**T.C.**
**BOZOK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

# $E^4$ ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

**Bahar GÜÇLÜ**

**Tez Danışmanı**
**Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN**

**Yozgat 2015**

**T.C.**
**BOZOK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

# $E^4$ ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

**Bahar GÜÇLÜ**

**Tez Danışmanı**
**Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN**

**Yozgat 2015**

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312007 numaralı öğrencisi Bahar GÜÇLÜ'nün hazırladığı "$E^4$ Öklid Uzayında Bazı Özel Eğrilerin Karakterizasyonu" başlıklı yüksek lisans tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 19.01.2015 Pazartesi günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına oy birliğiyle karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR Yusuf Pandır

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02/03/2015 tarih ve 06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

02/03/2015

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**$E^4$ ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU**

**Bahar GÜÇLÜ**

**Bozok Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**2015; sayfa 48**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN**

## ÖZET

Bu çalışmada genel heliks, eğik heliks, CCR eğrisi, Bertrand eğrisinin $E^4$ uzayında tanımları verilmiştir. Daha sonra CCR eğrisi ile helikslerin bazı karakterizasyonlarını verilmiştir. $E^4$ Öklid uzayındaki eğrilikler ile Bertrand eğri çiftinin Frenet-Serret vektörleri arasındaki ilişki incelenmiştir. $E^4$ de bir Bertrand eğrisinin heliks olduğu ve heliksin involüt-evolütünün bazı karakterizasyonları açıklanmıştır.

***Anahtar Kelimeler:*** *Genel heliks, eğik heliks, CCR eğrileri, Bertrand eğriler, Frenet-Serret vektörleri*

**SOME CHARACTERIZATIONS OF SPECIAL CURVESIN THE EUCLIDEAN SPACE $E^4$**

**Bahar GÜÇLÜ**

**BOZOK UNIVERSITY**
**GRADUATE SCHOOL İN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES THESIS**

**2015; Page: 48**

**Thesis Supervisor:Assoc. Prof. Yusuf Ali TANDOĞAN**

# ABSTRACT

In this work, it has been defined general helix, the CCR curves, the curves Bertrand in Euclidean 4-space. Thereafter some characterizations of helix and CCR curves is given. The relationship between curvature in Euclidean 4-space and Frenet-Serret vectors of Bertrand curve is examined. It has been explained that a Bertrand curve in Euclidean 4-space is a helix and that some characterizations of involute-evolute of a helix.

***Key Words:*** *General helix, slant helix, CCR curves, Bertrand curves, Frenet-Serret vektors*

# TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmam boyunca yardımcı olan saygı değer hocam Yrd. Doç. Yusuf Ali TANDOĞAN'a, çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen aileme en derin duygularımla teşekkür ederim.

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| R | Reel sayılar cismi |
| $E^4$ | Öklid 4-uzay |
| $E^3$ | Öklid 3-uzay |
| $\Vert . \Vert$ | Norm |
| $\langle . \rangle$ | İç çarpım |
| $\kappa$ | 1. eğrilik |
| $\tau$ | 2. eğrilik |
| $\sigma$ | 3. eğrilik |
| T | Tanjant vektör |
| N | Normal vektör |
| B | Binormal vektör |
| E | Trinormal vektör |
| $\wedge$ | Vekrörel çarpım |

# GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğrileri bir geometrik kümenin noktaları veya noktaların geometrik yerleri olarak ele alıyoruz. $E^4$ öklid uzayında eğriyi hareketli bir parçanın çizdiği bir yol olarak düşünüyoruz.[12]

1953 yılında ilk kez Watson ve Crick tarafından yayınlandı. Onlar fosfodiester bağları aracılığı ile bağlanan guanin, adenin, timin, sitozin ve kovalent bağların ipliklerinin ters yönde yan yana dizili iki tamamlayıcının var olduğunu DNA nın moleküler modelinden kurdular.[12]

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında teğet vektör ile sabit doğrultuda sabit açı yapan eğriler genel helis olarak tanımlanmıştır. Helislerle ilgili klasik bir sonuç 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Verant tarafından ispatlanmıştır.[2] Bir eğrinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ olmasıdır. Buna sabit eğrilik oranları yada kısaca CCR eğrisi diyoruz.[6]

Eğik helis Izumiya ve Takeuchi tarafından tanımlanmaktadır. $E^3$ de eğik helislerin karakterlerini verir.[8]

Herhangi bir noktada iki eğrinin ortak asli normal vektörü varsa bu eğriler Bertrand eğrileridir. Bertrand eğri kavramı 1950 yılında J. Bertrand tarafından keşfedilmiştir.[12]

Bu tez çalışmasında tanımlar verilerek CCR eğrisi ve helis eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını incelemek sureti ile Frenet vektörleri arasındaki ilişki araştırıldı. Bertrand eğrisinin bir helis olduğu görüldü. Buna göre de involüt-evolüt'ü $E^4$ de Frenet vektörleri cinsinden bağıntıları gösterildi.

# 1. ÖN BİLGİLER

**TANIM 1.1** ¡ 'nin açık bir aralığı I olmak üzere differansiyellenebilir bir $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to E^4$ fonksiyonuna $\mathrm{E}^n$ de bir *eğri* denir.[4] O halde

$\mathrm{E}^4$ Öklid uzayında keyfi bir eğri

$$\alpha : \mathrm{I} \subset R \to E^4$$

olsun.

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s), \alpha_4(s))$$

yay parametresi ile verilir. O halde $\alpha$ eğrisinin birim hızlı olduğu söylenir.

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

dir. $\alpha \in E^4$ vektörün normu

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha_1^2(s), \alpha_2^2(s), \alpha_3^2(s), \alpha_4^2(s) \rangle}$$

ile verilir.

$\alpha$ birim hızlı eğrisi ile hareket eden çatısı $\{\mathrm{T}(s), \mathrm{N}(s), \mathrm{B}(s), \mathrm{E}(s)\}$ olsun. Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibi hesaplanır.[12]

$$V_1(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğin türevi alınırsa,

$$V_1'(s) = \alpha''(s)$$

olur $V_1'(s) \in S_p\{\alpha'(s), \alpha''(s)\}$ olur ki $V_1'(s) \in S_p\{V_1(s), V_2(s)\}$ dir. Buna göre $a_1, a_2 \in R$ olmak üzere

$$V_1'(s)=a_1V_1(s)+a_2V_2(s)$$

yazabiliriz.

$\langle V_1(s),V_1(s)\rangle=1$ olduğundan

$$\frac{d}{ds}\langle V_1(s),V_1(s)\rangle=\frac{d}{ds}1 \quad ,$$

$$\left\langle V_1'(s),V_1(s)\right\rangle+\left\langle V_1(s),V_1'(s)\right\rangle=0 \quad ,$$

$$2\left\langle V_1'(s),V_1(s)\right\rangle=0 \quad ,$$

$$\left\langle V_1'(s),V_1(s)\right\rangle=0$$

dır. $a_1$ ve $a_2$ yi bulalım.

$$V_1'(s)=a_1V_1(s)+a_2V_2(s)$$

$V_1(s)$ ile iki tarafın iç çarpımını alalım.

$$\left\langle V_1(s),V_1'(s)\right\rangle=a_1\langle V_1(s),V_1(s)\rangle+a_2\langle V_1(s),V_2(s)\rangle$$

dır. $\left\langle V_1(s),V_1'(s)\right\rangle=0$ , $\langle V_1(s),V_1(s)\rangle=1$ ve $\langle V_1(s),V_2(s)\rangle=0$

olduğunu biliyoruz. Denklemde yerine yazarsak,

$$a_1=0$$

buluruz. Aynı şekilde $V_2(s)$ ile iç çarpımını alalım.

$$\left\langle V_2(s),V_1'(s)\right\rangle=a_1\langle V_2(s),V_1(s)\rangle+a_2\langle V_2(s),V_2(s)\rangle$$

dır. $\langle V_2(s), V_1(s)\rangle = 0$ ve $\langle V_2(s), V_2(s)\rangle = 1$

olduğunu biliyoruz. Denklemde yerine yazarsak,

$$a_2 = \left\langle V_2(s), V_1'(s)\right\rangle = k_1(s)$$

Eğrilik tanımından $k_1(s) = \left\langle V_1'(s), V_2(s)\right\rangle = \kappa$ olduğundan

$$a_2 = \kappa$$

olur. Buradan

$$V_1'(s) = \kappa V_2(s) \ ,$$

$$\mathrm{T}(s) = \kappa \mathrm{N}(s)$$

elde edilir.

$$V_1(s) = \alpha'(s)$$

türevini alalım.

$$V_1'(s) = \alpha''(s) = \|\alpha''(s)\| V_2$$

olur, buradan

bulunur.Türevini alırsak,

$$V_2' = \frac{\alpha'''(s)\|\alpha''(s)\| - \alpha''(s)\|\alpha''(s)\|'}{\|\alpha''(s)\|^2}$$

olur.

$$\left\|\alpha''(s)\right\|' = \left(\sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle}\right)' = \sqrt{\frac{d}{ds}\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle} = \sqrt{2\langle \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle}$$

dır. $V_2'(s) \in S_p\{\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\} = S_p\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$

olduğundan $a_1, a_2, a_3 \in R$ olmak üzere

$$V_2'(s) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s) + a_3V_3(s)$$

yazabiliriz. $V_1(s)$ ile iç çarpımını alalım.

