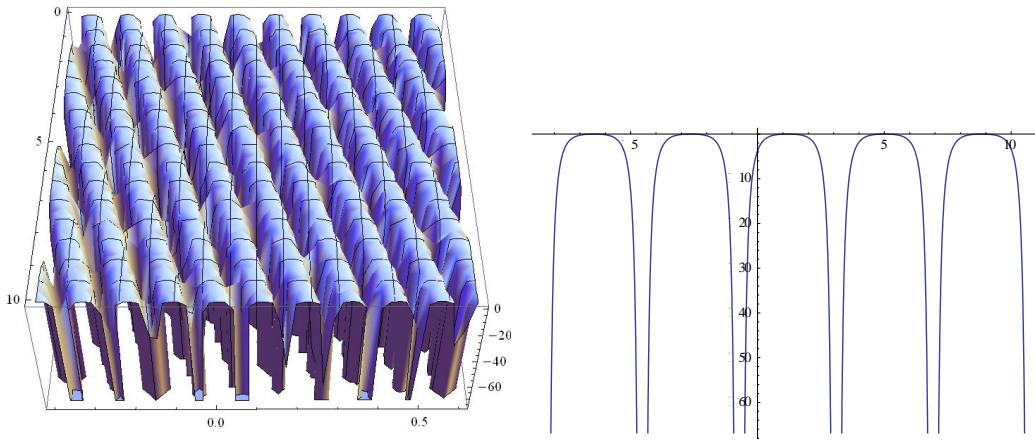
$$u(\mu_1) = D_1 \frac{e^{i\psi_1} cn(\mu_1) dn(\mu_1)}{sn(\mu_1)}, \quad (4.36)$$

$$v(\mu_2) = D_2 \frac{cn^2(\mu_2) dn^2(\mu_2)}{sn^2(\mu_2)}, \quad (4.37)$$

çözümleri elde edilmiştir.



**Şekil 4.4.** (4.36) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 4.5.** (4.37) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

## 2. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, d_1 = 0, c_1 = 0, b_1 = -\frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)(Q^2 - 4PR)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\zeta = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.38)$$

katsayılarına karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_2) = b_1 \frac{F(\mu_2)}{F'(\mu_2)}, \quad \mu_2 = e_1 x + e_2 y + e_3 t, \quad (4.39)$$

elde edilir.  $F(\mu) = sn(\mu)$  olarak seçildiğinde

$$\mu_2 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.40)$$

ve

$$\psi_2 = \frac{1}{4} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 16(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)}) (x + y - \gamma t), \quad (4.41)$$

dönüşümleri için  $D_3 = (1-m^2) \sqrt{\frac{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}$  ve  $D_4 = -\frac{2e_1^2(1-m^2)^2(e_1^2 + e_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}$

olmak üzere

$$u(\mu_2) = D_3 \frac{e^{i\psi_2} sn(\mu_2)}{cn(\mu_2) dn(\mu_2)}, \quad (4.42)$$

$$v(\mu_2) = D_4 \frac{sn^2(\mu_2)}{dn^2(\mu_2) cn^2(\mu_2)}, \quad (4.43)$$

çözümleri bulunmuştur.

### 3. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = -\frac{\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, d_1 = 0, b_1 = 0,$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 32Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad e_3 = -\frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 32Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.44)$$

katsayılarına karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_3) = c_1 \left( \frac{F''(\mu_3)F(\mu_3) - F'(\mu_3)^2}{F(\mu_3)F'(\mu_3)} \right), \quad \mu_3 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (4.45)$$

elde edilir.  $F(\mu) = sn(\mu)$  olarak alındığında

$$\mu_3 = e_1x + e_2y - \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 32(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.46)$$

ve

$$\psi_3 = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 32(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.47)$$

dönüşümleri için

$$u(\mu_3) = D_1 \frac{e^{i\psi_3} (1 - m^2 sn^4(\mu_3))}{cn(\mu_3) dn(\mu_3) sn(\mu_3)}, \quad (4.48)$$

$$v(\mu_3) = D_2 \frac{(1 - m^2 sn^4(\mu_3))^2}{cn^2(\mu_3) dn^2(\mu_3) sn^2(\mu_3)}, \quad (4.49)$$

çözümleri elde edilmiştir.

#### 4. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = 0, d_1 = \frac{4\sqrt{(e_1^2 + qe_2^2)(e_1^2 + e_2^2)}PR}{\sqrt{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\phi = \frac{1}{4}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 32Q(e_1^2 + e_2^2)}), \quad e_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 32Q(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.50)$$

katsayılarına karşılık karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_4) = d_1 \left( \frac{F(\mu_4)F'(\mu_4)}{F''(\mu_4)F(\mu_4) - F'(\mu_4)^2} \right), \quad \mu_4 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (4.51)$$

elde edilir. Eğer  $F(\mu) = sn(\mu)$  olarak seçilirse

$$\mu_4 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 32(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.52)$$

