T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER VE QUADRATİK FONKSİYONELİN SOBOLEV UZAYLARINDA MİNİMUM PROBLEMİ ÜZERİNE

Nurcan ŞERAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER VE QUADRATİK FONKSİYONELİN SOBOLEV UZAYLARINDA MİNİMUM PROBLEMİ ÜZERİNE

Nurcan ŞERAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.

BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312023 numaralı öğrencisi Nurcan ŞERAN'ın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı **"Genelleştirilmiş Türevler ve Quadratik Fonksiyonelin Sobolev Uzaylarında Minimum Problemi Üzerine"** başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 12/02/2015 perşembe günü saat 13.00'te yapılmış, tezin onayına OY ÇOKLUĞU / OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 16/03/2015 tarih ve 07 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16/03/2015

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **iii**

ABSTRACT .... **iv**

TEŞEKKÜR .... **v**

ŞEKİLLER LİSTESİ .... **vi**

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ .... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL BİLGİLER **2**

2.1. Lineer Uzayların Tanımı 2

2.2. Lineer Uzaylara Örnekler 3

2.3. Lineer Uzayların İzomorfluğu 4

2.4. Normlu Uzayların Tanımı 4

2.5. Normlu Uzaylarda Dizilerin Limiti 5

2.6. Sürekli Fonksiyonların Normlu $\mathcal{C}_{[a,b]}$ Uzayı 6

2.7. $\mathcal{C}_{[a,b]}^{k}$ Normlu Uzayı 7

2.8. $\widetilde{\mathcal{L}}_p[a,b]$ Normlu Uzayı 8

2.9. Normlu Uzaylarda Açık ve Kapalı Kümeler 9

2.10. Normlu Uzaylarda Normun Equivalentliği 10

2.11. Normlu Uzaylarda Her Yerde Yoğun Lineer Manifoldlar 10

2.12. Skaler Çarpımlı Uzaylar 11

2.13. Skaler Çarpımın İki Özelliği 12

2.14. Banach Uzayları 13

2.15. Normlu Ve Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması 16

2.16. $L[a,b]$ Lebesque Uzayı 20

2.17. $L_2[a,b]$ Lebesque Uzayı 21

2.18. Normlu Uzayların ve Banach Uzaylarının İzomorfizmi, İzometriyası ve Birinin Diğerine Yatırılması 22

3.GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER 24

3.1. $\mathcal{C}_{[a,b]}$,L_1 ve L_2 Uzaylarında Fonksiyonların Ortalanması İşlemi 24

3.2. Genelleştirilmiş Türevler 42

4. SOBOLEV UZAYLARI 56

4.1. $w_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev Uzayının Tanımı 56

4.2. $w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ Sobolev Uzayının Tanımı 58

4.3. Puankare Eşitsizliği Ve Rellich Teoremi 62

4.3.1. Puankare Eşitsizliği 62

5. $w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ SOBOLEV UZAYINDA QUADRATİK FONKSİYONELİN MİNİMUM PROBLEMİ 67

5.1. Quadratik Fonksiyonelin Minimum Problemi 67

5.2. Varyasyon Probleminin Çözümü 70

5.3. Sınır Değer Problemi İle Bağlantı 73

SONUÇ 74

KAYNAKLAR 75

ÖZGEÇMİŞ 76

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER VE QUADRATİK FONKSİYONELİN SOBOLEV UZAYLARINDA MİNİMUM PROBLEMİ ÜZERİNE

Nurcan ŞERAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2015; Sayfa: 76

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu çalışmada, varyasyon hesabında çok değişkenli fonksiyonlara bağlı ekstremum problemi ele alındığında, bu fonksiyonelin kısmi türevlere bağlı olduğu Euler denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklem olur. Böyle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş çözümü tanımlanmış ve inşaa yöntemi verilmiştir. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş türev anlamı ele alındı ve tanımı incelendi. Sonra ise Quadratik fonksiyonelin minimum problemi ele alındı. Ele alığımız Quadratik fonksiyonelin minimumunun varlığının ispatında Puankare-Friedrichs eşitsizliği kullanılmıştır. Bu ekstremum probleminin eksremallarının kısmi türevli diferansiyel denklem olan Euler-Ostragnaski denklemi için sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quadratik fonksiyonelin minimum problemi, Euler-Ostragnaski denklemi, Puankare-Friedrichs eşitsizliği.

ON GENERALIZED DERIVATIONS AND MINIMUM PROBLEM OF QUADRATIC FUNCTIONAL AT SOBOLEV SPACES

Nurcan ŞERAN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2015; Page: 76

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study, the calculus of variations in the multivariate function extremum problem taken, this is due to the partial derivative of the functional Euler equations become partial differential equations. Such generalized solution of partial differential equations are given difinitions were followed and construction methods. Discussed the meaning of partial differential equations and eaminated generalized definition. Then the quadraic fonctional minimum problems were discussed. Puankare-Friedrichs inequality is used to prove the existence of which we will consider the minimum quadratic functional. This ekstremum problem is shown as generalized solution for limit value problem of Euler-Ostragnaski equation which is one of the extrameller's partial derivative differential equation.

Keywords: Quadratik functional minimum problems , Euler-Ostragnaski equation, Puankare-Friedrichs inequation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamam da desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR ile her zaman destekleyen değerli ailem ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürü borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. $\boldsymbol{X_n(t)}$ **fonksiyonunun grafiği** **14**

Şekil 3.1. $\boldsymbol{\omega_n(t-s)}$ **çekirdeğinin grafiği**... **26**

Şekil 3.2. $\boldsymbol{\mathcal{J}_\delta(t)}$ **kesme fonksiyonunun grafiği** **27**

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathcal{C}_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlanmış tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{C}_{[a,b]}^{k}$	:	$[a,b]$ aralığında k kez sürekli diferansiyellenebilen tüm fonksiyonların kümesi
$\mathrm{w}_2^1(\mathcal{D})$	:	$L_2(\mathcal{D})$ uzayında birinci mertebeli genelleştirilmiş türevleri olan tüm u(x) fonksiyonlar sınıfı
${w^0}_2^1(\mathcal{D})$	:	Tüm $u(x) \in \mathcal{C}^{0^{\infty}}(\mathcal{D})$ fonksiyonlar sınıfının $\mathrm{w}_2^1(\mathcal{D})$ normlu uzayına göre kapanışından alınan alt uzayı
$\mathrm{w}_2^2(\mathcal{D})$	:	$L_2(\mathcal{D})$ uzayındaki birinci ve ikinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri olan tüm fonksiyonların kümesi
$\omega(t)$	:	$(-\infty,+\infty)$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen , çift , negatif olamayan ve integrali bire eşit olan fonksiyonel
$\omega_h(t)$	:	Ortalama fonksiyonunun h>0 yarıçaplı çekirdeği
$\mathcal{J}_\delta(t)$	:	Kesme fonksiyonu
$\mathcal{C}^0[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve finit tüm fonksiyonların lineer uzayı
$\mathcal{C}^{0^k}[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında k ıncı mertebeden sürekli diferansiyellenen ve finit fonksiyonların tüm kümesi
$\mathcal{C}^{0^{\infty}}[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen ve finit fonksiyonların tüm kümesi