$$\left\langle V_1(s), V_2'(s)\right\rangle = a_1\langle V_1(s), V_1(s)\rangle + a_2\langle V_1(s), V_2(s)\rangle + a_3\langle V_1(s), V_3(s)\rangle$$

dır. $\langle V_1(s), V_1(s)\rangle = 1$ , $\langle V_1(s), V_2(s)\rangle = 0$ ve $\langle V_1(s), V_3(s)\rangle = 0$

olduğunu biliyoruz. Denklemde yerine yazarsak

$$a_1 = \left\langle V_1(s), V_2'(s)\right\rangle$$

buluruz. $\langle V_1(s), V_2(s)\rangle = 0$ olup iki tarafın türevi alınır,

$$\left\langle V_1'(s), V_2(s)\right\rangle + \left\langle V_1(s), V_2'(s)\right\rangle = 0$$

olur. O halde

$$a_1 = -\kappa$$

bulunur, $V_2(s)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\left\langle V_2(s), V_2'(s)\right\rangle = a_1\langle V_2(s), V_1(s)\rangle + a_2\langle V_2(s), V_2(s)\rangle + a_3\langle V_2(s), V_3(s)\rangle$$

dır. $\left\langle V_2(s), V_2'(s)\right\rangle = 0, \langle V_2(s), V_1(s)\rangle = 0, \langle V_2(s), V_2(s)\rangle = 1, \langle V_2(s), V_3(s)\rangle = 0$

olduğundan

$$a_2 = 0$$

bulunur, $V_3(s)$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\left\langle V_3(s), V_2'(s) \right\rangle = a_1 \left\langle V_3(s), V_1(s) \right\rangle + a_2 \left\langle V_3(s), V_2(s) \right\rangle + a_3 \left\langle V_3(s), V_3(s) \right\rangle$$

olur. $\left\langle V_3(s), V_1(s) \right\rangle = 0$, $\left\langle V_3(s), V_2(s) \right\rangle = 0$, $\left\langle V_3(s), V_3(s) \right\rangle = 1$ olduğundan

$$a_3 = \left\langle V_3(s), V_2'(s) \right\rangle = k_2(s)$$

olup,

$$a_3 = \tau$$

dır.O halde

$$V_2'(s) = -\kappa V_1(s) + \tau V_3(s) \ ,$$

$$\mathrm{N}'(s) = -\kappa V_1(s) + \tau V_3(s)$$

olur. Biliyoruz ki $V_1(s) = \dfrac{E_1}{\|E_1\|}$ ortonormal vektör olup,

$$V_1'(s) = \frac{E_1' \|E_1\| - E_1 \|E_1\|'}{\|E_1\|^2}$$

olur. O halde

$$V_2(s) = \frac{E_2}{\|E_2\|} \ , \quad V_3(s) = \frac{E_3}{\|E_3\|}$$

dir. Bu durumda

$$E_3'(s) \in S_p\left\{\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{(4)}(s)\right\} = S_p\left\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\right\}$$

olduğundan

$$V_3'(s) \in S_p\left\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\right\}$$

olup $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ olmak üzere

$$V_3'(s) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s) + a_3V_3(s) + a_4V_4(s)$$

olarak yazılır. $a_1, a_2, a_3, a_4$'ü bulalım. Denklemin iki tarafını $V_1(s)$ ile iç çarpım alalım.

$$\left\langle V_1(s), V_3'(s)\right\rangle = a_1\left\langle V_1(s), V_1(s)\right\rangle + a_2\left\langle V_1(s), V_2(s)\right\rangle + a_3\left\langle V_1(s), V_3(s)\right\rangle + a_4\left\langle V_1(s), V_4(s)\right\rangle$$

dır. $\left\langle V_1(s), V_4(s)\right\rangle = 0$ olup,

$$a_1 = \left\langle V_1(s), V_3'(s)\right\rangle$$

dır. $\left\langle V_1(s), V_3(s)\right\rangle = 0$ olup iki tarafın türevi alınır,

$$\left\langle V_1'(s), V_3(s)\right\rangle + \left\langle V_1(s), V_3'(s)\right\rangle = 0$$

olur. $V_1'(s) = \kappa V_2(s)$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\kappa\left\langle V_2(s), V_3(s)\right\rangle + \left\langle V_1(s), V_3'(s)\right\rangle = 0 \ ,$$

$$\left\langle V_1(s), V_3'(s)\right\rangle = 0$$

olur. O halde

$$a_1(s) = 0 \ .$$

$$\left\langle V_2(s),V_3'(s)\right\rangle = a_1\left\langle V_2(s),V_1(s)\right\rangle + a_2\left\langle V_2(s),V_2(s)\right\rangle + a_3\left\langle V_2(s),V_3(s)\right\rangle + a_4\left\langle V_2(s),V_4(s)\right\rangle$$

$\left\langle V_2(s),V_4(s)\right\rangle = 0$ dan

$$a_2 = \left\langle V_2(s),V_3'(s)\right\rangle$$

olur. $\left\langle V_2(s),V_3(s)\right\rangle = 0$ olup iki tarafın türevi alınır,

$$\left\langle V_2'(s),V_3(s)\right\rangle + \left\langle V_2(s),V_3'(s)\right\rangle = 0 \ ,$$

$$\left\langle V_2(s),V_3'(s)\right\rangle = -\tau \ ,$$

$$a_2 = -\tau$$

bulunur.

$$\left\langle V_3(s),V_3'(s)\right\rangle = a_1\left\langle V_3(s),V_1(s)\right\rangle + a_2\left\langle V_3(s),V_2(s)\right\rangle + a_3\left\langle V_3(s),V_3(s)\right\rangle + a_4\left\langle V_3(s),V_4(s)\right\rangle,$$

$\left\langle V_3(s),V_4(s)\right\rangle = 0$ dan

$$a_3 = \left\langle V_3(s),V_3'(s)\right\rangle$$

olur. $\left\langle V_3(s),V_3(s)\right\rangle = 1$ in iki tarafının türevi alınır,

$$\left\langle V_3'(s),V_3(s)\right\rangle + \left\langle V_3(s),V_3'(s)\right\rangle = 0 \ ,$$

$$2\left\langle V_3'(s),V_3(s)\right\rangle = 0 \ ,$$

$$2\left\langle V_3'(s),V_3(s)\right\rangle = 0 \ ,$$

$$\left\langle V_3'(s), V_3(s) \right\rangle = 0 \ ,$$

$$a_3 = 0$$

bulunur.

$$\left\langle V_4(s), V_3'(s) \right\rangle = a_1 \left\langle V_4(s), V_1(s) \right\rangle + a_2 \left\langle V_4(s), V_2(s) \right\rangle + a_3 \left\langle V_4(s), V_3(s) \right\rangle + a_4 \left\langle V_4(s), V_4(s) \right\rangle$$

$\left\langle V_4(s), V_1(s) \right\rangle = 0$, $\left\langle V_4(s), V_2(s) \right\rangle = 0$, $\left\langle V_4(s), V_3(s) \right\rangle = 0$, $\left\langle V_4(s), V_4(s) \right\rangle = 1$ ,

$$a_4 = \left\langle V_4(s), V_3'(s) \right\rangle = \sigma = k_3(s) \ ,$$

$$a_4 = \sigma$$

bulunur. Böylece

$$V_3'(s) = \tau V_2(s) + \sigma V_4(s) \ ,$$

$$\mathrm{B}'(s) = \tau V_2(s) + \sigma V_4(s)$$

olur.

$V_4'(s) \in S_p = \left\{ \alpha_1'(s), \alpha_2'(s), \alpha_3'(s), \alpha_4^{(4)}(s), \alpha_5^{(5)}(s) \right\} = S_p \left\{ V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s), V_5(s) \right\}$
,

$$V_4'(s) = a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s) + a_3 V_3(s) + a_4 V_4(s) + a_5 V_5(s)$$

yazabiliriz.

$$\left\langle V_1(s), V_4'(s) \right\rangle = a_1 \left\langle V_1(s), V_1(s) \right\rangle + a_2 \left\langle V_1(s), V_2(s) \right\rangle + a_3 \left\langle V_1(s), V_3(s) \right\rangle + a_4 \left\langle V_1(s), V_4(s) \right\rangle + a_5 \left\langle V_1(s), V_5(s) \right\rangle$$

$\left\langle V_1(s), V_5(s) \right\rangle = 0$ olup,

$$a_1 = \left\langle V_1(s), V_4'(s) \right\rangle$$

bulunur,

$$\left\langle V_1(s), V_4(s) \right\rangle = 0$$

eşitliğinin iki tarafının türevi alınır,

$$\left\langle V_1'(s), V_4(s) \right\rangle + \left\langle V_1(s), V_4'(s) \right\rangle = 0$$

olur. $V_1'(s) = \kappa V_2(s)$ olduğundan denklemde yerine yazarsak

$$\kappa \left\langle V_2(s), V_4(s) \right\rangle + \left\langle V_1(s), V_4'(s) \right\rangle = 0 \ ,$$

$$\left\langle V_1(s), V_4'(s) \right\rangle = 0 \ ,$$

$$a_1 = 0$$

bulunur,

$$\left\langle V_2(s), V_4'(s) \right\rangle = a_1 \left\langle V_2(s), V_1(s) \right\rangle + a_2 \left\langle V_2(s), V_2(s) \right\rangle + a_3 \left\langle V_2(s), V_3(s) \right\rangle + a_4 \left\langle V_2(s), V_4(s) \right\rangle + a_5 \left\langle V_2(s), V_5(s) \right\rangle ,$$

$\left\langle V_2(s), V_5(s) \right\rangle = 0$ olup

$$a_2 = \left\langle V_2(s), V_4'(s) \right\rangle$$

bulunur,

$$\left\langle V_2(s), V_4(s) \right\rangle = 0$$

eşitliğinin iki tarafının türevi alınır,

$$\left\langle V_2'(s), V_4(s) \right\rangle + \left\langle V_2(s), V_4'(s) \right\rangle = 0 \ ,$$

$V_2'(s)=-\kappa V_1(s)+\tau V_3(s)$ olduğundan yerine yazılırsa

$$-\kappa\left\langle V_1(s),V_4(s)\right\rangle+\tau\left\langle V_3(s),V_4(s)\right\rangle+\left\langle V_2(s),V_4'(s)\right\rangle=0\ ,$$

$$\left\langle V_2(s),V_4'(s)\right\rangle=0$$

ve dolayısıyla

$$a_2=0$$

bulunur,

$$\left\langle V_3(s),V_4'(s)\right\rangle=a_1\left\langle V_3(s),V_1(s)\right\rangle+a_2\left\langle V_3(s),V_2(s)\right\rangle+a_3\left\langle V_3(s),V_3(s)\right\rangle+a_4\left\langle V_3(s),V_4(s)\right\rangle+a_5\left\langle V_3(s),V_5(s)\right\rangle$$

$$a_3=\left\langle V_3(s),V_4'(s)\right\rangle$$

bulunur,

$$\left\langle V_3(s),V_4(s)\right\rangle=0$$

eşitliğinin iki tarafının türevi alınır,

$$\left\langle V_3'(s),V_4(s)\right\rangle+\left\langle V_3(s),V_4'(s)\right\rangle=0\ ,$$

$V_3'(s)=-\tau V_2(s)+\sigma V_4(s)$ olduğundan

$$-\kappa\left\langle V_2(s),V_4(s)\right\rangle+\sigma\left\langle V_4(s),V_4(s)\right\rangle+\left\langle V_3(s),V_4'(s)\right\rangle=0\ ,$$

$$a_3=-\sigma$$

bulunur,

$$\left\langle V_4(s),V_4'(s)\right\rangle=a_1\left\langle V_4(s),V_1(s)\right\rangle+a_2\left\langle V_4(s),V_2(s)\right\rangle+a_3\left\langle V_4(s),V_3(s)\right\rangle+a_4\left\langle V_4(s),V_4(s)\right\rangle+a_5\left\langle V_4(s),V_5(s)\right\rangle,$$

$\left\langle V_4(s),V_5(s)\right\rangle=0$ , $\left\langle V_4(s),V_4'(s)\right\rangle=0$ olduğundan

$$a_4=\left\langle V_4(s),V_4'(s)\right\rangle=0$$

bulunur,

$$\left\langle V_5(s),V_4'(s)\right\rangle=a_1\left\langle V_5(s),V_1(s)\right\rangle+a_2\left\langle V_5(s),V_2(s)\right\rangle+a_3\left\langle V_5(s),V_3(s)\right\rangle+a_4\left\langle V_5(s),V_4(s)\right\rangle+a_5\left\langle V_5(s),V_5(s)\right\rangle$$

$\left\langle V_5(s),V_5(s)\right\rangle=1$, $\left\langle V_1(s),V_5(s)\right\rangle=0$, $\left\langle V_2(s),V_5(s)\right\rangle=0$, $\left\langle V_3(s),V_5(s)\right\rangle=0$, $\left\langle V_4(s),V_5(s)\right\rangle=0$ olup

$$a_5=\left\langle V_5(s),V_4'(s)\right\rangle$$

bulunur,

$$\left\langle V_4(s),V_5(s)\right\rangle=0$$

eşitliğinin iki tarafının türevi alınır,

$$\left\langle V_4'(s),V_5(s)\right\rangle+\left\langle V_4(s),V_5'(s)\right\rangle=0 ,$$

$$V_5'(s)=-\psi V_4(s) ,$$

$$\left\langle V_4'(s),V_5(s)\right\rangle-\psi\left\langle V_4(s),V_4(s)\right\rangle=0 ,$$

$$a_5=\psi=k_4(s)$$

bulunur. Böylece

$$V_4'(s)=-\sigma V_3(s)+\psi V_5(s)$$

elde edilir. Buradan

$$E'(s) = -\sigma V_3(s) + \psi V_5(s)$$

olarak hesaplanır. O halde Frenet-Serret formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{bmatrix} \tag{*}$$

ile verilmiştir.