ve

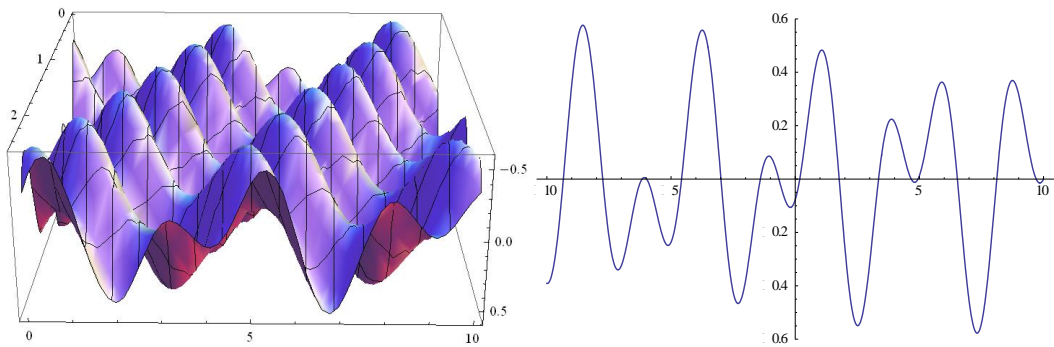
$$\psi_4 = -\frac{1}{4} \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 32(1+m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.53)$$

dönüşümleri için  $D_5 = -4m \sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}$  ve  $D_6 = -\frac{32e_1^2(e_1^2 + e_2^2)m^2}{p(e_1^2 - qe_2^2)}$  olmak üzere

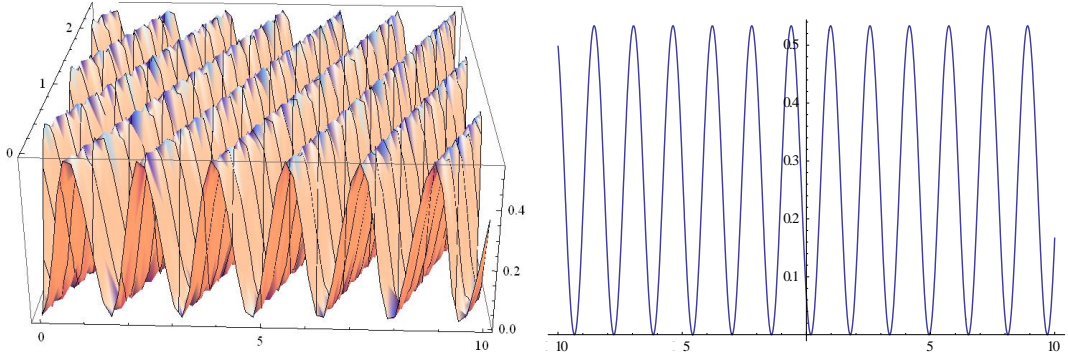
$$u(\mu_4) = D_5 \frac{e^{i\psi_4} cn(\mu_4) dn(\mu_4) sn(\mu_4)}{(1 - m^2 sn^4(\mu_4))}, \quad (4.54)$$

$$v(\mu_4) = D_6 \frac{cn^2(\mu_4) dn^2(\mu_4) sn^2(\mu_4)}{(m^2 sn^4(\mu_4) - 1)^2}, \quad (4.55)$$

çözümleri bulunmuştur.



**Şekil 4.6.** (4.54) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 1/2, \gamma = 10, p = -1, q = 1, y = 0, m = 1/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 4.7.** (4.55) çözüm fonksiyonunun  $e_1=1, e_2=1/2, \gamma=10, p=-1, q=1, y=0,$   
 $m=1/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

### 5. Durum:

$$a_0=0, a_1=a_1 = \sqrt{\frac{(e_1^2+e_2^2)(e_1^2+qe_2^2)}{p(e_1^2-qe_2^2)}}, b_1 = \sqrt{Q^2-4PR} \sqrt{\frac{(e_1^2+e_2^2)(e_1^2+qe_2^2)}{p(e_1^2-qe_2^2)}},$$

$$c_1=0, d_1=0, \phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16(Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

$$e_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16(Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.56)$$

bulunan katsayılarına karşılık

$$U(\mu_5) = a_1 \frac{F'(\mu_5)}{F(\mu_5)} + b_1 \frac{F(\mu_5)}{F'(\mu_5)}, \quad \mu_5 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (4.57)$$

(4.30) çözümü şeklinde elde edilir.

$F(\mu) = sn(\mu)$  olarak kabul edilirse

$$\mu_5 = e_1x + e_2y + \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16(2 - 4m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.58)$$

ve

$$\psi_5 = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16(2 - 4m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.59)$$

dönüşümleri için yeni Jakobi eliptik fonksiyon

$$u(\mu_5) = D_1 \frac{e^{i\psi_5} \left( cn^2(\mu_5) dn^2(\mu_5) + (1 - m^2) sn^2(\mu_5) \right)}{cn(\mu_5) dn(\mu_5) sn(\mu_5)}, \quad (4.60)$$

$$v(\mu_5) = D_2 \frac{\left( cn^2(\mu_5) dn^2(\mu_5) + (1 - m^2) sn^2(\mu_5) \right)^2}{cn^2(\mu_5) dn^2(\mu_5) sn^2(\mu_5)}, \quad (4.61)$$

çözümleri elde edilmiştir.