1.GİRİŞ

Varyasyon hesabında çok değişkenli fonksiyonlara bağlı fonksiyonellerin ekstremum problemini ele aldığımızda fonksiyonelin kısmi türevlere bağlı olduğu görülür. Bu çeşit fonksiyonellerin Euler denklemleri de kısmi türevli diferansiyel denklem olur. Varyasyon problemi ile bağlı bulunmuş kısmi türevli diferansiyel denklemin klasik çözümünün varlık şartlarını sağlamadığında, böyle bir kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş çözümü tanımlanır ve inşaa edilir. Genelleştirilmiş çözümün inşaasında genelleştirilmiş türev anlamı ile karşılaşılır. Genelleştirilmiş türev matematiğe ilk kez S.L.Sobolev tarafından dâhil edilmiştir. Bu tezde genelleştirilmiş türev tanımlarını vermek amacıyla önce ortalama ve kesme fonksiyon anlamalarını ve finit fonksiyon tanımını ve bunların bazı uygulamalarını verdik. Sonra bir ve çok değişkenli fonksiyonların genelleştirilmiş türev anlamını tanımladık. Genelleştirilmiş türev tanımını kullanılarak genelleştirilmiş diferansiyel tanımlandı ve genelleştirilmiş diferansiyel ifadesinin kullanılmasıyla kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin genel çözümü verildi. Daha sonra ise quadratik fonksiyonelin minimum problemi ele alındı. Bu eksremum probleminin ekstremallarının kısmi türevli diferansiyel denklem olan Euler-Ostrogranskii denklemi için sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümü olduğu gösterildi.

Tezin ön kısmında gereken ön bilgiler verildi.

2.TEMEL BİLGİLER

2.1.Lineer Uzayların Tanımı

Tanım1: x, y, z, … elemanlarının E kümesinde iki işlem :

Her iki x,y∈E elemanlarına uygun belli x+y∈E elemanı karşı getirildiğinde ve her bir x∈E elemanına ve her bir λ saysına karşı tamamen belli λ.x∈E elemanı karşı getirildiğinde ve bu işlemler aşağıdaki aksiyomaları sağladığında x+y elemanına x ve y elemanlarının toplamı , λ.x elemanına x elemanının λ sayısına çarpımı ve E kümesinde ise lineer uzay denir:

Her bir x,y,z∈E ve her bir λ,μ sayıları için:

1) x+y=y+x; simetriklik aksiyomu

2) x+(y+z)=(x+y)+z; gruplaştırma aksiyomu

3) öyle 0∈E elemanı bulunur ki, x+0=x eşitliği sağlanır;(sıfır elemanının varlığı aksiyomu)

4) $\lambda(\mu.x)=(\lambda.\mu).x$

5) 1.x=x, 0.x=0; (soldaki 0' skaler, sağdaki ise E kümesinin sıfır elemanıdır)

6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

burada kullanılan $\lambda, \mu,$ … sayıları reel sayılar alındığında uygun lineer uzaya reel lineer uzay , ama kompleks sayılar alındığında ise uygun lineer uzaya kompleks lineer uzay denir.

(-x)=(-1).x=-x alınır –x elemanına x elemanının aksi elemanı denir. 5) ve 7) aksiyomlarından

x+(-x)=1.x+(-1)x=(1-1)x=0.x=0

alınır.

x ve y elemanlarının farkı işlemi x-y=x+(-y) eşitliği ile tanımlanır.

Lineer uzayda sıfır elemanının tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

2.2. Lineer Uzaylara Örnekler

Örnek1. m sayıda reel sayılardan sütun vektörler yapılmış olduğunu, yani

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix},\ z=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_m\end{pmatrix},\ \dots$$

vektörlerinin kümesini ele alalım. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m$ sayılarına x vektörünün koordinatları denir. Bu kümede x+y topalmı ve λ.x çarpımı

$$x+y=\begin{pmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \vdots\\ \xi_m+\eta_m\end{pmatrix},\quad \lambda.x=\begin{pmatrix}\lambda.\xi_1\\ \lambda.\xi_2\\ \vdots\\ \lambda.\xi_m\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

sütun vektörlerinin bu kümesi bu işlemlerle lineer uzay oluşturur. Bu lineer uzay R^m gibi gösterilir.

Örnek2. Derecesi k sayısını aşmayan reel katsayılı polinomların kümesini $\mathcal{P}_k$ gibi gösterelim. Böylece, $x(t) = x_0 + x_1.t + x_2.t^2 + ... + x_k.t^k$ polinomu $x_0, x_1, \dots, x_k$ reel sayılar olduklarında $x(t) \in \mathcal{P}_k$ olur. Derecesi k sayısını aşmayan x(t) polinomunu reel λ sayısına çarptığımızda ve derecesi k sayısını aşmayan iki polinomun toplamı yine derecesi k sayısını aşmayan polinom olduğundan $\mathcal{P}_k$ kümesi lineer uzay oluşturur.

Örnek3. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların tüm mümkün kümesini $C_{[a,b]}$ ile gösterelim. x(t), y(t)$\in C_{[a,b]}$ fonksiyonların toplamı olan x(t)+y(t) fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sürekli olur. λ reel skaler sayısı olduğunda λ.x(t) $\in C_{[a,b]}$ olur. Böylece $C_{[a,b]}$ lineer uzay olur.

Örnek4. $[a,b]$ aralığında k kez sürekli diferansiyellenebilen tüm fonksiyonların kümesini $C_{[a,b]}^k$ gibi gösterelim. x(t), y(t)$\in C_{[a,b]}^k$ ve λ reel skaler sayısı için λ.x(t)$\in C_{[a,b]}^k$ ve x(t)+y(t)$\in C_{[a,b]}^k$ olduğundan $C_{[a,b]}^k$ lineer uzay olur.

2.3.Lineer Uzayların İzomorfluğu

X ve $\tilde{X}$ lineer uzaylarını ele alalım. Her bir x∈ X elemanına karşı belli bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ elemanı karşı getirildiğini varsayalım. Başka bir deyişle tüm X uzayında tanımlanmış değerleri $\tilde{X}$ uzayında olan $\tilde{x}$=J(x) fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $\tilde{x}$=J(x) dönüşümü X uzayını $\tilde{X}$ uzayına karşılıklı bir değerli dönüştürdüğünü varsayalım. Yani $\tilde{x}$=J(x) dönüşümünün aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayalım:

1) J(λx+μy)=λ.J(x)+μ.J(y);∀x,y∈X ve her birλ ve μ skaler sayıları için sağlansın;

2) J(x_1)= J(x_2) ise x_1=x_2 olsun;

3) Her bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için öyle x∈ X elemanı bulunur ki , $\tilde{x}$=J(x) eşitliği sağlansın;

Bu özelliği sağlayan J:$X \longrightarrow \tilde{X}$ dönüşümü bulunduğunda X ve $\tilde{X}$ lineer uzaylarına izomorf lineer uzaylar denir.

Örneğin derecesi m sayısını aşmayan polinomların R^{m+1} uzayına izomorftur. Burada x(t)=$\sum_{k=0}^{m} x_k t^k$ polinomunu aldığımızda

$$J\left(\sum_{k=0}^{m} x_k t^k\right)=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

dönüşümü lineer karşılıklı bir değerli fonksiyon olur.