Burada $E^4$ Öklid uzayında eğrinin T,N,B,E vektörleri sırasıyla tanjant, normal, binormal ve trinormal vektör alanları ve $\kappa(s), \tau(s)$ ve $\sigma(s)$ fonksiyonları birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikler olarak tanımlanır.[4]

**TANIM 1.2** $M \subset E^4$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki M nin eğrilik fonksiyonları sırasıyla $\kappa(s), \tau(s), \sigma(s)$; $\left(\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0, \sigma(s) \neq 0\right)$ olmak üzere

$$H_1 = \frac{\kappa}{\tau} \quad \text{ve} \quad H_2 = \frac{H_1'}{\sigma}$$

ye M nin *harmonik eğrilikleri* denir.[4]

**TANIM 1.3** Bir $\alpha : I \subset R \to E^4$ regüler eğrisinin sıfırdan farklı $\kappa(s), \tau(s)$ ve $\sigma(s)$ eğrilikleri ile verilsin. $E^4$ Öklid uzayında $\alpha$ nın teğet vektör alanı $T$, birim vektör $U$ ile sabit yönde sabit açı oluşturuyorsa bu eğriye *eğik eğri* yada *genel heliks* denir.[8]

**TANIM 1.4** Bir $\alpha : I \subset R \to E^4$ birim hızlı eğrisi sıfırdan farklı $\kappa(s), \tau(s), \sigma(s)$ eğrilikleri ile verilsin. $E^4$ de $\alpha$ nın trinormal vektörü $E$, birim vektör $U$ ile sabit yönde sabit açı yapıyorsa bu eğriye *3.tip eğik heliks* denir.[8]

**TANIM 1.5** Bir $\alpha : I \subset R \to E^4$ regüler eğri olsun. Bu eğri sabit eğrilik oranlarına sahipse $\frac{\tau}{\kappa}$ ve $\frac{\sigma}{\tau}$ sabittir. O zaman bu oranlara *sabit eğrilik oranları* denir. Kısaca *CCR eğrisi* olarak adlandırılır. Ayrıca $E^4$ Öklid uzayında W-eğrisi bir CCR eğrisinin özel durumudur.[6]

**TANIM 1.6** $E^4$ de $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ regüler eğri olsun. Eğrilerin Frenet r-ayaklıları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), ...V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ...V_r^*(s)\}$ olmak üzere, $\forall s_0 \in I$ için bu eğrilerin Frenet r- ayaklıları lineer bağımlı ise $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ eğri çiftine *Bertrand eğri çifti denir*.

$\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ Bertrand eğriler ise $\alpha^*(s)$ , $\alpha(s)$ için Bertrand çiftidir.[3]

**TANIM 1.7** $E^4$ de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ , $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ vektörler olsun. $E^4$ de vektörel çarpımın determinantı

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır. Burada $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ karşılıklı ortogonal vektörlerdir.

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_4,\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

dir.[12]

**TEOREM 1.1** $E^4$ Öklid uzayında $\alpha = \alpha(t)$ yukarıdaki Frenet-Serret denklemleri ile keyfi regüler bir eğri olsun. $\alpha$ nın Frenet aparatlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$\mathrm{N}=\frac{\|\alpha'\|\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'}{\left\|\|\alpha'\|^{2}\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'\right\|}$$

$$\mathrm{B}=\mu\mathrm{E}\wedge\mathrm{T}\wedge\mathrm{N}$$

$$\mathrm{E}=\mu\frac{\mathrm{T}\wedge\mathrm{N}\wedge\alpha'''}{\|\mathrm{T}\wedge\mathrm{N}\wedge\alpha'''\|}$$

$$\kappa=\frac{\left\|\|\alpha'\|^{2}\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'\right\|}{\|\alpha'\|^{4}}$$

$$\tau=\frac{\|\mathrm{T}\wedge\mathrm{N}\wedge\alpha'''\|\|\alpha'\|}{\left\|\|\alpha'\|^{2}\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'\right\|}$$

$$\sigma=\frac{\langle\alpha^{(4)},\mathrm{E}\rangle}{\|\mathrm{T}\wedge\mathrm{N}\wedge\alpha'''\|\|\alpha'\|}$$

burada $[\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B},\mathrm{E}]$ matrisinin determinantını +1 yapmak için $\mu$ yü +1 yada -1 alırız.[12]

## 2.HELİKSLER ve CCR EĞRİLERİNİN BAZI YENİ SONUÇLARI

**TEOREM 2.1** $E^4$ de $\alpha=\alpha(s)$ regüler eğri olmak üzere yay parametresi ile verilsin. $\kappa,\tau$ ve $\sigma$ yay parametreli eğrilikler olsun. $E^4$ de $\alpha=\alpha(s)$ hiperkürenin merkezi m ve yarıçapı $r\in R^+$ ancak ve ancak

$$\rho^2+\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{ds}\right)^2+\frac{1}{\sigma^2}\left[\rho\tau+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{ds}\right)\right]^2=r^2$$

dır, burada $\rho=\frac{1}{\kappa}$ ' dır.[6]

**İspat:** Kürenin merkezi m olmak üzere $\left\|\overrightarrow{m\alpha(s)}\right\|=R$ den

$$\langle\alpha(s)-m,\alpha(s)-m\rangle=R^2$$

dir. Bu ifadenin ardışık türevlerini alalım.

$$\langle\alpha'(s),\alpha(s)-m\rangle+\langle\alpha(s)-m,\alpha'(s)\rangle=0\ ,$$

$$2\langle\alpha'(s),\alpha(s)-m\rangle=0\ ,$$

$\alpha'(s)=V_1(s)$ den denklemde yerine yazarsak,

$$\langle V_1(s),\alpha(s)-m\rangle=0 \tag{2.1}$$

olur, buradan türev alırsak,

$$\langle V_1'(s),\alpha(s)-m\rangle+\langle V_1(s),\alpha'(s)\rangle=0$$

buluruz. $V_1'(s)=\kappa V_2(s)$ ve $\alpha'(s)=V_1(s)$ olduğundan yerine yazarsak

$$\kappa\langle V_2(s),\alpha(s)-m\rangle+\langle V_1(s),V_1(s)\rangle=0,$$

$$\kappa\langle V_2(s),\alpha(s)-m\rangle+1=0 \ ,$$

$$\langle V_2(s),\alpha(s)-m\rangle=-\frac{1}{\kappa} \tag{2.2}$$

olur. Buradan

$$\kappa\langle V_2(s),\alpha(s)-m\rangle+1=0$$

denklemin türevini alalım,

$$\kappa'\langle V_2(s),\alpha(s)-m\rangle+\kappa\langle V_2'(s),\alpha(s)-m\rangle+\kappa\langle V_2(s),\alpha'(s)\rangle=0$$

olur. Burada

$V_2'(s)=-\kappa V_1(s)+\tau V_3(s)$ ve $\langle V_2(s),V_1(s)\rangle=0$ den

$$\kappa'\left(-\frac{1}{\kappa}\right)+\kappa\langle-\kappa V_1(s)+\tau V_3(s),\alpha(s)-m\rangle=0 \ ,$$

$$\kappa'\left(-\frac{1}{\kappa}\right)-\kappa^2\langle V_1(s),\alpha(s)-m\rangle+\kappa\tau\langle V_3(s),\alpha(s)-m\rangle=0$$

bulunur. $\langle V_1(s),\alpha(s)-m\rangle=0$ olduğundan

$$\kappa'\left(-\frac{1}{\kappa}\right)+\kappa\tau\langle V_3(s),\alpha(s)-m\rangle=0 \ ,$$

$$\langle V_3(s),\alpha(s)-m\rangle=\frac{\kappa'\frac{1}{\kappa}}{\kappa\tau}=\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \tag{2.3}$$

hesaplanır. Bu bağlantının türevini alalım.

$$\langle V_3'(s),\alpha(s)-m\rangle+\langle V_3(s),\alpha'(s)\rangle=\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' \ ,$$

$V_3'(s) = -\tau V_2(s) + \sigma V_4(s)$ den

$$-\tau\langle V_2(s), \alpha(s) - m\rangle + \sigma\langle V_4(s), \alpha(s) - m\rangle = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' ,$$

$\langle V_2(s), \alpha(s) - m\rangle = -\dfrac{1}{\kappa}$ den

$$-\tau\left(-\frac{1}{\kappa}\right) + \sigma\langle V_4(s), \alpha(s) - m\rangle = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' ,$$

$$\langle V_4(s), \alpha(s) - m\rangle = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' - \tau\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right] \tag{2.4}$$

olur. (2.2),(2.3),(2.4) ün kareleri toplanırsa

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' - \tau\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2 = r^2$$

elde edilir.

**TEOREM 2.2** $E^4$ de $\alpha = \alpha(s)$ regüler eğri olmak üzere yay parametresi ile verilsin. $\kappa, \tau$ ve $\sigma$ yay parametreli eğrilikler olsun.