## 6. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = c_1 = -\sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, d_1 = 4\sqrt{PR} \sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$\phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 32(Q + 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right),$$

$$e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 32(Q + 6\sqrt{PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.62)$$

elde edilen katsayılarına karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_6) = c_1 \left( \frac{F''(\mu_6)F(\mu_6) - F'(\mu_6)^2}{F(\mu_6)F'(\mu_6)} \right) + d_1 \left( \frac{F(\mu_6)F'(\mu_6)}{F''(\mu_6)F(\mu_6) - F'(\mu_6)^2} \right), \quad (4.63)$$

$$\mu_6 = e_1 x + e_2 y + e_3 t,$$

elde edilir.  $F(\mu) = sn(\mu)$  olarak alındığında ise

$$\mu_6 = e_1 x + e_2 y + \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 32(-1 - m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.64)$$

ve

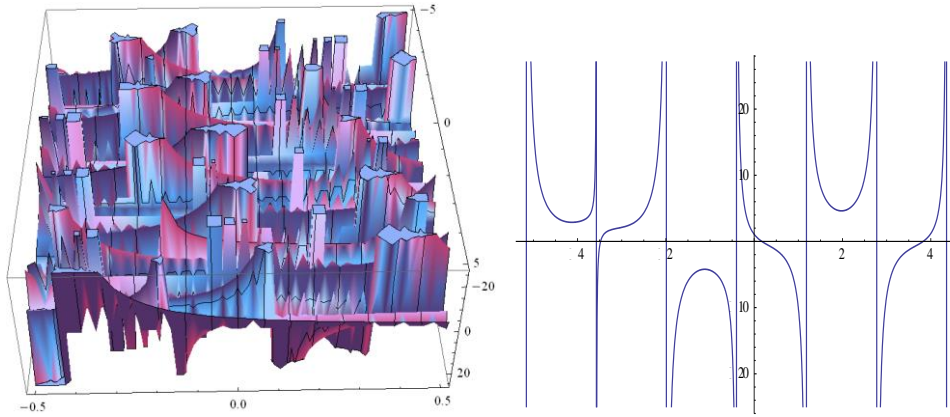
$$\psi_6 = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 32(-1 - m^2 + 6m)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.65)$$

dönüşümleri için

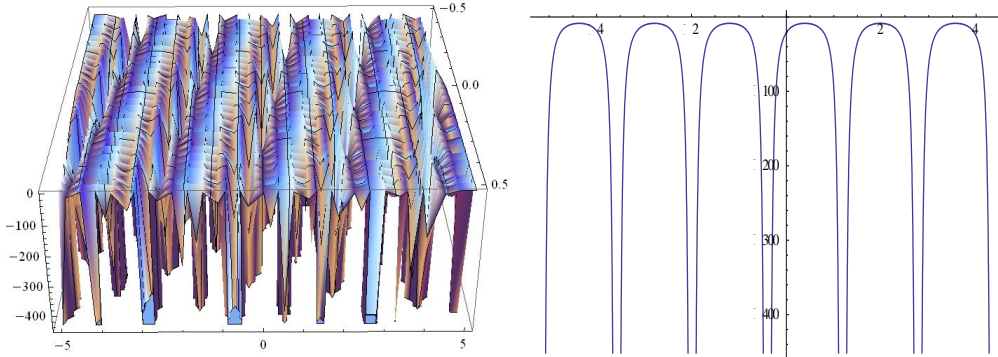
$$u(\mu_6) = D_1 e^{i\psi_6} \left( \frac{(1 - m^2 \operatorname{sn}^4(\mu_6))}{\operatorname{cn}(\mu_6) \operatorname{dn}(\mu_6) \operatorname{sn}(\mu_6)} - \frac{4m \operatorname{cn}(\mu_6) \operatorname{dn}(\mu_6) \operatorname{sn}(\mu_6)}{(1 - m^2 \operatorname{sn}^4(\mu_6))} \right), \quad (4.66)$$

$$v(\mu_6) = D_2 \left( \frac{(1 - m^2 \operatorname{sn}^4(\mu_6))}{\operatorname{cn}(\mu_6) \operatorname{dn}(\mu_6) \operatorname{sn}(\mu_6)} - \frac{4m \operatorname{cn}(\mu_6) \operatorname{dn}(\mu_6) \operatorname{sn}(\mu_6)}{(1 - m^2 \operatorname{sn}^4(\mu_6))} \right)^2, \quad (4.67)$$

çözümleri bulunmuştur.



**Şekil 4.8.** (4.66) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = 1, e_2 = 2, \gamma = 2, p = -1, q = 1, y = 0,$   
 $m = 1/5$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 4.9.** (4.67) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = q = 1, e_2 = \gamma = 2, p = -1, y = 0, m = 1/5$   
değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



## 7. Durum:

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}}, b_1 = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2} \sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{p(e_1^2 - qe_2^2)}},$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2)(e_1^2 + qe_2^2)}{pe_1^2 - pqe_2^2}}, d_1 = 0, \phi = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 8(-Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(-Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR})(e_1^2 + e_2^2)} \right), \quad (4.68)$$

katsayılarına karşılık (4.30) çözümü

$$U(\mu_5) = a_1 \frac{F'(\mu_5)}{F(\mu_5)} + b_1 \frac{F(\mu_5)}{F'(\mu_5)} + c_1 \left( \frac{F''(\mu_5)F(\mu_5) - F'(\mu_5)^2}{F(\mu_5)F'(\mu_5)} \right), \quad \mu_5 = e_1x + e_2y + e_3t, \quad (4.69)$$

elde edilir.  $F(\mu) = sn(\mu)$  olarak kabul edildiğinde

$$\mu_7 = e_1x + e_2y + \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 8(4 - 2m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) t, \quad (4.70)$$