2.4. Normlu Uzayların Tanımı

Tanım2: Lineer E uzayının her bir x∈E elemanına karşı bu elemanın normu olarak isimlendirilen negatif olmayan $\|x\|$ sayısı karşı getirilmiş olduğunda ve bu $\|x\|$ sayısı aşağıdaki aksiyomları sağladığında, yani $\forall x, y \in E$ ve λ skaler sayıları için

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow$ x=0

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

aksiyomları sağladığında ele aldığımız E lineer uzayına normlu uzay denir. Böylece elemanın normu yukarıdaki aksiyomları sağlayan tüm lineer E uzayında tanımlanmış negatif olamayan değerler alan fonksiyoneldir. Burada 1) aksiyomuna normun yozlaşmamak şartı, 2) aksiyomuna normun homojenlik aksiyomu ve 3) aksiyomuna ise normun üçgen aksiyomu denir. 3) aksiyomu üçgenin keyfi kenarının uzunluğu diğer iki kenar uzunluklarının toplamını aşmadığı anlamındadır. Burada sonuç olarak üçgenin keyfi bir kenarının uzunluğu diğer iki kenarının uzunluklarının farkından büyük olur. Böylece, kolaylıkla $\forall x, y \in E$ için

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \tag{2.1}$$

eşitsizliği ispatlanır. (2.1) eşitsizliğine normun ters üçgen eşitsizliği denir.

Normlu uzayda iki x, $y \in E$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\rho(\mathrm{x,y}) = \|x - y\| \tag{2.2}$$

formülü ile tanımlanır.

Normlu uzaylarda aşağıdaki önemli kümeler tanımlanır:

$$\mathcal{S}_r\,(x_0)=\{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan açık yuvar;

$$\overline{\mathcal{S}_r}\,(x_0)=\{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan kapalı yuvar;

$$\sigma_r\,(x_0)= \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan küre.

2.5. Normlu Uzaylarda Dizilerin Limiti

E normlu uzayında $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elemanlar dizisini ele alalım.

Tanım3. $x_0 \in E$ elemanı için $n \longrightarrow \infty$ şartında $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ şartı sağlandığında

$x_0 \in E$ elemanına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir.

$\mathcal{S}_r\,(x_0)$ açık yuvarına x_0 noktasının r komşuluğu denir.

Limitin aşağıdaki özellikleri sağladığı kolaylıkla ispatlanır:

1) $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ olduğunda x_0 noktasının keyfi $\mathcal{S}_r\,(x_0)$ komşuluğunda $\{x_n\}$ dizisinin sonlu sayıda başlangıç $x_1, x_2, \dots, x_N$ elemanlarından başka n>N için $x_n \in \mathcal{S}_r\,(x_0)$ olur;

2) x_0 limiti tektir;

3) $\{x_n\}$ dizisinin keyfi alt dizisi de x_0 elemanına yakınsar;

4) $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$ olduğunda $n \longrightarrow \infty$ şartında $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda_0 x_0$ olur;

5) $\{y_n\} \subset$ E , $y_0 \in$ E ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ için $n \longrightarrow \infty$ şartında $y_n + x_n \longrightarrow y_0 + x_0$ olur;

6) Ters üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla $n \longrightarrow \infty$ şartında $x_n \longrightarrow x_0$ olduğunda $\|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$ olduğu ispatlanır.

Tanım4. M$\subset$ E kümesi için öyle bir R>0 sayısı bulunursa ki , her bir x $\in$ M için $\|x\| \leq$ R olduğunda M kümesine normlu E uzayında sınırlı küme denir.

7) Her bir yakınsak dizi sınırlı dizidir.

Şimdi normlu uzaylara örnekler gösterelim.

2.6. Sürekli Fonksiyonların Normlu $\mathcal{C}_{[a,b]}$ Uzayı

$[a, b]$ aralığında sürekli olan tüm fonksiyonların lineer $\mathcal{C}_{[a,b]}$ uzayında x(t) $\in$ $\mathcal{C}_{[a,b]}$ sürekli fonksiyonunun normu

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

formülü ile tanımlayalım. Normun 1) ve 2) aksiyomlarının sağlandığı aşikardır. Normun 3 aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Her bir t $\in$ $[a, b]$ için modülün özelliğini kullanarak bulunur.

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \max_{[a,b]} |x(t)| + \max_{[a,b]} |y(t)|.$$

Böylece ,

$$|x(t) + y(t)| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$$

olur. Sol taraftan maksimum aldığımızda eşitsizlik sağlanacaktır. Sonuçta

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

sağlandığı bulunur.

Bu normlu uzayda $C_{[a,b]}$ gibi gösterilir.

$C_{[a,b]}$ uzayında dizilerin normuna nazaran yakınsaklığı düzgün yakınsaklıktır. Gerçekten de, $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisinin $x_0(t) \in C_{[a,b]}$' ye yakınsak olduğunu varsayalım.

Yani $n \longrightarrow \infty$ şartında $\|x - x_0\| \longrightarrow 0$ olsun. Bu ise o demektir ki $\forall \varepsilon > 0$ içn öyle N sayısı bulunur ki , her bir n>N için

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradan da her bir t $\in [a, b]$ için $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ eşitsizliği bulunur. Böylece, $C_{[a,b]}$ uzayda norma göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

2.7. $C^k_{[a,b]}$ Normlu Uzayı

$[a, b]$ aralığında k kez sürekli diferansiyellenen fonksiyonların lineer uzayında norm

$$\|x\|_{C^k_{[a,b]}} = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} \left|x^i(t)\right|$$

formülü ile tanımlanır. Burada $x^{(i)}(t)$ sembolü x(t) fonksiyonunun (i) ninci mertebeden türevidir.

Bu formülle tanımlanan norm, norm aksiyomlarını sağlar. $C^k_{[a,b]}$ uzayında norma göre yakınsaklık $[a, b]$ arlağında $x_n(t), x_n^{(\prime)}(t), \ldots, x_n^i(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)$ fonksiyonlarının dizisinin uygun olarak $x_0(t), x_0^{(\prime)}(t), \ldots, x_0^i(t), \ldots, x_0^{(k)}(t)$ fonksiyonlarına düzgün yakınsaklığıdır.

2.8. $\widetilde{\mathcal{L}}_p[a,b]$ Normlu Uzayı

Şimdi burada $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların lineer uzayında normu

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \ , 1\leq \text{p}<+\infty$$

formülü ile tanımlayalım. Bu formüldeki integral Riemann anlamında integraldir. Bu formülle tanımlanmış normun norm aksiyomlarının 1) ve 2) aksiyomlarını sağladığı açıktır:

Bu norm için üçgen eşitsizliği Minkowski eşitsizliğidir.

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.3)$$

p>1 için Minkovski eşitsizliğinin ispatı aşağıdaki Hölder eşitsizliğine dayanır.

$$\int_a^b |x(t).y(t)|dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.4)$$

Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, p=2 halinde (2) holder eşitsizliği Cauchy Bunyakovski eşitsizliği olur.

Tanım5. Lineer E uzayında iki farklı $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarının tanımlanmış olduğunu varsayalım. Öyle β >0 sayısı bulunursa ki her bir x∈E için

$$\|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2 \qquad (2.5)$$

eşitsizliği sağlandığında $\|.\|_1$ normu $\|.\|_2$ normuna tabidir denir.

Tanım6. $\tilde{\mathcal{L}}_p[a,b]$ uzayındaki yakınsaklığa ortalama yakınsaklık denir.

Kolaylıkla $\|.\|_p$ normunun $\|.\|_{C_{[a,b]}}$ normuna tabi olduğu gosterilir. Gerçektende

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} . \|x\|_{C_{[a,b]}}$$

Böylece ,

$$\|x\|_p \leq \beta\|x\|_{C[a,b]} \ , \ \beta = (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Bu sonuncu eşitsizlikten de düzgün yakınsaklıktan ortalama yakınsaklığın alındığı görülür;

$$\|x_n - x_0\|_p \leq \beta\|x_n - x_0\|_{C[a,b]}$$

2.9. Normlu Uzaylarda Açık ve Kapalı Kümeler

E kümesinin normlu uzay olduğunu varsayalım.