$\alpha$ bir genel heliksdir, ancak ve ancak $H_2' + \sigma H_1 = 0$

dır. Burada $H_1 = \dfrac{\kappa}{\tau}$ ve $H_2 = \dfrac{1}{\sigma} H_1'$ $\alpha$ nın harmonik eğrilikleridir. [2,12]

**İspat:** Tanım (1.3) den

$$\langle T, U\rangle = \cos\theta = sbt \tag{2.5}$$

dir. Bunu göstermek için (2.5) de s ' e göre türev alıp Frenet formüllerini kullanırsak;

$$\langle \mathrm{T}', U \rangle = 0$$

dır. * dan $\mathrm{T}' = \kappa \mathrm{N}$ değerini yerine yazarsak;

$$\kappa \langle \mathrm{N}, U \rangle = 0$$

olur. $U$ nun alt uzayı $\{\mathrm{T}, \mathrm{B}, \mathrm{E}\}$ ve buna göre

$$U = a_1 \mathrm{T} + a_2 \mathrm{B} + a_3 \mathrm{E} \tag{2.6}$$

olup, burada $a_1 = \cos\theta_1$ , $a_2 = \cos\theta_2$ ve $a_3 = \cos\theta_3$ $U$ nun doğrultman cosinüsleri olup,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

dir.(2.6) nin türevini alırsak,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{da_1}{ds}\mathrm{T} + a_1 \mathrm{T}' + \frac{da_2}{ds}\mathrm{B} + a_2 \mathrm{B}' + \frac{da_3}{ds}\mathrm{E} + a_3 \mathrm{E}'$$

olur. Burada $U$ sabit vektör ; $\mathrm{T}' = \kappa \mathrm{N}$ , $\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N} + \sigma \mathrm{E}$ , $\mathrm{E}' = -\sigma \mathrm{B}$ değerleri yerine yazılır.

$$\vec{0} = \frac{da_1}{ds}\mathrm{T} + a_1 \kappa \mathrm{N} + \frac{da_2}{ds}\mathrm{B} + a_2\left(-\tau \mathrm{N} + \sigma \mathrm{E}\right) + \frac{da_3}{ds}\mathrm{E} + a_3\left(-\sigma \mathrm{B}\right) ,$$

$$\vec{0} = \frac{da_1}{ds}\mathrm{T} + \left(a_1 \kappa - a_2 \tau\right)\mathrm{N} + \left(\frac{da_2}{ds} - a_3 \sigma\right)\mathrm{B} + \left(\frac{da_3}{ds} + a_2 \sigma\right)\mathrm{E}$$

olup, burada katsayılar sıfır olacağından

$$\mathrm{T}: \qquad \frac{da_1}{ds} = 0$$

$$\mathrm{N}: \qquad a_1 \kappa - a_2 \tau = 0$$

$$\mathrm{B}: \qquad \frac{da_2}{ds} - a_3 \sigma = 0$$

$$\text{E}: \qquad a_2\sigma + \frac{da_3}{ds} = 0$$

bulunur. Buradan

$$a_2 = \frac{\kappa}{\tau} a_1 = -\frac{1}{\sigma}\frac{da_3}{ds} \quad , \quad \frac{da_3}{ds} = -\sigma a_2 \tag{2.7}$$

dır. $a_2 = -\frac{1}{\sigma}\frac{da_3}{ds}$ nin türevi alınır,

$$\frac{da_2}{ds} = \frac{\sigma'}{\sigma^2}\frac{da_3}{ds} - \frac{d^2 a_3}{ds^2}\frac{1}{\sigma}$$

olup, burada $\frac{da_2}{ds} = \sigma a_3$ değeri yukarıda yerine yazılır,

$$\frac{d^2 a_3}{ds^2}\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma'}{\sigma^2}\frac{da_3}{ds} + a_3\sigma = 0 \tag{2.8}$$

bulunur, iki taraf $\sigma$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d^2 a_3}{ds^2} - \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{da_3}{ds} + a_3\sigma^2 = 0 \tag{2.9}$$

olur.Bu deklemde değişken değiştirirsek,

$$t = \int_0^s \sigma ds \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \sigma(s) \Rightarrow \sigma'(s) = \frac{d^2 t}{ds^2}$$

olup, buna göre

$$\frac{da_3}{ds} = \frac{da_3}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{da_3}{dt}\sigma \quad , \quad \left(\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sigma}\right)$$

olur. Türev alalım,

$$\frac{d^2 a_3}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{da_3}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{da_3}{dt}\sigma' \ ,$$

$$\frac{d^2a_3}{ds^2}=\left[\frac{d^2a_3}{dt^2}\sigma+\frac{da_3}{dt}\sigma'\right]\sigma+\frac{da_3}{dt}\sigma'$$

olur. (2.9) da yerine yazılırsa,

$$\sigma^2\frac{d^2a_3}{dt^2}+\frac{da_3}{dt}\sigma'\sigma-\frac{\sigma'}{\sigma^2}\frac{da_3}{dt}+a_3\sigma^2=0,$$

$$\frac{d^2a_3}{dt^2}+a_3=0$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümü

$$a_3=A\cos\int_0^s\sigma(s)ds+B\sin\int_0^s\sigma(s)ds \tag{2.10}$$

bulunur. Burada (2.7) ve (2.10) dan A ve B sabittir.

$$a_2=\frac{\kappa}{\tau}a_1=A\sin\int_0^s\sigma(s)ds-B\cos\int_0^s\sigma(s)ds\ ,$$

$$a_3=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'a_1=A\cos\int_0^s\sigma(s)ds+B\sin\int_0^s\sigma(s)ds\ ,$$

denklemlerinden aşağıdaki gibi

$$A=a_1\left[\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\cos\int_0^s\sigma(s)ds+\frac{\kappa}{\tau}\sin\int_0^s\sigma(s)ds\right] \tag{2.11}$$

$$B=a_1\left[\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\sin\int_0^s\sigma(s)ds-\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)\cos\int_0^s\sigma(s)ds\right] \tag{2.12}$$

sabitleri hesaplanır. Kareleri toplamından

$$A^2+B^2=a_1^{\,2}\left[\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)^2\cos^2\int_0^s\sigma(s)ds+2\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\cos\int_0^s\sigma(s)ds\frac{\kappa}{\tau}\sin\int_0^s\sigma(s)ds+\frac{\kappa^2}{\tau^2}\sin^2\int_0^s\sigma(s)ds\right]+$$

$$a_1^2\left[\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)^2\sin^2\int_0^s\sigma(s)\,ds-2\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\sin\int_0^s\sigma(s)\,ds\,\frac{\kappa}{\tau}\cos\int_0^s\sigma(s)\,ds+\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\sin\int_0^s\sigma(s)\,ds\right]$$

$$A^2+B^2=a_1^2\left[\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)^2+\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right]\ ,\ \ a_1=\cos\theta\quad \text{den}\ ,$$

$$\cos^2\theta\left[\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)^2+\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right]=\sin^2\theta\quad ,\quad A^2+B^2=\sin^2\theta\ ,$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)^2+\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right]=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=tg^2\theta=sbt$$

bulunur. Bu denklemin s e göre türevi alınırsa,

$$2\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)'+2\frac{\kappa}{\tau}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'=0 \tag{2.13}$$

bulunur, buradan

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'=-\frac{\dfrac{\kappa}{\tau}\left(\dfrac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(\dfrac{1}{\sigma}\left(\dfrac{\kappa}{\tau}\right)'\right)'}$$

bulunur, buradan

$$\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)'=-\sigma\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$$

olup

$$\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right)' + \sigma\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = 0$$

dır.

Tersine birim vektör $U$ nun tanımından

$$\langle \mathrm{T}, U \rangle = \cos\theta = sbt$$

dir.

**TEOREM 2.3** $\mathrm{E}^4$ de $\alpha = \alpha(s)$ regüler eğri olmak üzere yay parametresi ile $\kappa, \tau$ ve $\sigma$ eğrilikleri ile verilsin.

$\alpha$ 3. tip eğik heliksdir, ancak ve ancak $\tilde{H}_2' + \sigma \tilde{H}_1 = 0$

dır.Burada $\tilde{H}_1 = \dfrac{\sigma}{\tau}$ ve $\tilde{H}_2 = \dfrac{1}{\kappa}\tilde{H}_1'$ $\alpha$ nın anti-harmonik eğrilikleridir.[8]

**İspat:** Tanım 1.4 den

$$\langle \mathrm{E}, U \rangle = \cos\theta = sbt \tag{2.14}$$

tir.

(1.14) de s e göre türev alıp Frenet formülleri kullanırsak;

$$\langle \mathrm{E}', U \rangle = 0$$

dir. * dan $\mathrm{E}' = -\sigma \mathrm{B}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\sigma \langle \mathrm{B}, U \rangle = 0$$

olur. Bu nedenle $U$ nun alt uzayı $S_p\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{E}\}$ ve buna göre

$$U = a_1 \mathrm{T} + a_2 \mathrm{N} + a_3 \mathrm{E} \tag{2.15}$$

olup, burada $a_1 = a_1(s) = \cos\theta_1$ , $a_2 = a_2(s) = \cos\theta_2$ , $a_3 = a_3(s) = \cos\theta_3$ dir. $U$ nun doğrultman cosinüsleri ve (2.14) den $a_3 = \cos\theta_3$ sabittir. $U$ birim vektör olup,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{2.16}$$

eşitliği yazılabilir. (2.15) in türevini alırsak,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{da_1}{ds}\mathrm{T} + a_1\mathrm{T}' + \frac{da_2}{ds}\mathrm{N} + a_2\mathrm{N}' + \frac{da_3}{ds}\mathrm{E} + a_3\mathrm{E}' \ ,$$

$$\vec{0} = \frac{da_1}{ds}\mathrm{T} + a_1\kappa\mathrm{N} + \frac{da_2}{ds}\mathrm{N} + a_2\left(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}\right) + \frac{da_3}{ds}\mathrm{E} + a_3\left(-\sigma\mathrm{B}\right)$$

katsayıları;

$$\mathrm{T}: \frac{da_1}{ds} - a_2\kappa = 0$$

$$\mathrm{N}: a_1\kappa + \frac{da_2}{ds} = 0$$

$$\mathrm{B}: a_2\tau - a_3\sigma = 0$$

$$\mathrm{E}: \frac{da_3}{ds} = 0$$

olup, buradan

$$a_2 = \frac{da_1}{ds}\frac{1}{\kappa} = a_3\frac{\sigma}{\tau} \tag{2.17}$$

dir. $a_2 = \dfrac{da_1}{ds}\dfrac{1}{\kappa}$ türev alınır,

$$\frac{da_2}{ds} = \frac{d^2a_1}{ds^2}\frac{1}{\kappa} - \frac{da_1}{ds}\frac{\kappa'}{\kappa^2}$$

olup burada $\dfrac{da_2}{ds} = -a_1\kappa$ yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d^2a_1}{ds^2}-\frac{\kappa'}{\kappa^2}\frac{da_1}{ds}+a_1\kappa=0$$

ikinci mertebeden türevlenebilir denklem

$$\frac{d^2a_1}{ds^2}-\frac{\kappa'}{\kappa}\frac{da_1}{ds}+a_1\kappa^2=0 \qquad (2.18)$$

elde edilir. Bu denklemde değişken değiştirirsek,

$$t=\int_0^s \kappa(s)ds \quad \Rightarrow \frac{dt}{ds}=\kappa(s) \quad \Rightarrow \kappa'(s)=\frac{d^2t}{ds^2}$$

olup,

$$\frac{da_1}{ds}=\frac{da_1}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{da_1}{dt}\kappa$$

olur. Bu ifadenin türev alınırsa

$$\frac{d^2a_1}{ds^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{da_1}{dt}\kappa\right)\frac{dt}{ds}+\frac{da_1}{dt}\kappa' \ ,$$

$$\kappa^2\frac{d^2a_1}{dt^2}+\frac{da_1}{dt}\kappa\kappa'-\frac{\kappa'}{\kappa}\frac{da_1}{dt}\kappa+a_1\kappa^2=0 \ ,$$