ve

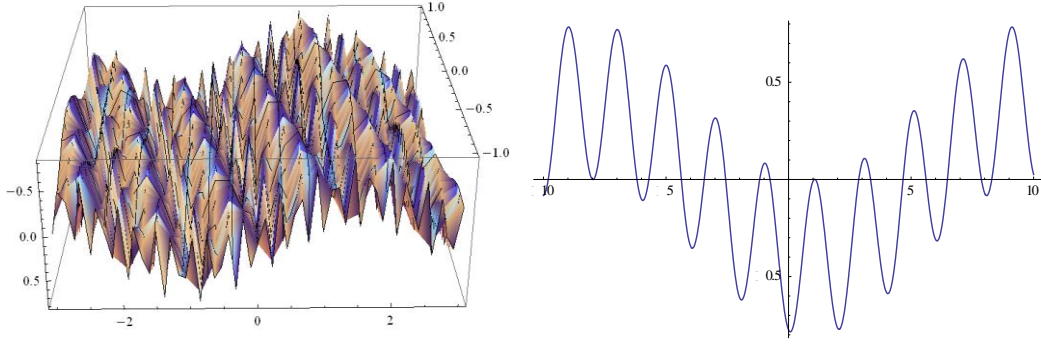
$$\psi_7 = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 8(4 - 3m^2)(e_1^2 + e_2^2)} \right) (x + y - \gamma t), \quad (4.71)$$

dönüşümleri için

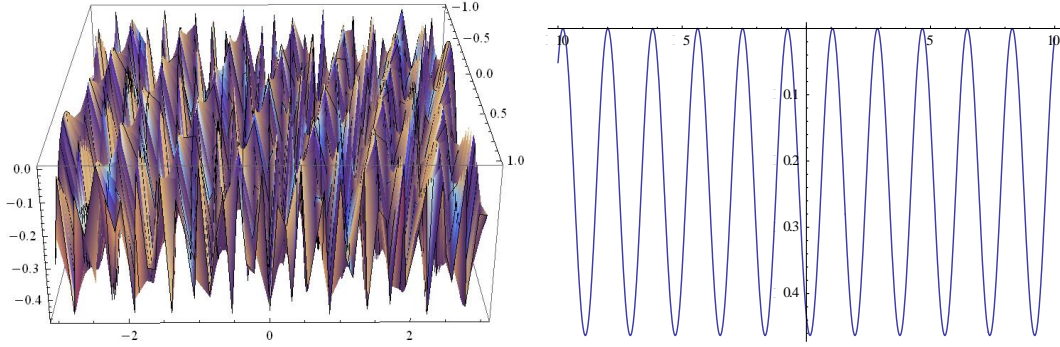
$$u(\mu_7) = D_1 e^{i\psi_7} \frac{(1 - m^2 - dn^2(\mu_7)) sn(\mu_7)}{cn(\mu_7) dn(\mu_7)}, \quad (4.72)$$

$$v(\mu_7) = D_2 \frac{(1 - m^2 - dn^2(\mu_7))^2 sn^2(\mu_7)}{cn^2(\mu_7) dn^2(\mu_7)}, \quad (4.73)$$

çözümleri elde edilmiştir.



**Şekil 4.10.** (4.72) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = q = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, y = 0,$   
 $m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



**Şekil 4.11.** (4.73) çözüm fonksiyonunun  $e_1 = q = 1, e_2 = 2, \gamma = 10, p = -1, y = 0,$   
 $m = 3/4$  değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Benzer biçimde DS1 denklemi içinde yukarıdaki belirtilen durumlardakine benzer çözümler bulunabilir

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında pek çok fiziksel olayın sonucunda ortaya çıkan problemlerin anlaşılması ve çözülebilmesi için elde edilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine bilinen bazı yöntemlerin geliştirilmiş yeni durumları verilmiştir. Öne sürülen bu yöntemler  $F$ -Açılım ve  $G'/G$ -Açılım yöntemlerinin birleştirilmesi sonucu oluşturulmuş yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi ile yeni geliştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yöntemleridir. Bu yöntemlerden yeni versiyon geliştirilmiş  $F$ -Açılım yöntemi (2.5) adi diferansiyel denklemi temel alınarak  $F$  Jakobi eliptik fonksiyon olmak üzere, terimleri  $F, 1/F, F'/F$  ve  $F/F'$  Jakobi eliptik fonksiyonları olan (2.4) çözüm fonksiyonu, dengeleme teriminin belirlenmesiyle kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Daha sonra (2.4) çözüm fonksiyonunda  $F$  yerine  $F'/F$  yazılarak aynı şekilde (2.8) adi diferansiyel denkleme ulaşarak (2.7) çözüm fonksiyonu dengeleme teriminin belirlenmesiyle yeni geliştirilmiş  $F'/F$ -Açılım yönteminin kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu yöntemler BBM denklemi ve DS denklem sistemine ayrı ayrı uygulanmış bulunan farklı çözümler belirtilen durumlarda verilmiştir.