Tanım7. M kümesi normlu E uzayından alınmış bir küme olsun. M kümesinden alınmış her bir $x_0 \in$M için öyle r>0 sayısı bulunursa ki $S_r(x_0) \subset$M olduğunda M kümesi normlu E uzayında açık kümedir denir.

$\emptyset$ boş kümesi, E uzayında açık küme sayılır.

Normlu uzaylarda açık kümeler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Sonlu sayıda açık kümelerin kesişimi de açık küme olur;

2) İstenilen sayıda açık kümelerin birleşimi açık küme olur;

3) Tüm E uzayı açık kümedir;

Normlu E uzayında $S_r(x_0)$ kümesi açık kümedir.

Tanım8. $a \in$E noktasının keyfi $S_r(a)$ komşuluğunda M kümesinde a -dan farklı $(a \neq x)$ en azından bir tane x∈M noktası bulunduğunda a noktasına M kümesinin limit noktası denir.

Aşağıdaki teorem kolaylıkla ispatlanır:

Teorem2.1. a noktasının M kümesinin limit noktası olması için gerek ve yeter şart M kümesinden a noktasına yakınsak olan $\{x_n\} \subset$M , $x_n \neq a$, n=1,2,3, … dizisinin olmasıdır.

Tanım9. M kümesi tüm limit noktalarını içerdiğinde M kümesine kapalı küme denir.

$\emptyset$ boş kümesi her zaman kapalı kümedir. Kapalı kümeler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi kapalıdır;

2) İstenilen sayıda kapalı kümelerin kesişimi de kapalı küme olur;

3) Tüm E uzayı kapalı küme olur.

Tanım10. M⊂E kümesini ele alalım. M' kümesi M kümesinin limit noktalarının kümesi olsun. $\overline{M}$ =M∪ M' kümesine M kümesinin kapanışı denir.

Örneğin $\overline{\mathcal{S}_r}\ (x_0)$ kümesi $\mathcal{S}_r\ (x_0)$ kümesinin kapanışıdır.

2.10. Normlu Uzaylarda Normun Equivalentliği

Tanım11. Lineer E uzayında $\|x\|^{(1)}$ ve $\|x\|^{(2)}$ normlarının tanımlandığını varsayalım. Öyle $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sayıları bulunursa ki , her bir x∈E için

$$\alpha\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \beta\|x\|^{(1)} \qquad (2.6)$$

eşitsizliği sağlandığında bu normlar eguivalent normlar adlandırılır ve

$$\|x\|^{(1)} \sim \|x\|^{(2)}$$

gibi gösterilir.

2.11.Normlu Uzaylarda Her Yerde Yoğun Lineer Manifoldlar

Tanım12. E normlu uzay L bu uzaydan alınmış lineer manifold olduğunu varsayalım. Yani her bir x,y∈L ve λ, μ sayıları için $\lambda x + \mu y$ ∈L özelliğini sağlayan küme olsun. ∀x∈E elemanı ve ∀ε>0 sayısı için öyle u∈L elemanı bulunursa ki $\|x - u\|$< ε şartı sağlandığında L lineer manufoldu normlu E uzayında her yerde yoğundur denir.

L lineer manifoldu E de her yerde yoğun olduğunda $\overline{L}$=E olur.

Örneğin $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ polinomlarının lineer manifoldu $\mathcal{C}_{[a,b]}$ uzayında her yerde yoğundur.

2.12. Skaler Çarpımlı Uzaylar

Euclide uzayının tanımı:

Tanım13. E reel lineer uzayının her bir x ve y çiftine karşı bir (x,y) sayısı karşı getirildiğinde ve bu (x,y) sayısı aşağıda gösterilen aksiyomları sağladığında bu (x,y) sayısına $x,y \in E$ elemanlarının skaler çarpımı olarak adlandırılır ve E lineer uzayında skaler çarpımlı uzay olur:

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$;

2) $(x,y)=(y,x)$;

3) $(\lambda x, y)= \lambda(x,y)$;

4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

Reel lineer E uzayında bu özellikleri sağlayan skaler çarpım tanımlandığında lineer E uzayına Euclide uzayı denir.

Her bir Euclide uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{2.7}$$

formülü ile norm tanımlanır.

Uniter uzayların tanımı:

Tanım14. Kompleks lineer U uzayının her bir x,y çiftine karşı bu elemanların skaler çarpımı olarak adlandırılan kompleks (x,y) sayısı karşılık getirildiğinde ve bu skaler çarpım aşağıdaki aksiyomları

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

3) $(\lambda x, y)= \lambda(x,y)$;

4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

sağlandığında lineer U uzayına uniter uzay denir.

Her bir uniter lineer uzayda $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ formülü ile de norm tanımlanır.

Skaler çarpımlı uzaya örnek olarak $\widetilde{L_2}[a,b]$ uzayını gösterelim. $[a,b]$ aralığında sürekli olan kompleks değerli fonksiyonların lineer uzayında skaler çarpım aşağıdaki formülle tanımlanır.

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

2.13.Skaler Çarpımın İki Özelliği

1) Skaler çarpımın sürekliliği; $n \longrightarrow \infty$ iken $x_n \longrightarrow x$ ve $y_n \longrightarrow y$ olsun. O halde $n \longrightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ olur.

İspat: Burada $(x_n, y_n) - (x,y) = (x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)$ eşitsizliğini ve $|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|$ Couchy-Bunyakovski eşitsizliğini ve yakınsak y_n dizisi için $\|y_n\|$ dizisinin sınırlı olmasını kullanarak $n \longrightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x,y)| &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\|.\|y_n\| + \|x\|.\|y_n - y\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Burada $\|y_n\|$ yakınsak olduğundan sınırlı olduğu kullanıldı.

2) Paralel kenar eşitsizliği: Skaler çarpımlı E uzayının her bir $x, y \in$ E için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır.

Gerçekten de ,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y)$$

$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y)$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Normu uzaylarda genelde paralel kenar eşitliği sağlanmayabilir.

2.14.Banach Uzaylar

Banach uzaylarını tanımlamak için önce fundamental dizilerin tanımını verelim.

Tanım15. X uzayı normlu uzay olsun. $\{x_n\}$ ⊂X dizisi için $\forall\varepsilon > 0$ iken öyle N sayısı bulunursa ki , $\forall n$ >N saysı ve her bir p=1,2,3,… doğal sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

eşitliği sağlandığında $\{x_n\}$ ⊂X dizisine normlu X uzayında foundamental dizi veya Couchy dizisi denir.

Normlu uzaylarda fundamental diziler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Her bir fundamental dizi sınırlıdır;

2) $\{x_n\}$ ⊂X dizisi fundamental dizi olduğunda $\forall\lambda$ skaler sayısı için $\{\lambda x_n\}$ ⊂X dizisi de fundamental dizi olur;

3) $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri fundamental diziler olduğunda $\{x_n + y_n\}$ dizisi de fundamental dizi olur;

4) $\{x_n\}$ fundamental dizisinin bir alt dizisi bir x elemanına yakınsadığında $\{x_n\}$ dizisi de x elemanına yakınsar;

5) Her bir yakınsak dizi X uzayında fundamental dizi olur.

Şimdi Banach uzayını tanımlayalım.

Tanım16. Normlu X uzayında her bir fundamental dizi yakınsak olduğunda X uzayı tam uzaydır denir. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir.

Örneğin , $C_{[a,b]}$ normlu uzayı Banach uzaydır.