$\kappa$ sabit olduğundan $\kappa'=0$ olup

$$\frac{d^2a_1}{dt^2}+a_1=0$$

differansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$a_1=A\cos\int_0^s \kappa(s)ds+B\sin\int_0^s \kappa(s)ds \qquad (2.19)$$

dır. Burada A ve B sabittir. (2.17) ve (2.19) dan

$$a_2 = \frac{\sigma}{\tau} a_3 = -A \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds + B \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds \ ,$$

$$a_1 = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\kappa}\right)' a_3 \ ,$$

$$a_3 = A \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds + B \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds \ ,$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden

$$A = -a_3 \left[ \frac{\sigma}{\tau} \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds \right],$$

$$B = a_3 \left[ \frac{\sigma}{\tau} \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds - \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds \right],$$

hesaplanır. Kareleri toplamından

$$A^2 + B^2 = {a_3}^2 \left[ \left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds \right]^2 +$$

$${a_3}^2 \left[ \left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds - \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds \right]^2 \ ,$$

$$A^2 + B^2 = {a_3}^2 \left[ \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 \sin^2 \int_0^s \kappa(s)\,ds + 2\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds + \left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2 \cos^2 \int_0^s \kappa(s)\,ds \right] +$$

$${a_3}^2 \left[ \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 \cos^2 \int_0^s \kappa(s)\,ds - 2\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \cos \int_0^s \kappa(s)\,ds \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \sin \int_0^s \kappa(s)\,ds + \left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2 \sin^2 \int_0^s \kappa(s)\,ds \right],$$

$$A^2+B^2=a_3{}^2\left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2+\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2\right] \quad , \qquad a_3{}^2=\cos\theta_3 \text{ den },$$

$$A^2+B^2=\cos^2\theta_3\left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2+\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2\right] \quad , \qquad A^2+B^2=\sin^2\theta_3 \text{ den },$$

$$\left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2+\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2\right]=tg^2\theta_3 \ ,$$

$$\left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2+\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)^2\right]=sbt \tag{2.20}$$

hesaplanır. Buradan

$$U=\left[\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)\mathrm{T}+\frac{\sigma}{\tau}\mathrm{N}+\mathrm{E}\right]\cos\theta_3$$

elde edilir. (2.20) denkleminin s' e göre türevini alırsak;

$$2\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)+2\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)\right)=0 \ ,$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'=-\frac{\frac{\sigma}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'}{\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)'} \tag{2.21}$$

bulunur. Buradan

$$\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)' = -\kappa\frac{\sigma}{\tau} \tag{2.22}$$

olup

$$f(s) = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \tag{2.23}$$

denilirse

$$f(s) = \frac{\frac{\sigma}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'}{\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)'} \tag{2.24}$$

dir. O zaman (2.23) den

$$f(s)\kappa = \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \tag{2.25}$$

hesaplanır. (2.22) ve (2.25) kullanılarak

$$\frac{d}{ds} f(s) = -\kappa\frac{\sigma}{\tau} \tag{2.26}$$

olur,

$$\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'\right)' + \kappa\frac{\sigma}{\tau} = 0 \ ,$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_2 + \sigma\tilde{M}_1 = 0$$

elde edilir.

Tersine ;

$$f(s)\kappa = \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)'$$

dır. Eğer bir birim vektör olarak tanımlanan $U$ vektörü

$$U = \left[-f(s)\mathrm{T} + \frac{\sigma}{\tau}\mathrm{N} + \mathrm{E}\right]\cos\theta_3 \tag{2.27}$$

ise

$$\langle \mathrm{E}, U \rangle = \cos\theta_3 = sbt$$ tir.

# 3.BİR HELİKSİN BERTRAND EĞRİSİ

**Teorem 3.1** $E^4$de $\delta=\delta(s)$ bir heliks olsun. Ayrıca $\xi$ , $\delta$ nın bertrand çifti olsun. $\xi$ nin Frenet-Serret aparatı $\{T_\xi, N_\xi, B_\xi, E_\xi, \kappa_\xi, \tau_\xi, \sigma_\xi\}$ , $\delta$ nın Frenet-Serret aparatı $\{T, N, B, E, \kappa, \tau, \sigma\}$ ile oluşturulabilir.[12]

**İspat:** Bu $\delta=\delta(s)$ heliks için Bertrand eğri çiftinin tanımından

$$\xi=\delta+\lambda N \tag{3.1}$$

yazabiliriz. (4.1) denkleminin her iki tarafını s ' e göre türevini alırsak;

$$\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\delta'+\lambda' N+\lambda N'$$

olup $\dfrac{d\xi}{ds_\xi}=T_\xi$ ve $N'=-\kappa T+\tau B$ den

$$T_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=T+\lambda' N-\kappa\lambda T+\tau\lambda B\ ,$$

$$T_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=(1-\kappa\lambda)T+\frac{d\lambda}{ds}N+\lambda\tau B \tag{3.2}$$

elde edilir.Bertrand eğri çifti tanımından $T_\xi\perp N$ olduğunu biliyoruz. Her iki yanı $N$ ile iç çarpım yaparsak;

$$\langle T_\xi, N\rangle\frac{ds_\xi}{ds}=(1-\kappa\lambda)\langle T, N\rangle+\frac{d\lambda}{ds}\langle N, N\rangle+\lambda\tau\langle B, N\rangle$$

olup $\langle T_\xi, N\rangle=0$ , $\langle T, N\rangle=0$ ve $\langle B, N\rangle=0$ dan

$$\frac{d\lambda}{ds}=0$$

olup , buradan

$$\lambda = sbt$$

olur son olarak;

$$\mathrm{T}_{\xi}\frac{ds_{\xi}}{ds} = \left(1-\kappa\lambda\right)\mathrm{T} + \lambda\tau\mathrm{B} \tag{3.3}$$

durumuna gelir bunun normu alınırsa

$$\left\|\mathrm{T}_{\xi}\frac{ds_{\xi}}{ds}\right\| = \sqrt{\left(1-\kappa\lambda\right)^{2} + \lambda^{2}\tau^{2}}$$

olur. $\left\|\mathrm{T}_{\xi}\right\| = 1$ olduğundan

$$\left\|\frac{ds_{\xi}}{ds}\right\| = \sqrt{\left(1-\kappa\lambda\right)^{2} + \lambda^{2}\tau^{2}}$$

olur, buna göre

$$\mathrm{T}_{\xi} = \frac{\left(1-\kappa\lambda\right) + \lambda\tau}{\sqrt{\left(1-\kappa\lambda\right)^{2} + \lambda^{2}\tau^{2}}} \tag{3.4}$$

elde edilir. Frenet vektörleri arasındaki ilişkiyi yorumlamak için ard arda türev alalım.

$$\xi' = \left(1-\kappa\lambda\right)\mathrm{T} + \lambda\tau\mathrm{B}\ ,$$

$$\xi'' = \left(-\kappa'\lambda - \kappa\lambda'\right)\mathrm{T} + \left(1-\kappa\lambda\right)\mathrm{T}' + \lambda'\tau\mathrm{B} + \lambda\left(\tau'\mathrm{B} + \tau\mathrm{B}'\right)\ ,$$

$$= -\kappa'\lambda\mathrm{T} - \underbrace{\kappa\lambda'}_{=0}\mathrm{T} + \mathrm{T}' - \kappa\lambda\mathrm{T}' + \underbrace{\lambda'\tau}_{=0}\mathrm{B} + \lambda\tau'\mathrm{B} + \lambda\tau\mathrm{B}'\ ,$$

$\mathrm{T}' = \kappa\mathrm{N}$ , $\mathrm{N}' = -\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$ ,ve $\mathrm{B}' = -\tau\mathrm{N} + \sigma\mathrm{E}$ için

$$= -\kappa'\lambda\mathrm{T} + \kappa\mathrm{N} - \kappa^{2}\lambda\mathrm{N} + \lambda\tau'\mathrm{B} + \lambda\tau\left(-\tau\mathrm{N} + \sigma\mathrm{E}\right)\ ,$$

$$= -\kappa'\lambda \mathrm{T} + \kappa \mathrm{N} - \kappa^2 \lambda \mathrm{N} + \lambda\tau' \mathrm{B} - \lambda \tau^2 \mathrm{N} + \lambda \tau\sigma \mathrm{E} \ ,$$

$$\xi'' = \left[\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right]\mathrm{N} + \lambda\tau\sigma \mathrm{E} \, ,$$

$$\xi''' = \left[\underbrace{\kappa' - \lambda'\left(\kappa^2 + \tau^2\right)}_{=0} - \lambda\left(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau'\right)\right]\mathrm{N} + \left[\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right]\mathrm{N}' + \underbrace{\lambda'}_{=0}\tau\sigma \mathrm{E} + \lambda\left[\tau'\sigma \mathrm{E} + \tau\left(\sigma' \mathrm{E} + \sigma \mathrm{E}'\right)\right]$$

$\mathrm{E}' = -\sigma \mathrm{B}$ için

$$\xi''' = \kappa' \mathrm{N} - 2\kappa\kappa'\lambda \mathrm{N} - 2\tau\tau'\lambda \mathrm{N} - \kappa^2 \mathrm{T} + \kappa\tau \mathrm{B} + \lambda\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{T}$$

$$-\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\tau \mathrm{B} + \lambda\tau'\sigma \mathrm{E} + \lambda\tau\sigma' \mathrm{E} - \lambda\tau\sigma^2 \mathrm{B} \, ,$$

$$\xi''' = \kappa\left[\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right) - \kappa\right]\mathrm{T} + \tau\left[\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\right]\mathrm{B} \ ,$$

$$\xi^{(4)} = \left(\kappa'\left[\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right) - \kappa\right] + \kappa\left[\lambda'\left(\kappa^2 + \tau^2\right) + \lambda\left(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau'\right) - \kappa'\right]\right)\mathrm{T}$$

$$+\kappa\left[\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right) - \kappa\right]\mathrm{T}' + \tau\left[\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\right]\mathrm{B}'$$

$$+\left[\tau'\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\right) + \tau\left(\kappa' - \lambda'\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right) - \lambda\left(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau' + 2\sigma\sigma'\right)\right)\right]\mathrm{B} \ ,$$

$$\xi^{(4)} = \underbrace{\kappa'\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)}_{=0}\mathrm{T} - \underbrace{\kappa'\kappa}_{=0}\mathrm{T} + \kappa\lambda'\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{T} + \lambda\kappa\left(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau'\right)\mathrm{T} - \underbrace{\kappa\kappa'}_{=0}\mathrm{T} + \kappa^2\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N}$$

$$-\kappa^3 \mathrm{N} - \kappa\tau^2 \mathrm{N} + \kappa\tau\sigma \mathrm{E} + \tau^2\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\mathrm{N} - \lambda\tau\sigma\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\mathrm{E}$$

$$+\underbrace{\tau'\kappa}_{=0}\mathrm{B} - \underbrace{\tau'\lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)}_{=0}\mathrm{B} + \underbrace{\tau\kappa'}_{=0}\mathrm{B} - \tau\lambda\left(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau' + 2\sigma\sigma'\right)\mathrm{B} - \lambda'\tau\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\mathrm{B} \, .$$