Uygulanan her iki yöntem sonucunda literatürde bulunmayan yeni Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra bu çözümler için (2.5) denklemini sağlayan  $P, Q$  ve  $R$  katsayılarının özel seçimi ile  $F = sn(\xi)$  alınarak çözüm örnekleri verilmiş ve bazı örnek çözüm fonksiyonlarının iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bu çözümlere karşılık gelen benzerlikler ve farklılıklar soliton dalgalarla gösterilmeye çalışılmıştır. Böylece fiziksel olayın görsel karakteri hakkında gözlemler yapılabilmiştir. İstenirse farklı  $P, Q$  ve  $R$  katsayılarının seçimleri Ek 1'den alınarak farklı Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilebilecektir.

Kullanılan bu yöntemlerle dengeleme bağıntısını sağlayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için benzer Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerinin bulunabileceği görülmüştür. Ayrıca (2.5) denklemi yerine Riccati diferansiyel denkleminin uygun formları alınarak jakobi eliptik fonksiyonların dışında farklı türden fonksiyonları

(üstel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon, hiperbolik fonksiyon, ...) içeren yeni çözümler bulunabileceği öngörülmüştür.

## KAYNAKLAR

1. Hu, X.B., Ma W.X., Application of Hirota's Bilinear Formalism to the Toeplitz Lattice-Some Special Soliton-Like Solutions, *Phys. Lett. A*, 293, 161-165, 2002.
2. Ablowitz, M. J. and Clarkson, P.A., *Soliton , nonlinear evolution equations and inverse scattering*. New York Cambridge University Pres, 1991.
3. Matveev V. B., Salle M. A., *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
4. Cariello, F., Tabor M., 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, 39, 77-94.
5. Chuntao, Y., 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, 224, 77-84.
6. Fan, E.G., Extended tanh-Function Method and its Applications to Nonlinear Equations, *Phys. Lett. A*, 277, 212-218, 2000.
7. Feng, Z.S., On Explicit Exact Solutions to the Compound Burgers-KdV Equation, *Phys. Lett. A*, 293, 57-66, 2002.
8. He, J.H., Wu, X.H., 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 30, 700-708.
9. Liu, C.S., Trial Equation Method and its Applications to Nonlinear Evolution Equations, *Acta. Phys. Sin.*, 54(6), 2505-2509, 2005.
10. Liu, C.S., Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications, *Commun. Theor. Phys.*, 45(2), 219-223, 2006.
11. Liu, C.S., Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, *Comput. Phys. Commun.*, 181(2), 317-324, 2010.
12. Gurefe, Y., et al., Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, *Pramana-J. Phys.*, 77(6), 1023-1029, 2011.
13. Gurefe, Y., et al., Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *J. Adv. Math. Stud.*, 5(1), 41-47, 2012.

14. Pandir, Y., et al., Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 478531, 16 pp, 2012.
15. Pandir Y., et al., Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation, *Phys. Scr.*, 87(2), 025003, 12 pp, 2013.
16. Gurefe, Y., et al., Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 219(10), 5253-5260, 2013
17. Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q., New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, 290, 72-76, 2001.
18. Shen S., Pan, Z., A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, 308, 143-148, 2003.
19. Chen, H.T., Hong-Qing, Z., New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized  $(2 + 1)$ -dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 20, 765-769, 2004.
20. Chen, Y., Yan, Z., The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29, 948-964, 2006.
21. Wang, M., Li, X., Applications Of F-Expansion To Periodic Wave Solutions For a New Hamiltonian Amplitude Equation *Chaos, Solitons & Fractals*, 24, pp.1257-1268 ,2005.
22. Yang, K., Liu, J., The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, pp.111-121, 2004.
23. Abdou, M.A., Further improved F-expansion and new exact solutions for nonlinear evolution equations, *Nonlinear Dynamics*, 52 , pp.227-288, 2008.
24. Zhang, S., Li, W., Zheng, F., Yu, J., Ji, M., Lü, Z., Ma, C., A Generalized Fexpansion Method and its Application to  $(2 + 1)$ -dimensional Breaking Soliton Equations, *International Journal of Nonlinear Science*, 5, pp.25-32, 2008.
25. Cai, G., Wang, Q., Huang, J., A Modified F-expansion Method for Solving Breaking Soliton Equation, *International Journal of Nonlinear Science* 2, pp.122-128, 2006.
26. Zhang, J.L., Wang, M.L., Wang, Y.M., Fang, Z.D., The improved F-expansion method and its applications, *Physics Letters A*, 350, pp.103-109, 2006.

27. Zhang, S., Xia, T., A Generalized F-Expansion Method With Symbolic Computation Exactly Solving Broer–Kaup Equations, *Applied Mathematics and Computation*,189, pp.949-955, 2007.
28. Zhang, S., Xia, T., An Improved Generalized F-Expansion Method And Its Application To The (2 + 1)-Dimensional KdV Equations . *Communications In Nonlinear Science And Numerical Simulation*,13, pp.1294-1301, 2008.
29. Wang, M. L. W. and Li, X. and Zhang, J. , *Physics Letters A* 372, 417, 2008.
30. Guo S., Zhou Y., The extended  $G'/G$ - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 3214-3221, 2010.
31. Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L., A generalized  $G/G$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2009.
32. Zhenya Y., Jacobi elliptic function solutions of nonlinear wave equations via the new sinh-Gordon equation expansion method, *Academia Sinica*, 363-375, 2003.
33. Yong C., Qi W., , Biao L.,” Jacobi Elliptic Function Rational Expansion Method with Symbolic Computation to Construct New Doubly-periodic Solutions of Nonlinear Evolution Equations”, *Z. Naturforsch.* 59a, 529–536, 2004.
34. Qi W., Yong C.,Zhang H., “A new Jacobi elliptic function rational expansion method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation”, *Chaos,Solitons and Fractals* 23, 477–483, 2005.
35. Chunhuan X., “Jacobi Elliptic Function Solutions for (2 + 1) Dimensional Boussinesq and Kadomtsev-Petviashvili Equation”, *Applied Mathematics* 2, 1313-1316, 2011.
36. Yafeng X., Haili X., Hongqing Z., “A New Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Its Application to the Generalized Shallow Water Wave Equation”, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 21 pages, 10.1155/2012.
37. Alofi A. S., “Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method for Nonlinear Benjamin-Bona-Mahony Equations”, *International Mathematical Forum*, 2639 – 2649, 2012.