$C_{[a,b]}$ uzayında $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisinin yakınsak olması için onun Couchy dizisi olması gerekir. $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisi için $\forall\varepsilon > 0$ iken öyle bir N doğal sayısı vardır ki n>N sayısı ve p=1,2,3,… doğal sayıları için ,

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

veya $\forall t \in [a,b]$ için $\mathcal{C}_{[a,b]}$

$$\left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right| < \varepsilon$$

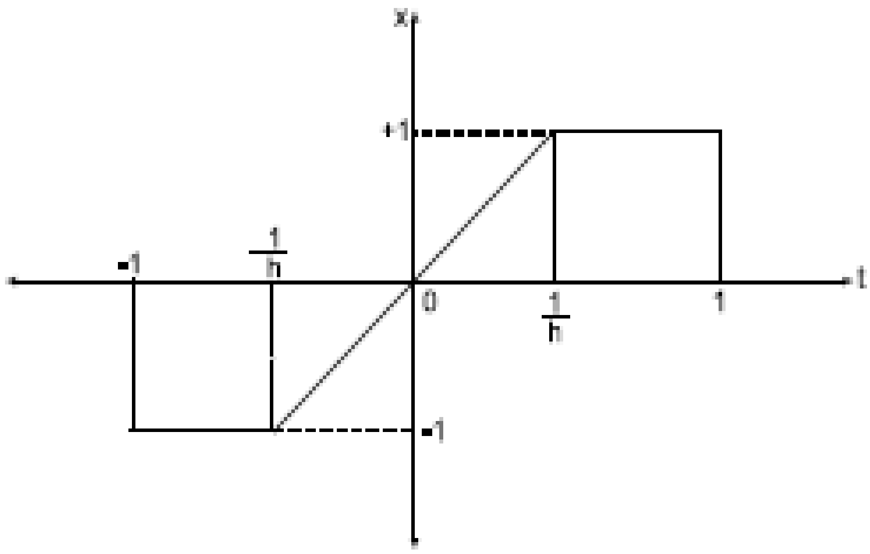
eşitsizliğinin sağlanılmasıdır.

$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisi düzgün olarak x(t) fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında yakınsak olduğunda x(t) limit fonksiyonuda $[a,b]$ aralığında sürekli olur.

Burada tam olmayan normlu uzaylara bir örnek gösterelim.

Örneğin, $\tilde{\mathcal{L}}_p[-1,1]$ normlu uzayının tam olmadığını gösterelim. Bu amaçla aşağıdaki eşitsizlikte tanımlanan sürekli $\{x_n(t)\}$ dizsini ele alalım:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ nt, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$



Şekil - 1.1.

Şekil 1.1. $X_n(t)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil -1.1. –dende görüldüğü gibi $|x_n(t)| \leq 1$ eşitliğini her bir $t \in [-1,1]$ ve her bir n sayısı için sağlanır. Buradan

$$\left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right| \leq 2$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\|^2_{\tilde{L}[-1,1]} = \int_{-1}^{1} \left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right|^2 dt$$

$$= \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right|^2 dt \leq 4 \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt$$

$$= \frac{8}{n} \longrightarrow 0\,, \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

olduğu bulunur.

Böylece, ele aldığımız $\{x_n(t)\}$ dizisi ortalama yakınsaklık anlamında fundamentaldir.

Her bir $t \in [-1,1]$ noktasında noktasal olarak

$$x_n\,(t) \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1,0] \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0,1] \end{cases}$$

olduğu açıktır.

Burada $|x_n(t)| \leq 1$ ve $\left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right| \leq 2$ eşitsizliği sağlandığından

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\|^2_{\widetilde{L_2}[-1,1]} \leq \frac{8}{n} \longrightarrow 0, \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

olur.

Böylece , $[-1,1]$ aralığında $n \longrightarrow \infty$ iken $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ ortalama yakınsaktır. Ama $x(t)$ limiti $[-1,1]$ aralığında sürekli değildir. Yani $x(t) \notin \tilde{\mathcal{L}}_2[-1,1]$ dir. $\tilde{\mathcal{L}}_2[-1,1]$ uzayı $[-1,1]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlardan oluşur.Böylece $\tilde{\mathcal{L}}_2[-1,1]$ uzayı tam normlu uzay değildir.

Şimdi biz burada Hilbert uzayını tanımlayalım.

Tanım17. Skaler çarpımlı uzayı skaler çarpımın doğurduğu norma nazaran tam olduğunda bu skaler çarpımlı uzaya Hilbelt uzayı denir ve H gibi gösterilir.

2.15.Normlu ve Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması

Teorem2.2: Her bir normlu E uzayını bir $\hat{E}$ Banach uzayında her yerde yoğun lineer manifold gibi ele almak olur. Bu $\hat{E}$ Banach uzayına E normlu uzayının tamlaştırılması denir.

İspat: E uzayında fundamental olan tüm fundamental $\{x_n\}$ dizilerinin kümesini ele alalım. $\{x_n\}$ ve $\{x_n'\}$ fundamental dizileri için $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\|x_n - x_n'\| \longrightarrow 0$$

şartı sağlandığında $\{x_n\}$ ve $\{x_n'\}$ fundamental dizilerine equivalent fundamental diziler denir ve

$$\{x_n\} \sim \{x_n'\}$$

gibi gösterilir.

E –de fundamental olan tüm fundamental dizilerin kümesinde kesişmeyen sınıflandırma yapalım. Aynı sınıfa yalnız ve yalnız equivalent fundamental dizileri dahil edelim. Tüm sınıfların kümesini $\hat{E}$ gibi gösterelim. Sınıfları ise $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ gibi gösterelim. $\{x_n\}$ fundamental dizisi $\hat{x}$ sınıfına dahil olması $\{x_n\} \in \hat{x}$ gibi gösterilir ve $\{x_n\}$ dizisine $\hat{x}$ sınıfının temsilcisi denir.

$\hat{E}$ sınıflar kümesini normlu uzaya dönüştürelim. $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ sınıflarının toplamı aşağıdaki yöntemle tanımlayalım. $\{x_n\} \in \hat{x}$ ve $\{y_n\} \in \hat{y}$ temsilcilerini alalım. O zaman $\{x_n + y_n\}$ fundamental dizsinin dahil olduğu sınıfı $\hat{x} + \hat{y}$ olarak tanımlarız. Kolaylıkla $\hat{x} + \hat{y}$ toplamının $\hat{x}, \hat{y}$ sınıflarından alınan temsilcilerin seçimine bağlı olmadığı gösterilir. $\lambda\hat{x}$ çarpım ise $\{\lambda x_n\}$ dizisinin dahil olduğu sınıf gibi tanımlanır. Bu tanım da $\{x_n\} \in \hat{x}$ temsilcisine bağlı değildir. Çünkü , $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ olduğunda $\{\lambda x_n\} \sim \{\lambda x_n'\}$ olur.

$\{0\}$ fundamental dizisinin dahil olduğu sınıf 0 gibi gösterilir. Böylece $0 \in \hat{E}$ olur. $\hat{E}$ uzayında norm

$$\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|_E$$

gibi tanımlanır.

Burada

$$\left| \|x_{n+p}\| - \|x_n\| \right| \leq \|x_{n+p} - x_n\|$$

eşitsizliğinden $\{\|x_n\|\}$ dizisinin Couchy dizisi olduğu görülür. Bu yüzden yukarıdaki limit vardır. Bu limit $\hat{x}$ sınıfından seçilmiş $\{x_n\} \in \hat{x}$ temsilcisine de bağlı değildir. Gerçektende $\{x_n'\} \in \hat{x}$ seçtiğimizde

$$|\|x_n'\| - \|x_n\|| \leq \|x_n' - x_n\| \longrightarrow 0 \, , n \longrightarrow \infty$$

olur. Buradan da

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n'\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$$

olur.