Burada

$$I_1 = \kappa^3\left(\lambda\kappa - 1\right) + \lambda\tau^2\left(2\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right) \ ,$$

$$I_2 = \tau\sigma\left[\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right)\right] ,$$

$$\xi^{(4)} = I_1 \mathrm{N} + I_2 \mathrm{E}$$

dır. Yukarıdaki denklemler kullanılarak,

$$\|\xi'\|^2 \xi'' - \langle \xi', \xi'' \rangle \xi' = \left(\sqrt{(1-\kappa\lambda)^2 + (\lambda\tau)^2}\right)^2 \left[\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)\mathrm{N} + \lambda\tau\sigma\mathrm{E}\right]$$

hesaplanır. Burada $K = \sqrt{(1-\kappa\lambda)^2 + (\lambda\tau)^2}$ olarak alınırsa;

$$\|\xi'\|^2 \xi'' - \langle \xi', \xi'' \rangle \xi' = K^2 \left[\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)\mathrm{N} + \lambda\tau\sigma\mathrm{E}\right]$$

olur. Bu nedenle başlıca normal ve birinci eğrilikleri sırasıyla

$$\mathrm{N}_\xi = \frac{\xi''}{\|\xi''\|} = \frac{\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)\mathrm{N} + \lambda\tau\sigma\mathrm{E}}{\sqrt{\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)^2 + (\lambda\tau\sigma)^2}}$$

ve burada $L = \sqrt{\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)^2 + (\lambda\tau\sigma)^2}$ olarak alınırsa;

$$\mathrm{N}_\xi = \frac{1}{L}\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)\mathrm{N} + \lambda\tau\sigma\mathrm{E} \tag{3.5}$$

ve

$$\kappa_\xi = \frac{\left\| \|\xi'\|^2 \xi'' - \langle \xi', \xi'' \rangle \xi' \right\|}{\|\xi'\|^4} ,$$

$$\kappa_\xi = \frac{K^2 \sqrt{\left(\kappa - \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\right)^2 + (\lambda\tau\sigma)^2}}{K^4} = \frac{L}{K^2} \tag{3.6}$$

elde edilir.Şimdi $\mathrm{T}_\xi \wedge \mathrm{N}_\xi \wedge \xi'''$ vektörünü hesaplamak için önce

$$\mathrm{T}_\xi = \frac{\left(1-\lambda\kappa, 0, \lambda\tau, 0\right)}{\sqrt{\left(1-\lambda\kappa\right)^2 + \left(\lambda\tau\right)^2}} \ ,$$

$$\mathrm{N}_\xi = \frac{\left(0, \kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right), 0, \lambda\tau\sigma\right)}{\sqrt{\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2 + \left(\lambda\tau\sigma\right)^2}} \ ,$$

$$\xi''' = \kappa\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\mathrm{T} + \tau\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]\mathrm{B}$$

değerlerini yazıp, $\mathrm{T}_\xi \wedge \mathrm{N}_\xi \wedge \xi'''$ vektörel çarpımı hesaplayalım,

$$\mathrm{T}_\xi \wedge \mathrm{N}_\xi \wedge \xi''' = \begin{vmatrix} \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{B} & \mathrm{E} \\ \dfrac{1-\lambda\kappa}{K} & 0 & \dfrac{\lambda\tau}{K} & 0 \\ 0 & \dfrac{\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)}{L} & 0 & \dfrac{\lambda\tau\sigma}{L} \\ \kappa\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right] & 0 & \tau\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right] & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[\frac{\left(1-\lambda\kappa\right)}{K}\frac{\left(-\lambda\tau^2\sigma\right)}{L}\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]\frac{\left(-\lambda\tau\right)}{K}\frac{\left(-\lambda\tau\sigma\kappa\right)}{L}\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\right]\mathrm{N}$$

$$-\left[\frac{\left(1-\lambda\kappa\right)}{K}\frac{\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]}{L}\tau\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]-\frac{\lambda\tau}{K}\frac{\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)}{L}\kappa\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\right]\mathrm{E},$$

$$= -\frac{1}{KL}\left\{\left[-\left(1-\lambda\kappa\right)\lambda\tau^2\sigma\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]+\lambda^2\tau^2\sigma\kappa\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\right]\mathrm{N}\right.$$

$$\left.+\left[\left(1-\lambda\kappa\right)\tau\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]-\lambda\tau\kappa\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\right]\mathrm{E}\right\},$$

$$= -\frac{1}{KL}\left\{\left[\left(-\lambda\tau^2\sigma+\lambda^2\kappa\tau^2\sigma\right)\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]+\lambda^3\tau^2\sigma\kappa\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\lambda^2\kappa^2\tau^2\sigma\right]\mathrm{N}\right.$$

$$+\Big[\left(\tau-\lambda\kappa\tau\right)\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]-\lambda\tau\kappa\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\Big]\mathrm{E}\Big\},$$

$$=-\frac{1}{KL}\Big\{\Big[-\lambda\kappa\tau^2\sigma+\lambda^2\tau^2\sigma\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)+\lambda^2\kappa^2\tau^2\sigma-\lambda^3\tau^2\sigma\kappa\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)+\lambda^3\kappa^3\tau^2\sigma+\lambda^3\kappa\tau^4\sigma-\lambda^2\kappa^2\tau^2\sigma\Big]\mathrm{N}$$

$$+\Big[\left(\tau\kappa-\lambda\kappa^2\tau-\lambda\tau^3+\lambda\kappa^2\tau+\lambda^2\kappa^3\tau+\lambda^2\kappa\tau^3\right)\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\right]$$

$$+\left(-\lambda\kappa^2\tau-\lambda^2\kappa^3\tau-\lambda^2\kappa\tau^3\right)\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]\Big]\mathrm{E}\Big\},$$

$$=-\frac{1}{KL}\Big\{\Big[-\lambda\kappa\tau^2\sigma+\lambda^2\kappa^2\tau^2\sigma+\lambda^2\tau^4\sigma+\lambda^2\tau^2\sigma^3-\lambda^3\kappa^3\tau^2\sigma-\lambda^3\kappa\tau^4\sigma-\lambda^3\kappa\tau^2\sigma^3+\lambda^3\kappa^3\tau^2\sigma+\lambda^3\kappa\tau^4\sigma\Big]\mathrm{N}$$

$$+\Big[\tau\kappa^2-\lambda\kappa^3\tau-\lambda\kappa\tau^3+\lambda\kappa^3\tau+\lambda^2\kappa^4\tau+\lambda^2\kappa^2\tau^3-\lambda\kappa^3\tau+\lambda^2\kappa^4\tau+\lambda^2\kappa^2\tau^3-\lambda^2\kappa^4\tau-\lambda^3\kappa^5\tau-\lambda^3\kappa^3\tau^3$$

$$-\lambda\kappa\tau^3+\lambda^2\kappa^2\tau^3+\lambda^2\tau^5-\lambda^2\kappa^2\tau^3-\lambda^3\kappa^3\tau^3-\lambda^3\kappa\tau^5-\lambda\kappa\tau\sigma^2+\lambda^2\kappa^2\tau\sigma^2+\lambda^2\tau^3\sigma^2-\lambda^2\kappa^2\tau\sigma^2-\lambda^3\kappa^3\tau\sigma^2-\lambda^3\kappa\tau^3\sigma^2$$

$$-\lambda^2\kappa^4\tau-\lambda^2\kappa^2\tau^3+\lambda^3\kappa^5\tau+\lambda^3\kappa^3\tau^3+\lambda^3\tau^3\kappa^3+\lambda^3\kappa\tau^5+\lambda\kappa^3\tau-\lambda^2\kappa^4\tau-\lambda^2\kappa^2\tau^3\Big]\mathrm{E}\Big\},$$

burada $M=\tau\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)-\kappa\left(1+\lambda^2\sigma^2\right)\right]$ olarak alınırsa;

$$\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''=-\frac{M}{KL}\left[\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]\mathrm{E}\right]$$

olup , buradan trinormal vektörü

$$\mathrm{E}_\xi=\frac{\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''}{\left\|\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''\right\|}=\frac{-\dfrac{M}{KL}\left[\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)\mathrm{E}\right]}{\dfrac{M}{KL}\sqrt{\left(\lambda\tau\sigma\right)^2+\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2}}$$

olup,

$$L=\sqrt{\left(\lambda\tau\sigma\right)^2+\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2}$$

olmak üzere;

$$\mathrm{E}_{\xi}=-\frac{\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}\right)\right)\mathrm{E}}{L} \tag{3.7}$$

olarak hesaplanır.Buradan ikinci ve üçüncü eğrilikleri hesaplarsak,

$$\tau_{\xi}=\frac{\left\|\mathrm{T}_{\xi}\wedge\mathrm{N}_{\xi}\wedge\xi'''\right\|\left\|\xi'\right\|}{\left\|\left\|\xi'\right\|^{2}\xi''-\left\langle\xi',\xi''\right\rangle\left\|\xi'\right\|\right\|}=\frac{\frac{M}{KL}LK}{K^{2}L}=\frac{M}{K^{2}L} \tag{3.8}$$

ve

$$\sigma_{\xi}=\frac{\left\langle\xi^{(4)},\mathrm{E}_{\xi}\right\rangle}{\left\|\mathrm{T}_{\xi}\wedge\mathrm{N}_{\xi}\wedge\xi'''\right\|\left\|\xi'\right\|}=\frac{\left\langle I_{1}\mathrm{N}+I_{2}\mathrm{E},\mathrm{E}_{\xi}\right\rangle}{M}$$

dır. Burada

$\xi^{(4)}=\mathrm{I}_{1}\mathrm{N}+\mathrm{I}_{2}\mathrm{E}$

olup,

$\mathrm{I}_{1}=\kappa^{3}\left(\lambda\kappa-1\right)+\lambda\tau^{2}\left(2\kappa^{2}+\tau^{2}+\sigma^{2}\right)$ ,