38. Baojian H., Dianchen L., Fushu S., "The extended Jacobi Elliptic Functions expansion method and new exact solutions for the Zakharov equations", *World Journal of Modelling and Simulation* 3, 216-224, 2009.
39. Enam I., "Generalized Jacobi Elliptic Function Method for Traveling Wave Solutions of (2+1)-Dimensional Breaking Soliton Equation," *Çankaya University Journal of Science and Engineering* No. 1, 39-50, 2010.
40. İnç M., Ergüt M., "Periodic wave solutions for the generalized shallow water wave equation by the improved jacobi elliptic function", *Applied Mathematics E-Notes*, 89-96, 5, 2005.
41. Yafeng X., Haili X., Hongqing Z., "An Extended Elliptic Equation Expansion Method and Its Application in The ZK-MEW Equation", *International Journal of Nonlinear Science* 3, 316-322, 2012.
42. Bin Z., Qinghua F., "The Jacobi Elliptic Equation Method For Solving Fractional Partial Differential Equations", Preprint submitted to *Abstract and Applied Analysis* April 23, 2014.
43. Baojian H., Dianchen L., "New Exact Jacobi Elliptic Function Solutions for the Coupled Schrödinger-Boussinesq Equations", *Journal of Applied Mathematics* 10.1155/170835, 2013.
44. Khaled A. G., T. A. Nofal, "Exact Solutions For Nonlinear Partial Differential Equations And its Applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics* , 241-255, 2013.
45. Halilov H., *Diferansiyel denklemler ve Linner Cebirin Elemanları*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2003.
46. Çağlayan M., Çelebi O., *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayıncılık, Bursa, 2000.
47. Koca K., *Kısmi Türevli Denklemler*, Gezi Kitapevi, Ankara, 2000.
48. İleri Matematik/ Schaum's, Nobel Akademi Yayıncılık, Spiegel M., 1999.
49. Hasibun N., Farah A. A., The Modified Benjamin-Bona-Mahony Equation via the Extended Generalized Riccati Equation Mapping Method, *Applied Mathematical Sciences*, 5495 – 5512, 2012.
50. Siddique I., Rizvi S. T. R, Batool F., New Exact Traveling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations, 1749-3889, *International Journal of Nonlinear Science*, 2010.
51. Zhao Y. M., F-Expansion Method and Its Application for Finding New Exact



Solutions to the Kudryashov-Sinelshchikov Equation, Journal of Applied Mathematics, 7 pages, 2013.

52. E.M.E. Zayed, Traveling wave solutions for higher dimensional nonlinear evolution Equations using  $G'/G$ -Expansion Method, J. Appl. Math. & Informatics, 383-395, 2010.
53. Khan K., Akbar M. A., Solitary Wave Solutions of Some Coupled Nonlinear Evolution Equations, Journal of scientific research, J. Sci. Res. 6 (2), 273-284, 2014.
54. Ayati Z., Exact Solutions of Nonlinear (2+1)-Dimension Nonlinear Dispersive Long Wave and Coupled Boiti–Leon–Pempinelli Equations by using the Modified Simple Equation Method, World Applied Programming, 565-571, December 2013.
55. Yang Y., He Y., Feng A., New Jacobi Elliptic Function Solutions for Coupled KdV-mKdV Equation, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science WCECS 2014, 22-24, 2014
56. Cai G., Ren L., Zhang F., Ma K., Wang Y. An Extended Generalized F-expansion Method for Solving Coupled MKDV Equations, International Journal of Nonlinear Science, No.1, pp.51-57, 2008.
57. Hao Z., Guang M. W., YI T. G., On the general form of the Benjamin--Bona—Mahony equation in fluid mechanics, Czechoslovak Journal of Physics, January, 373-374, 2002
58. Seadawy A. R., Sayed A., Traveling Wave Solutions of the Benjamin-Bona-Mahony Water Wave Equations, Abstract and Applied Analysis, Article ID 926838, 7 pages, 2014
59. Dutykh D., Pelinovsky E., Numerical simulation of a solitonic gas in KdV and KdV–BBM equations, <http://arxiv.org/abs/1312.1651v3>
60. Liu C., Wang C., Dai Z., Liu J., New Rational Homoclinic and Rogue Waves for Davey-Stewartson Equation, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Article ID 572863, 8 pages, 2014.
61. Tajiri M., Arai T., Periodic Soliton Solutions to the Davey–Stewartson Equation, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 30, Part 1, 210–217., 2000.
62. Zedan H. A., Saedi A. A., Periodic and Solitary Wave Solutions of the Davey-Stewartson Equation Applied Mathematics & Information Sciences 4(2) ,253–260, 2010.