Şimdi teoremi ispatlamak için

i) E normlu uzayını $\hat{E}$ -da bir lineer manifold gibi alabiliriz;

ii) E normlu uzayı $\hat{E}$ -da her yerde yoğun olur;

iii) $\hat{E}$ -Banach uzaydır.

i), ii), iii) özelliklerini göstermemiz gerekir. Bu özellikleri ispatladığımızda teorem tam olarak ispatlanmış olacaktır.

İspat i) E uzayındaki x∈E elemanını x,x,x,… stasionar dizisini içeren sınıfla aynılaştıralım, bu sınıfı x gibi gösterelim. o zaman λx elemanı $\{\lambda x\}$ stasionar dizisini sağlayan sınıf olur. x+y sınıfı $\{x + y\}$ dizisini sağlayan sınıf olur. Böylece stasionar dizileri sağlayan sınıflar $\hat{E}$ uzayında bir lineer manifold oluşturur. Bu lineer manifoldu E ile gösterelim.

İspat ii) x sınıfı x∈E den aldığımız

$$\|x\|_{\hat{E}} = \|x\|_E$$

olur. (x –den stasionar $\{x\}$ temsilci dizisi aldığımızda $\{\|x\|\}$ sabit dizi olur. Sabitin limiti ise kendisine eşit olur.)

$\hat{x} \in \hat{E}$ alalım. Gösterelim ki öyle $\{x_n\} \subset E$ dizisi bulunur ki $n \longrightarrow \infty$ iken

$\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \longrightarrow 0$ olur. Bununla E- nin $\hat{E}$ -da her yerde yoğun olduğu gösterilmiş olur.

$\hat{x}$ sınıfından $\{x_n\} \in \hat{x}$ temsilcisini alalım. $\{x_n\}$ dizisi E normlu uzayında fundamental dizi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir N sayısı vardır ki $\forall n$ >N ve p=1,2,3,… sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\|_E < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.8}$$

eşitisizliği sağlanır.şimdi $\forall n$ >N için

$$\lim_{p\to\infty} \|x_{n+p} - x_n\|_E = \|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \tag{2.9}$$

olduğunu buluruz. (2.8) eşitsizliğinde p⟶ 0 iken limit alalım ve (2,9) formülünü kullanalım. Buradan

$$\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

buluruz. Bu ise n⟶ 0 iken $x_n \longrightarrow \hat{x}$ olduğunu gösterir.

İspat iii) $\hat{E}$ uzayından keyfi her fundamental $\{\widehat{x_n}\}$ dizisini alalım. E lineer manifoldu $\hat{E}$ -da her yerde yoğun olduğundan $\widehat{x_n} \in \hat{E}$ elemanı ve $\varepsilon = \frac{1}{n}$ için öyle bir $x_n \in E$ elemanı bulunur ki

$$\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \leq \frac{1}{n}$$

eşitliği sağlanır. Bu yöntemle bulduğumuz $x_n \in E$ dizisinin fundamental olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$ dizisinin fundamental dizi olduğu aşağıdaki eşitsizlikten görülür;

$$\|x_{n+p} - x_n\|_{\hat{E}} \leq \|x_{n+p} - \hat{x}_{n+p}\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_{n+p} - \hat{x}_n\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}}$$

$$< \frac{1}{n+p} + \left\|\hat{x}_{n+p} - \hat{x}_n\right\|_{\hat{E}} + \frac{1}{n} \longrightarrow 0\,, \qquad n \longrightarrow \infty$$

$\{x_n\}$ dizisi $\hat{E}$ uzayında fundamental olduğundan $\{x_n\}$ dizisi için

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\|_{\hat{E}} = \left\|x_{n+p} - x_n\right\|_E$$

eşitliği sağlandığında $\{x_n\}$ dizisi E normlu uzayında da fundamentaldir. Bu yüzden öyle bir $\hat{x} \in \hat{E}$ sınıfı bulunur ki $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{\widehat{x_n}\}$ dizisinin $\hat{x} \in$E elemanına yakınsak olduğunu gösterelim. Bu

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \leq \|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}} + \|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \leq \frac{1}{n} + \|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}}$$

ii) –de gösterildiği gibi $n \longrightarrow \infty$ iken $\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \longrightarrow 0$ olduğundan $n \longrightarrow \infty$ iken $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$ olduğu ispatlanmış olur. Böylece teorem tam olarak ispatlanmış olur.

Şimdi biz burada skaler çarpımlı uzayların tamlaştırılmasını gösterelim.

E uzayı skaler çarpımlı uzay olsun. Skaler çarpımlı E uzayını bu uzaydaki skaler çarpımın doğurduğu $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ normuna göre tamlaştırarak $\hat{E}$ Banach uzayını almış oluruz. $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ elemanlarının $(\hat{x}, \hat{y})$ skaler çarpımını tanımlamak için

$\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$ temsilcileri alınır ve $\hat{E}$-da skaler çarpım

$$(\hat{x}, \hat{y})_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)_E$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada

$$(\hat{x}, \hat{x})_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty}(x_n, x_n)_E = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E^2 = \|\hat{x}\|^2$$

olur.

Böylece , skaler çarpımlı uzayın tamlaştırılması Hilbert uzayı olur.

2.16. $L[a,b]$ Lebesque Uzayı

Burada $L[a,b]$ Banach uzayı normlu $\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ uzayının tamlaştırılması gibi tanımlayalım.Hatırlatalım ki,$\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ uzayının elemanları $[a,b]$ aralığında sürekli

$x(t), y(t), z(t), ...$ fonksiyonlarından oluşur. $x(t) \in \tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ fonksiyonunun $\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ uzayında normu

$$\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)| dt \qquad (2.10)$$

formülü ile tanımlanır.

$\{x_n(t)\}$ ve $\{x_n^*(t)\}$ dizileri $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların iki tane dizisi olduğunu varsayalım. $n \to \infty$ şartında

$$\|x_n - x_n^*\| = \int_a^b |x_n - x_n^*| dt \to 0$$

şartı sağlandığında $\{x_n(t)\}$ ve $\{x_n^*(t)\}$ dizileri $\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ uzayında equivalent veya ortalama equivalent dizileridir denir.

Sonra $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisi için keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle N sayısı bulunursa ki, tüm n>N sayıları için ve tüm doğal p=1,2,3,… sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \int_a^b |x_{n+p} - x_n| dt < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında ele aldığımız $\{x_n(t)\}$ dizisine fundamental dizi denir.$\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]$ normlu uzayının (2.10) normuna göre tamlaştırılmasından alınan $L[a,b]$ Banach uzayına Lebesque uzayı denir. $L[a,b]$ Lebesque uzayının elemanları $\hat{x}(t), \hat{y}(t), ...$ sınıflarından oluşur. $\hat{x}(t)$ sınıfının elemanları ortalama fundamental olan ve birbiri ile equivalent olan $\{x_n(t)\}$, $\{x_n^*(t)\}$,… temsilcilerinden oluşur. $\{x_n(t)\} \in \hat{X}$ olduğunda

$$\|\hat{x}\|_{L[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t)| dt = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1[a,b]} \qquad (2.11)$$

gibi tanımlanır. $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ fonksiyonu için $|\hat{x}(t)|$ fonksiyonunun integraline

Lebesque integrali denir. Yani tanıma esasen (2.11) formülüne uygun olarak

$$\int_a^b |\hat{x}(t)|dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t)|dt.$$

Bu eşitliğin solundaki integral Lebesque integrali, sağdaki integral ise Riemann integralidir.