$\mathrm{I}_{2}=\tau\sigma\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}+\sigma^{2}\right)\right]$ ,

$\mathrm{E}_{\xi}=\frac{1}{L}\left[\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}\right)\right]\mathrm{E}\right]$ bilinenlerinden

$$\begin{aligned}\left\langle\xi^{(4)},\mathrm{E}_{\xi}\right\rangle&=\left\langle\mathrm{I}_{1}\mathrm{N}+\mathrm{I}_{2}\mathrm{E},-\frac{1}{L}\left[\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}\right)\right)\mathrm{E}\right]\right\rangle ,\\&=\left[\kappa^{3}\left(\lambda\kappa-1\right)+\lambda\tau^{2}\left(2\kappa^{2}+\tau^{2}+\sigma^{2}\right)\right]\left(-\frac{1}{L}\lambda\tau\sigma\right)\\&\quad+\frac{1}{L}\tau\sigma\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}+\sigma^{2}\right)\right]\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^{2}+\tau^{2}\right)\right] ,\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{L}\Big\{\lambda\tau\sigma\Big[\left(\lambda\kappa^4-\kappa^3\right)+2\lambda\kappa^2\tau^2+\lambda\tau^4+\lambda\tau^2\sigma^2\Big]$$

$$-\tau\sigma\Big[\kappa-\lambda\kappa^2-\lambda\tau^2-\lambda\sigma^2\Big]\Big[\kappa-\lambda\kappa^2-\lambda\tau^2\Big]\Big\},$$

$$=-\frac{1}{L}\Big\{\Big[\lambda^2\kappa^4\tau\sigma-\lambda\kappa^3\tau\sigma+2\lambda^2\kappa^2\tau^3\sigma+\lambda^2\tau^5\sigma+\lambda^2\tau^3\sigma\Big]$$

$$-\Big[\kappa\tau\sigma-\lambda\kappa^2\tau\sigma-\lambda\tau^3\sigma-\lambda\tau\sigma^3\Big]\Big[\kappa-\lambda\kappa^2-\lambda\tau^2\Big]\Big\},$$

$$=-\frac{1}{L}\Big\{\lambda^2\kappa^4\tau\sigma-\lambda\kappa^3\tau\sigma+2\lambda^2\kappa^2\tau^3\sigma+\lambda^2\tau^5\sigma+\lambda^2\tau^3\sigma-\lambda^2\tau\sigma+\lambda\kappa^3\tau\sigma+\lambda\kappa\tau^3\sigma+\lambda\kappa^3\tau\sigma$$

$$-\lambda^2\kappa^4\tau\sigma-\lambda^2\kappa^2\tau^3\sigma-\lambda^2\tau^5\sigma+\lambda^2\kappa^3\tau^3\sigma+\lambda\kappa\tau\sigma^3-\lambda^2\kappa^2\tau\sigma^3-\lambda^2\tau^3\sigma^3\Big\},$$

$$=-\frac{1}{L}\Big[-\lambda^2\tau\sigma+\lambda\kappa\tau^3\sigma+\lambda\kappa^3\tau\sigma+\lambda\kappa\tau\sigma^3-\lambda^2\kappa^2\tau\sigma^3\Big],$$

$$\sigma_\xi=\frac{-\frac{1}{L}\kappa\sigma\Big[-\kappa\tau+\lambda\tau^3+\lambda\kappa^2\tau+\lambda\tau\sigma^2-\lambda^2\kappa\tau\sigma^2\Big]}{-\frac{M}{KL}\sqrt{\left(\lambda\tau\sigma\right)^2+\Big[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\Big]^2}\sqrt{\left(1-\lambda\kappa\right)^2+\left(\lambda\tau\right)^2}},$$

$$\sigma_\xi=\frac{\kappa\sigma}{ML}\tau\Big[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)-\kappa\left(1-\lambda^2\sigma^2\right)\Big],$$

$$\sigma_\xi=\frac{\kappa\sigma}{L} \tag{3.9}$$

olarak hesaplanır. Frenet çatısının üçüncü vektör alanını bulmak için

$$\mathrm{E}_\xi=-\frac{1}{L}\Big[\lambda\tau\sigma\mathrm{N}-\Big[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\Big]\mathrm{E}\Big],$$

$$\mathrm{T}_\xi=\frac{1}{K}\Big[\left(1-\lambda\kappa\right)\mathrm{T}+\lambda\tau\mathrm{B}\Big],$$

$$\mathrm{N}_\xi=\frac{1}{L}\Big[\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)\mathrm{N}+\lambda\tau\sigma\mathrm{E}\Big]$$

bilinenleri ile $E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi$ vektörel çarpımı

$$E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi = \begin{vmatrix} T & N & B & E \\ 0 & -\frac{\lambda\tau\sigma}{L} & 0 & -\frac{\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]}{L} \\ \frac{1-\lambda\kappa}{K} & 0 & \frac{\lambda\tau}{K} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)}{L} & 0 & \frac{\lambda\tau\sigma}{L} \end{vmatrix}$$

$$= \left[-\frac{\lambda\tau\sigma}{L}\frac{\lambda\tau}{K}\frac{\lambda\tau\sigma}{L} - \frac{\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]}{L} . -\frac{\lambda\tau}{K}\frac{\left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)}{L}\right]T +$$

$$+\left[-\frac{\lambda\tau\sigma}{L}\frac{(1-\lambda\kappa)}{K}\frac{\lambda\tau\sigma}{L} + \frac{\left[\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\right]}{L}\frac{(1-\lambda\kappa)}{K}\frac{\left[\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]}{L}\right]B \ ,$$

$$= -\frac{1}{KL^2}\left\{\lambda\tau\left[\left(\lambda\tau\sigma\right)^2 + \left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2\right]T + (1-\lambda\kappa)\left[\left(\lambda\tau\sigma\right)^2 + \left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2\right]B\right\}$$

olup burada $L = \sqrt{\left(\lambda\tau\sigma\right)^2 + \left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi = -\frac{1}{KL^2}\left[\left(\lambda\tau\sigma\right)^2 + \left(\kappa-\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right)^2\right]\left[\lambda\tau T + (1-\lambda\kappa)B\right] ,$$

$$E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi = -\frac{1}{K}\left[\lambda\tau T + (1-\lambda\kappa)B\right]$$

elde edilir. $B_\xi = \mu E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi$ olduğundan

$$B_\xi = -\frac{1}{K}\left[\lambda\tau T + (1-\lambda\kappa)B\right] \tag{3.10}$$

olarak hesaplanır. $\mu = m1$ alınırsa denklemler elde edilir.

# 4.BİR HELİKSİN İNVOLÜTE-EVOLÜTE EĞRİSİ

**Tanım 4.1** $E^4$ de $\phi$ ve $\xi$ birim hızlı eğriler olmak üzere $\xi$ nın involütü $\phi$ ise her $s_0$ için $\phi$, $\xi$ teğet çizgisi üzerinde $\xi(s_0)$ yatıyor ve $\xi, \xi(s_0)$ ve $\phi$ teğete diktir. $\xi$ nin evolütü $\phi$ ise $\phi$ nin involütü $\xi$ dir ve eğri çifti $\phi = \xi + \mu \vec{T}$ ile tanımlanır.[9]

**Teorem 4.1** $\xi = \xi(s)$ $\delta$ nın involütü olsun. $E^4$ de $\delta$ bir heliks olsun. $\xi$ nin Frenet aparatı $\{T_\xi, N_\xi, B_\xi, E_\xi, \kappa_\xi, \tau_\xi, \sigma_\xi\}$ , $\delta$ nın Frenet aparatı $\{T, N, B, E, \kappa, \tau, \sigma\}$ oluşturulabilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T_\xi = N \quad , \quad N_\xi = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad , \quad B_\xi = -E \quad , \quad E_\xi = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

ve

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa |c - s|} \quad , \quad \tau_\xi = \frac{\tau \sigma}{\kappa \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\, |c - s|} \quad , \quad \sigma_\xi = -\frac{\sigma}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\, |c - s|}$$

burada $\dfrac{ds_\xi}{ds} = \kappa |c - s|$ dır.[9]

**İspat:** İnvolüt-evolüt eğri tanımından

$$\vec{\xi} = \delta + \mu \vec{T} \tag{4.1}$$

dir. Burada her iki tarafın s ' e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} = \delta' + \mu' T + \mu T'$$

olup, $\dfrac{d\xi}{ds_\xi} = T_\xi$ , $T' = \kappa N$ ve $\delta' = T$ den

$$T_\xi \frac{ds_\xi}{ds} = T + \mu' T + \mu \kappa N \tag{4.2}$$

$$\mathrm{T}_\xi \frac{ds_\xi}{ds} = (1+\mu')\mathrm{T} + \mu\kappa\mathrm{N}$$

dır. Tanımdan $\langle \mathrm{T}_\xi, \mathrm{T} \rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. $\mathrm{T}$ ile iç çarpım yaparsak,

$$\langle \mathrm{T}, \mathrm{T}_\xi \rangle \frac{ds_\xi}{ds} = (1+\mu')\langle \mathrm{T}, \mathrm{T} \rangle + \mu\kappa \langle \mathrm{T}, \mathrm{N} \rangle$$

olup,

$$\frac{d\mu}{ds} + 1 = 0 \tag{4.3}$$

olur. Böylece

$$\mu = c - s$$

buluruz. Bunu (5.1) de yazarsak,

$$\xi = \delta + (c-s)\mathrm{T} \tag{4.4}$$

bulunur. Burada s'e göre türev alırsak,

$$\frac{d\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} = (c-s)\kappa\mathrm{N} \tag{4.5}$$

olup, her iki tarafın normu alınırsa,

$$\left\| \frac{d\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} \right\| = \sqrt{(c-s)^2 \kappa^2}$$

olur. $\mathrm{T}_\xi = 1$ olduğundan

$$\left\| \frac{ds_\xi}{ds} \right\| = \sqrt{(c-s)^2 \kappa^2}$$

olup , buna göre

$$\mathrm{T}_{\xi} = \mathrm{N} \tag{4.6}$$

olur . Bunu yorumlamak için ard arda türev alırsak,

$$\xi' = (c-s)\kappa\mathrm{N}\,,$$

$$\xi'' = -\kappa\mathrm{N} + (c-s)(\kappa'\mathrm{N} + \kappa\mathrm{N}')$$

olup, $\mathrm{N}' = -\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$ den

$$\xi'' = -\kappa\mathrm{N} + (c-s)\left[\kappa'\mathrm{N} + \kappa(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B})\right]\,,$$

$$\xi'' = -(c-s)\kappa^2\mathrm{T} - \kappa\mathrm{N} + (c-s)\kappa\tau\mathrm{B} \tag{4.7}$$

dir.