## EKLER

**Ek 1:** (1.10) denkleminde verilen katsayılar için Jakobi eliptik fonksiyonlar

| NO | $P$                           | $Q$                      | $R$                      | $F(\xi)$                      |
|----|-------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 1  | $m^2$                         | $-(1+m^2)$               | 1                        | $sn\xi$                       |
| 2  | $-m^2$                        | $2m^2-1$                 | $1-m^2$                  | $cn\xi$                       |
| 3  | -1                            | $2-m^2$                  | $m^2-1$                  | $dn\xi$                       |
| 4  | 1                             | $-(1+m^2)$               | $m^2$                    | $ns\xi$                       |
| 5  | $1-m^2$                       | $2m^2-1$                 | $-m^2$                   | $nc\xi$                       |
| 6  | $m^2-1$                       | $2-m^2$                  | -1                       | $nd\xi$                       |
| 7  | $1-m^2$                       | $2-m^2$                  | 1                        | $sc\xi$                       |
| 8  | 1                             | $2-m^2$                  | $1-m^2$                  | $cs\xi$                       |
| 9  | $-m^2(1-m^2)$                 | $2m^2-1$                 | 1                        | $sd\xi$                       |
| 10 | 1                             | $2m^2-1$                 | $-m^2(1-m^2)$            | $ds\xi$                       |
| 11 | $m^2$                         | $-(1+m^2)$               | 1                        | $cd\xi$                       |
| 12 | 1                             | $-(1+m^2)$               | $m^2$                    | $dc\xi$                       |
| 13 | $\frac{1}{4}$                 | $\frac{1-2m^2}{2}$       | $\frac{1}{4}$            | $ns\xi \pm cs\xi$             |
| 14 | $\frac{1-m^2}{4}$             | $\frac{1+m^2}{2}$        | $\frac{1-m^2}{4}$        | $nc\xi \pm sc\xi$             |
| 15 | $\frac{1}{4}$                 | $\frac{m^2-2}{2}$        | $\frac{m^2}{4}$          | $ns\xi \pm ds\xi$             |
| 16 | $\frac{(1-m^2)^2}{4}$         | $\frac{1+m^2}{2}$        | $\frac{1}{4}$            | $ds\xi \pm cs\xi$             |
| 17 | $-\frac{1}{4}$                | $\frac{1+m^2}{2}$        | $\frac{(1-m^2)^2}{4}$    | $mcn\xi \pm dn\xi$            |
| 18 | $\frac{m^4(1-m^2)}{2(2-m^2)}$ | $\frac{2(1-m^2)}{m^2-2}$ | $\frac{1-m^2}{2(2-m^2)}$ | $dc\xi \pm \sqrt{1-m^2}nc\xi$ |

|    |                    |                            |                             |   |
|----|--------------------|----------------------------|-----------------------------|---|
| 19 | $\frac{m^2}{4}$    | $\frac{m^2 - 2}{2}$        | $\frac{m^2}{4}$             | $sn\xi \pm icn\xi$                                |
| 20 | $\frac{m^2}{4}$    | $\frac{m^2 - 2}{2}$        | $\frac{m^2}{4}$             | $\sqrt{1-m^2} sd\xi \pm cd\xi$                    |
| 21 | $\frac{1}{4}$      | $\frac{1-m^2}{2}$          | $\frac{1}{4}$               | $mcd\xi \pm i\sqrt{1-m^2} nd\xi$                  |
| 22 | $\frac{1}{4}$      | $\frac{1-2m^2}{2}$         | $\frac{1}{4}$               | $msn\xi \pm idn\xi$                               |
| 23 | $\frac{1}{4}$      | $\frac{1-m^2}{2}$          | $\frac{1}{4}$               | $\sqrt{1-m^2} sc\xi \pm dc\xi$                    |
| 24 | $\frac{-1+m^2}{4}$ | $\frac{1+m^2}{2}$          | $\frac{-1+m^2}{4}$          | $msd\xi \pm nd\xi$                                |
| 25 | $\frac{m^2}{4}$    | $\frac{m^2 - 2}{2}$        | $\frac{1}{4}$               | $\frac{sn\xi}{1 \pm dn\xi}$                       |
| 26 | $\frac{1}{4}$      | $\frac{1-2m^2}{2}$         | $\frac{1}{4}$               | $\frac{sn\xi}{1 \pm cn\xi}$                       |
| 27 | $\frac{1-m^2}{4}$  | $\frac{1+m^2}{2}$          | $\frac{1-m^2}{4}$           | $\frac{cn\xi}{1 \pm sn\xi}$                       |
| 28 | 1                  | $2-4m^2$                   | 1                           | $\frac{sn\xi dn\xi}{cn\xi}$                       |
| 29 | $m^4$              | 2                          | 1                           | $\frac{sn\xi cn\xi}{dn\xi}$                       |
| 30 | 1                  | $m^2 + 2$                  | $1-2m^2 + m^4$              | $\frac{dn\xi cn\xi}{sn\xi}$                       |
| 31 | $-\frac{4}{m}$     | $-m^2 + 6m - 1$            | $m^4 - 2m^3 + m^2$          | $\frac{mcn\xi dn\xi}{msn^2\xi + 1}$               |
| 32 | $\frac{4}{m}$      | $-m^2 - 6m - 1$            | $m^4 + 2m^3 + m^2$          | $\frac{mcn\xi dn\xi}{msn^2\xi - 1}$               |
| 33 | $4\sqrt{1-m^2}$    | $-m^2 + 6\sqrt{1-m^2} + 2$ | $-m^2 + 2\sqrt{1-m^2} + 2$  | $\frac{m^2 cn\xi sn\xi}{\sqrt{1-m^2} - dn^2\xi}$  |
| 34 | $-4\sqrt{1-m^2}$   | $-m^2 - 6\sqrt{1-m^2} + 2$ | $-m^2 - 2\sqrt{1-m^2} + 2$  | $-\frac{m^2 cn\xi sn\xi}{\sqrt{1-m^2} + dn^2\xi}$ |
| 35 | $-(m+1)^2 B^2$     | $2m^2 + 2$                 | $\frac{-m^2 + 2m - 1}{B^2}$ | $\frac{msn^2\xi - 1}{B(msn^2\xi + 1)}$            |
| 36 | $-(m-1)^2 B^2$     | $2m^2 + 2$                 | $\frac{-m^2 - 2m - 1}{B^2}$ | $\frac{msn^2\xi + 1}{B(msn^2\xi - 1)}$            |