Dikkate alalım ki, $L[a,b]$ Lebesque uzayı $[a,b]$ aralığında sürekli olan tüm fonksiyonlarıda sağlar. $[a,b]$ aralığında sonlu sayıda birinci çeşit süreksiz olan fonksiyonların $L[a,b]$ uzayı dahilinde sağlanır.

2.17. $L_2[a,b]$ Lebesque Uzayı

$L_2[a,b]$ uzayı skaler çarpımlı $\tilde{\mathcal{L}}_2[a,b]$ uzayının tamlaştırılmasından alınan uzaydır. $L_2[a,b]$ uzayı aynı zamanda Hilbert uzayıdır. $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında skaler çarpım aşağıdaki formülle tanımlanır;

$$(u,v)_{L_2[a,b]} = \lim_{n\to\infty}(u_n,v_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\overline{v_n(x)}dx.$$

Bu formülde u_n ve v_n fonksiyonları $L_2[a,b]$ uzayından alınmış sınıflardır. $\{u_n(x)\}$ dizisi $u(x)$ sınıfının temsilcisi, $\{v_n(x)\}$ dizisi $v(x)$ sınıfının temsilcisidir. Yani $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların ortalama fundamental dizileridir.

$(u,v)_{L_2[a,b]}$ skaler çarpımına $u,v \in \tilde{\mathcal{L}}_2[a,b]$ olmak üzere $u.\bar{v}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzere lebesque integrali denir;

$$\int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\overline{v_n(x)}dx.$$

Özel halde $a \le x \le b$ için temsilcisi $\{1\}$ olan $v(x)$ sınıfını $v(x) = 1$ alalım. Bu halde $u(x) \in L_2[a,b]$ fonksiyonunun Lebesque integrali aşağıdaki eşitlikle tanımlanır;

$$\int_a^b u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki integral Riemann integrali sol yanındaki integral ise Lebesque integralidir.

Burada $u(x) \in L_2[a,b]$ fonksiyonunun integrali $\{u_n(x)\} \in u(x)$ temsilcisinin Riemann integralinin limiti gibi tanımlanır.

$L_2[a,b]$ uzayına Lebesque uzayı denir.

2.18. Normlu Uzayların ve Banach Uzaylarının İzomorfizmi, İzometriyası ve Birinin Diğerine Yatrılması

Normlu X ve $\hat{X}$ uzaylarının verildiğini ve tüm X uzayında tanımlanmış $\hat{x} = J(x)$ lineer birebir fonksiyonunun normlu X ve $\hat{X}$ uzaylarını lineer uzaylar gibi bu uzaylar arasında izomorfizm oluşturduğunu varsayalım. Öyle $\propto > 0$ ve $\beta > 0$ sayılarının olduğunu varsayalım ki, her bir $x \in X$ için

$$\propto \|x\| \le \|J(x)\| \le \beta \|x\|$$

eşitsizliği sağlandığında normlu X ve $\hat{X}$ uzayları izomorf uzaylar adlanır.

$\|x\| = \|J(x)\|$ eşitliği her bir $x \in X$ için sağlandığında X ve $\hat{X}$ normlu uzayları izometrik uzaylar adlandırılır.

Tüm X uzayında tanımlanmış lineer $\hat{x} = J(x)$ fonksiyonu ve öyle $\beta > 0$ saysı bulunursa ki her bir $x \in X$ için

$$\|J(x)\| \le \beta \|x\|$$

eşitsizliği sağlandığında X normlu uzayı $\hat{X}$ normlu uzayına yatrılmıştır denir.

Örneğin , $C[a,b]$ uzayı $\tilde{\mathcal{L}}_p[a,b]\,, p \ge 0$ uzayına yatrılmıştır. Bu aşağıdaki değerlendirmeden görülür:

$$\int_a^b |x(t)|^p dt \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|x\|_{C[a,b]}^p.$$

Burada

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |x(t)|\,, \beta = (b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

3.1. $C_{[a,b]}$, L_1 ve L_2 Uzaylarında Fonksiyonların Ortalanması İşlemi

Bu bölümde reel değişkenli reel değerli fonksiyonları ele alacağız. Burada fonksiyonları esasen $C_{[a,b]}$, L_1 ve L_2 uzaylarından götüreceğiz. $C_{[a,b]}$, L_1 ve L_2 uzaylarından alınmış fonksiyonların genelleştirilmiş türevi anlamı verilecektir. Genelleştirilmiş türev anlamını verebilmemiz için önce biz $C_{[a,b]}$, L_1 ve L_2 uzaylarından alınan $f(x)$ fonksiyonunun ortalaması işlemini gösterelim. Bu amaçla öncelikle ortalama işleminin çekirdek fonksiyonunun tanımını verelim.

Önce $C_{[a,b]}$uzayından alınmış fonksiyonların ortalama ve kesme fonksiyonlarını tanıyalım ve onların bazı uygulamalarını gösterelim. Bu amaçla $(-\infty,+\infty)$ aralığında tanımlanmış aşağıdaki formülle tanımlanan

$$\omega(t)=\begin{cases}\frac{1}{c}e^{-\frac{1}{1-t^2}} & ,|t|<1\\ \\ 0 & ,|t|\geq 1\end{cases} \tag{3.1}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu eşitlikteki c sabiti pozitif bir sayı olup

$$c=\int_{-1}^{1}e^{-\frac{1}{1-s^2}}ds \tag{3.2}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada (3.1) eşitliği ile tanımlanmış $\omega(t)$ fonksiyonu $(-\infty,+\infty)$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen , çift , negatif olamayan ve integrali bire eşit olan , yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)dt=1$$

eşitliğini sağlayan fonksiyondur.

$\omega(t)$ fonksiyonunun kendisinin ve türevlerinin sürekli olması yalnız $t=\pm 1$

noktasında şüphe doğurabilir. Ama $|t| < 1$ olmak üzere $t^2 \longrightarrow 1$ şartında

$\frac{1}{t^2-1} \longrightarrow -\infty$ olur ve $\omega(t) \longrightarrow 0$ olur.

$t^2 < 1$ olmak üzere $\omega(t)$ fonksiyonunun istenilen mertebeden türevi

$$\frac{P(t)}{(t^2-1)^{\propto}} e^{\frac{1}{t^2-1}} \tag{3.3}$$

şeklinde olduğu açıktır. Burada $P(t)$ bir polinom $\propto$ ise bir doğal sayıdır.

$t^2 < 1$ şartının sağlanmasıyla $t^2 \longrightarrow 1$ şartında (3.3) ifadesi sıfıra yakınsar. Bununla (3.1) eşitliği ile tanımlanmış $\omega(t)$ fonksiyonunun $-\infty < \boldsymbol{t} < +\infty$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi $h > 0$ şartını sağlayan keyfi bir sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{t}{h}\right) \tag{3.4}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$\omega_h(t)$ fonksiyonuna ortalamanın $h > 0$ yarıçaplı çekirdeği denir.

Dikkate alalım ki, $\omega_h(t)$ fonksiyonu da $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanmış , çift , negatif olmayan istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t)dt = 1$$

özelliklerine sahip fonksiyondur.