$$\xi''' = \kappa\mathrm{T} - (\kappa'\mathrm{T} + \kappa\mathrm{T}')(c-s) - \kappa'\mathrm{N} - \kappa\mathrm{N}' - \kappa\tau\mathrm{B} + (c-s)\left[\kappa'\tau\mathrm{B} + \kappa(\tau'\mathrm{B} + \tau\mathrm{B}')\right]$$

olup, $\mathrm{T}' = \kappa\mathrm{N}$ , $\mathrm{N}' = -\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$ ve $\mathrm{B}' = -\tau\mathrm{N} + \sigma\mathrm{E}$ den

$$\xi''' = \kappa\mathrm{T} - \kappa^2\mathrm{N}(c-s) - \kappa(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}) - \kappa\tau\mathrm{B} + (c-s)\kappa\tau\left[-\tau\mathrm{N} + \sigma\mathrm{E}\right]\,,$$

$$\xi''' = 2\kappa^2\mathrm{T} - (c-s)\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N} - 2\kappa\tau\mathrm{B} + (c-s)\kappa\tau\sigma\mathrm{E} \tag{4.8}$$

dir.

$$\xi^{(4)} = 4\kappa\kappa'\mathrm{T} + 2\kappa^2\mathrm{T}' + \kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N} - (c-s)\left[\kappa'\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N} + \kappa\left[(2\kappa\kappa' + 2\tau\tau')\mathrm{N} + \left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N}'\right]\right]$$

$$-2\kappa'\tau\mathrm{B} - 2\tau\left[\tau'\mathrm{B} + \tau\mathrm{B}'\right] - \tau\kappa\sigma\mathrm{E} + (c-s)\left[\tau'\kappa\sigma\mathrm{E} + \tau\left(\kappa'\sigma\mathrm{E} + \kappa\left(\sigma'\mathrm{E} + \kappa\mathrm{E}'\right)\right)\right]\,,$$

$$= 2\kappa^3\mathrm{N} + \kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{N} - (c-s)\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\left[-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}\right] - 2\kappa\tau(-\tau\mathrm{N} + \sigma\mathrm{E}) - \tau\kappa\sigma\mathrm{E} - (c-s)\kappa\tau\sigma^2\mathrm{B}$$
,

$$\xi^{(4)} = (c-s)\kappa^2\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{T} + \left[2\kappa^3 + \kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right) + 2\kappa\tau^2\right]\mathrm{N}$$

$$-(c-s)\tau\kappa\left[\kappa^2 + \tau^2 + \sigma^2\right]\mathrm{B} - 3\kappa\tau\sigma\mathrm{E} \tag{4.9}$$

dir. Bu denklemler kullanılarak,

$$\left\|\xi'\right\|^2 \xi'' - \left\langle \xi', \xi'' \right\rangle \xi' = (c-s)\kappa\left[-\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}\right] \tag{4.10}$$

hesaplanır. Buradan eğrinin birinci normal ve birinci eğriliği sırasıyla

$$\mathrm{N}_\xi = \frac{\left\|\xi'\right\|^2 \xi'' - \left\langle \xi', \xi'' \right\rangle \xi'}{\left\|\left\|\xi'\right\|^2 \xi'' - \left\langle \xi', \xi'' \right\rangle \xi'\right\|} = \frac{-\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \tag{4.11}$$

ve

$$\kappa_\xi = \frac{\left\|\left\|\xi'\right\|^2 \xi'' - \left\langle \xi', \xi'' \right\rangle \xi'\right\|}{\left\|\xi'\right\|^4} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\left[(c-s)\kappa\right]} \tag{4.12}$$

elde edilir. $\mathrm{E}_\xi$ hesaplamak için $\mathrm{T}_\xi \wedge \mathrm{N}_\xi \wedge \xi'''$ vektörel çarpımı

$\mathrm{T}_\xi = (0,1,0,0)$ ,

$\mathrm{N}_\xi = \left( \dfrac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, 0, \dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, 0 \right)$ ,

$\xi''' = \left(2\kappa^2, -(c-s)\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right), -2\kappa\tau, (c-s)\kappa\tau\sigma\right)$

bilinenleri ile

$$\mathrm{T}_\xi \wedge \mathrm{N}_\xi \wedge \xi''' = \begin{vmatrix} \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{B} & \mathrm{E} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} & 0 & \dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} & 0 \\ 2\kappa^2 & -\kappa(c-s)\left[\kappa^2 + \tau^2\right] & -2\kappa\tau & (c-s)\kappa\tau\sigma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\kappa\tau\sigma(c-s)\mathrm{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\kappa\tau\sigma(c-s)\mathrm{B} \ ,$$

$$=\frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)\left[\tau\mathrm{T}+\kappa\mathrm{B}\right]$$

olur.O halde

$$\mathrm{E}_\xi=\mu\frac{\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''}{\left\|\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''\right\|}$$

ise

$$\mathrm{E}_\xi=\frac{\frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)(\tau\mathrm{T}+\kappa\mathrm{B})}{\frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\ ,$$

$$\mathrm{E}_\xi=\frac{\tau\mathrm{T}+\kappa\mathrm{B}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \tag{4.13}$$

olarak hesaplanır.İkinci eğriliği yazarsak,

$$\tau_\xi=\frac{\left\|\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''\right\|\left\|\xi'\right\|}{\left\|\left\|\xi'\right\|\xi''-\left\langle\xi',\xi''\right\rangle\xi'\right\|}\quad \text{den ,}$$

$$\tau_\xi=\frac{\frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left|c-s\right|\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\left|c-s\right|\kappa}{\kappa\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\left|c-s\right|}\ ,$$

$$\tau_\xi=\frac{\tau\sigma}{\kappa\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\left|c-s\right|} \tag{4.14}$$

olur ve  üçüncü eğrilik

$$\sigma_\xi=\frac{\left\langle\xi^{(4)},\mathrm{E}_\xi\right\rangle}{\left\|\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''\right\|\left\|\xi'\right\|}\quad \text{yi gözönüne alalım, bunun için}$$

$\mathrm{T}_\xi\wedge\mathrm{N}_\xi\wedge\xi'''=\frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)(\tau\mathrm{T}+\kappa\mathrm{B})$ olduğu hesaplamıştı.

(5.9) ve (5.13) denklemleri  kullanılarak,

$$\left\langle \xi^{(4)}, \mathrm{E}_{\xi} \right\rangle = (c-s)\kappa^2\left(\kappa^2+\tau^2\right)\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} - (c-s)\kappa\tau\left(\kappa^2+\tau^2+\sigma^2\right)\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \;,$$

$$\left\langle \xi^{(4)}, \mathrm{E}_{\xi} \right\rangle = \frac{(c-s)\kappa^2\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left[\kappa^2+\tau^2-\kappa^2-\tau^2-\sigma^2\right] ,$$

$$\left\langle \xi^{(4)}, \mathrm{E}_{\xi} \right\rangle = -\frac{(c-s)\kappa^2\tau\sigma^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

bulunur. O halde

$$\sigma_{\xi} = \frac{-\dfrac{(c-s)\kappa^2\tau\sigma^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\dfrac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,(c-s)\kappa} \;,$$

$$\sigma_{\xi} = \frac{\sigma}{(c-s)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \tag{4.15}$$

olarak bulunur.Frenet çatısının 3.vektör alanı ise $\mathrm{B} = \mu \mathrm{E}_{\xi} \wedge \mathrm{T}_{\xi} \wedge \mathrm{N}_{\xi}$ dir. Bunun için

$$\mathrm{E}_{\xi} = \left( \frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)\tau, 0, \frac{\kappa\tau\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(c-s)\kappa, 0 \right) ,$$

$$\mathrm{T}_{\xi} = (0,1,0,0) \;,$$

$$\mathrm{N}_{\xi} = \left( \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, 0, \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, 0 \right) ,$$

olduğunu hesaplamıştı. Bu bilinenler ile vektörel çarpım

$$
E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi = \begin{vmatrix} T & N & B & E \\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 & \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
= -\left[\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right]E\ ,
$$

$$
= -\frac{\tau^2+\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}E\ ,
$$

$$
= -E
$$

olarak hesaplanır. $B = \mu E_\xi \wedge T_\xi \wedge N_\xi$ den

$$
B = -E \tag{4.16}
$$

elde edilir. Burada $\frac{ds_\xi}{ds} = \kappa|c-s|$ olarak alırız.

# SONUÇ

Bertrand eğri çiftinin Frenet-Serret vektörleri arasındaki ilişkiler incelendi. Böylece bir helisin Bertrand eğrisinin bir helis olduğu aynı zamanda involüt evolüt bir helisin bazı karakterizasyonu açıklanmıştır.

# KAYNAKLAR


**1.** Balgetir, H., Bektas, M., Inoguchi, J., Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note di matematica 23 (2004),7-13.

**2.** Barros, M., General helices and a theorem of Lancret, Proc. Amer. Math. Soc., 125.

**3.** Ekmekci, N., Ilarslan, K., On Bertrand curves and their characterization, Differential Geometry-Dynamical Systems, 3(2001), 17-24.

**4.** Hacısalihoglu, H.H., Differensiyal Geometri 1, Ankara Üniversitesi, 2000.

**5.** Ilarslan, K., Boyacıoglu, O., Position vectors of a spacelike W-curve in Minkowski space $E_1^3$, Bull.Korean Math. Soc., 44(2007),429-438.

**6.** Monterde, J., Curves with constant curvature ratios, Bulletin of Mexican Mathematic Society,3a serie 13(2007),177-186.

**7.** Monterde, J., Salkowski curves reviste: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion,Comput.Aided Geomet. Design, 26(2009),271-278.

**8.** Onder, M., Kazaz, M., Kocayigit, H., Kılıc, O., B2-slant helix in euclidean 4-space E4,Int. J. Comtemp. Math. Sci.,3(2008),1433-1440.

**9.** Ozyılmaz, E., Yılmaz, S., Involute-Evolute curve couples in the euclidean 4-Space, Int. J. Open Problems Compt. Math.,2(2009),168-174.

**10.** Sabuncuoglu, A., Hacısalihoglu, H.H., On higher curvature of a curve, Cummunications de la Fac. Sci. Uni. Ankara, 24(1975),33-46.

**11.** Toledo-Suarez, C. D., On the arithmetic of fractal dimension using hyperhelices, Chaos Solitons Fractals, 39(2009),342-349.

**12.** Yılmaz, S., Turgut, M.,Relations among Frenet apparatus of space-like Bertrand W-curve couples in Minkowski space-time,Int. Math. Forum, 3(2008),1575-1580.

# ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Ankara'da doğan Bahar GÜÇLÜ, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Şehit Teğmen Ertuğrul Pilatin İlkokulu, Atatürk İlköğretim okulu ve Niğbolu Lisesinde okul üçüncüsü olarak tamamlamıştır.2007 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında başarıyla bitirmiştir.

2011 yılında Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Formasyon eğitimi almıştır.

2012 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

**İletişim Bilgileri**

Adres : Boğaziçi mh.1064. sk. no:5/6 Mamak/ANKARA

Telefon: (537) 344 23 27

E-posta: bhr_kyp@hotmail.com