|    |  |                                     |                                      |  |
|----|--|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 37 | $\frac{(m-1)^2 A^2}{4}$                    | $\frac{m^2+1}{2} + 3m$              | $\frac{(m-1)^2}{4A^2}$               | $\frac{dn\xi cn\xi}{A(1+sn\xi)(1+msn\xi)}$                                     |
| 38 | $\frac{(m+1)^2 A^2}{4}$                    | $\frac{m^2+1}{2} - 3m$              | $\frac{(m+1)^2}{4A^2}$               | $\frac{dn\xi cn\xi}{A(1+sn\xi)(1-msn\xi)}$                                     |
| 39 | $\frac{-m^2-2\sqrt{1-m^2}+2}{4}$           | $\frac{m^2}{2} - 3\sqrt{1-m^2} - 1$ | $\frac{-m^2-2\sqrt{1-m^2}+2}{4}$     | $\frac{m^2 sn\xi cn\xi}{sn^2\xi + (1+\sqrt{1-m^2})dn\xi - 1 - \sqrt{1-m^2}}$   |
| 40 | $\frac{-m^2+2\sqrt{1-m^2}+2}{4}$           | $\frac{m^2}{2} + 3\sqrt{1-m^2} - 1$ | $\frac{-m^2+2\sqrt{1-m^2}+2}{4}$     | $\frac{m^2 sn\xi cn\xi}{sn^2\xi + (-1+\sqrt{1-m^2})dn\xi - 1 + \sqrt{1-m^2}}$  |
| 41 | $\frac{C^2 m^4 - (B^2 + C^2)m^2 + B^2}{4}$ | $\frac{m^2+1}{2}$                   | $\frac{m^2-1}{4(C^2 m^2 - B^2)}$     | $\frac{\sqrt{(B^2 - C^2)/(B^2 - C^2 m^2)} + sn\xi}{Bcn\xi + Cdn\xi}$           |
| 42 | $\frac{C^2 m^2 + B^2}{4}$                  | $\frac{-2m^2+1}{2}$                 | $\frac{1}{4(C^2 m^2 + B^2)}$         | $\frac{\sqrt{(C^2 m^2 + B^2 - C^2)/(B^2 + C^2 m^2)} + cn\xi}{Bsn\xi + Cdn\xi}$ |
| 43 | $\frac{C^2 + B^2}{4}$                      | $\frac{m^2-2}{2}$                   | $\frac{m^4}{4(C^2 + B^2)}$           | $\frac{\sqrt{(C^2 + B^2 - m^2 C^2)/(B^2 + C^2)} + dn\xi}{Bsn\xi + Ccn\xi}$     |
| 44 | $P < 0$                                    | $Q > 0$                             | $\frac{(1-m^2)Q^2}{(m^2-2)^2 P}$     | $\sqrt{\frac{-Q}{(2-m^2)P}} dn\left(\sqrt{\frac{Q}{2-m^2}}\xi\right)$          |
| 45 | $P < 0$                                    | $Q > 0$                             | $\frac{m^2(m^2-1)Q^2}{(2m^2-1)^2 P}$ | $\sqrt{\frac{-m^2 Q}{(2m^2-1)P}} cn\left(\sqrt{\frac{Q}{2m^2-1}}\xi\right)$    |
| 46 | $P > 0$                                    | $Q < 0$                             | $\frac{m^2 Q^2}{(m^2+1)^2 P}$        | $\sqrt{\frac{-m^2 Q}{(m^2+1)P}} sn\left(\sqrt{\frac{-Q}{m^2+1}}\xi\right)$     |

## ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Sakarya’da doğan Nail TURHAN, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Pazarköy İlköğretim Okulu ve Ali Dilmen Lisesinde tamamlamıştır. 1999 yılında kazandığı Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2003 yılında bitirmiştir. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde tezsiz yüksek lisansına başlamış 2004 yılında mezun olmuştur. 2005 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı liselerde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda başlamıştır.

**İletişim Bilgileri:** Yahyalı Mustafa Koyuncu Fen Lisesi Yahyalı/KAYSERİ

Telefon: (554) 938 76 10

E-posta: nxturhan@gmail.com