Dikkate alalım ki, $\omega_h(t)$ fonksiyonu için

$$\omega_h(t) \equiv 0 \ , |t| \geq h$$

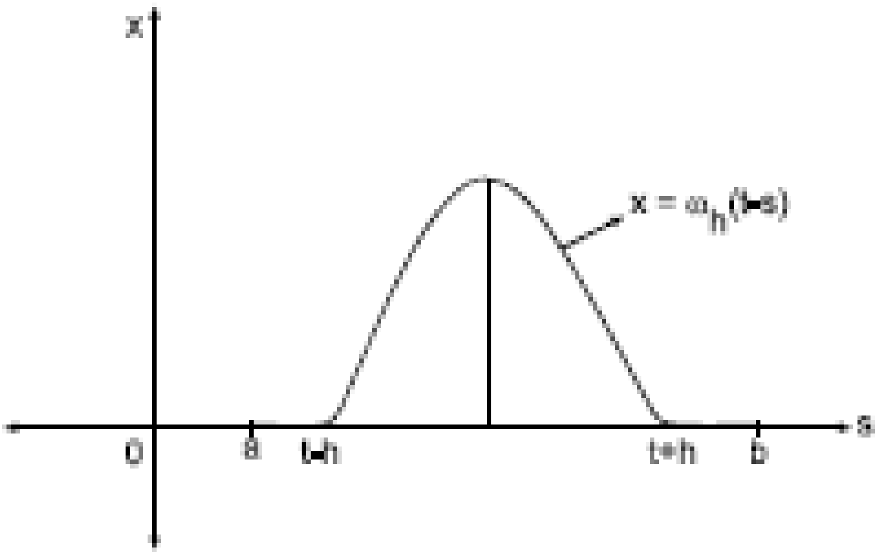
eşitliği sağlanır.

$x(t) \epsilon C_{[a,b]}$ fonksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$x_h(t) = \int_a^b \omega_h(t-s)x(s)ds \qquad (3.5)$$

fonksiyonuna $x(t)$ fonksiyonunun h yarıçaplı ortalama fonksiyonu denir.

Burada şekil-3.1 de $\omega_h(t-s)$ fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Şekil - 3.1.

Şekil 3.1. $\boldsymbol{\omega_n(t-s)}$ çekirdeğinin grafiği

$\omega_h(t)$ çekirdeğinin özelliklerinden ve parametreye bağlı integrallerin parametreye göre diferansiyellenmesi hakkındaki teoremden $x(t) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonundan ortalama $x_h(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri bulunur:

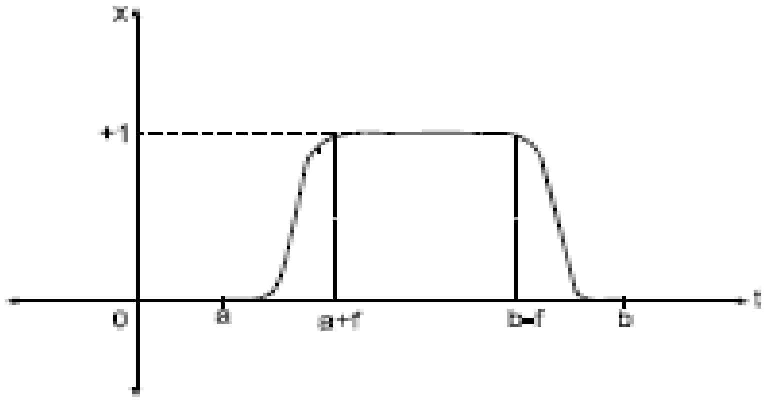
1) $x_h(t) \equiv 0$, $t \notin [a-h, b+h]$;

2) $x_h(t)$fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyondur.

Şimdi burada kesme fonksiyonu tanımlayalım. Kesme fonksiyonu $\mathcal{J}_\delta(t)$ şeklinde gösterelim ve aşağıdaki eşitlikle tanımlayalım:

$$\mathcal{J}_\delta(t) = \int_{a+\frac{3}{4}\delta}^{b-\frac{3}{4}\delta} \omega_{\frac{3}{4}\delta}(t-s)\, ds \qquad (3.6)$$

Burada (3.6) eşitliği ile tanımlanmış kesme $\mathcal{J}_\delta(t)$ fonksiyonunun grafiği şekil-3.2 de gösterilmiştir.



Şekil - 3.2.

Şekil 3.2. $\mathcal{J}_\delta(t)$ kesme fonksiyonunun grafiği

(3.6) eşitliği ile tanımlandığı $\mathcal{J}_\delta(t)$ fonksiyonunun önemli özellikleri vardır:

Burada f$=\frac{1}{2}\delta$ olsun,

1) $\mathcal{J}_\delta(t) \equiv 0, t \notin \left[a + \frac{1}{2}\delta, b - \frac{1}{2}\delta\right]$;

2) $\mathcal{J}_\delta(t) \equiv 1, t \in [a + \delta, b - \delta]$;

3) $0 \leq \mathcal{J}_\delta(t) \leq 1$;

4) $\mathcal{J}_\delta(t)$ kesme fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyondur.

Şimdi burada finit fonksiyonunun tanımını verelim.

Tanım18. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış $x(t)$ fonksiyonu için $a < a'$ ve $b' < b$ olmak üzere $[a', b']$ aralığı bulunursa ki $t \in [a, b] \backslash [a', b']$ yani $t \notin [a', b']$ için $x(t) \equiv 0$ şartı sağlandığında $x(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında finit fonksiyondur denir.

Dikkate alalım ki $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanmış $x(t)$ fonksiyonu için öyle bir $[a, b]$ aralığı bulunursa ki bu aralığın dışında $x(t)$ fonksiyonu sıfıra eşit olduğunda yani $X(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, +\infty) \backslash [a', b']$, o zaman $X(t)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında finit fonksiyonudur denir.

Şimdi $x(t)$ fonksiyonunun bir $[a, b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyon olduğunu varsayalım. Burada $\delta < \frac{b-a}{2}$ olmak üzere $\mathcal{J}_\delta(t)$ kesme fonksiyonunu ele alalım ve

$$\tilde{x}(t) = x(t).\mathcal{J}_\delta(t)$$

fonksiyonunu inşaa edelim. Bu yöntemle inşa ettiğimiz $\tilde{x}(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında finit fonksiyon olur.

$[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve finit olan tüm $x(t), y(t), z(t), \ldots$ fonksiyonların lineer uzayını $\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ gibi gösterilir.

$[a, b]$ aralığında k ıncı mertebeden sürekli diferansiyellenen finit fonksiyonların tüm kümesi $\overset{\circ}{C}{}^{k}_{[a,b]}$ gibi gösterilir. $[a, b]$ aralığında finit ve istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen fonksiyonların tüm kümesi $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{[a,b]}$ gibi gösterilir.

Teorem3.1. $\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ lineer uzayı $\tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$, $p \geq 1$ uzayında her yerde yoğundur, yani $\tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$ uzayından keyfi $x(t) \in \tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$ fonksiyonunu ve keyfi pozitif $\varepsilon > 0$ sayısını aldığımızda $\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ lineer uzayından (lineer manifoldundan) öyle $\tilde{x}(t) \in \overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ fonksiyonu bulunur ki,

$$\|x - \tilde{x}\|_{\tilde{\mathcal{L}}[a,b]} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $\tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$, $p \geq 1$ ile $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların kümesinde $x(t)$ elemanının normunu

$$\|X\|_{\tilde{\mathcal{L}}[a,b]} = \left(\int_a^b |X(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

formülü ile tanımladığımızda alınmış normlu uzayı işaret etmişizdir.(3.7) formülündeki integral Riemann integraldir[4].

İspat: Bu teoremi ispatlamak için $\delta < \frac{b-a}{2}$ alalım ve $[a, b]$ aralığında tanımlanmış keyfi sürekli $x(t)$ fonksiyonu için

$$|x(t) - x(t).\mathcal{J}_\delta(t)| = \big(1 - \mathcal{J}_\delta(t)\big)|x(t)|$$

eşitliğini buluruz.

Dikkate alalım ki, $t \in [a+\delta, b-\delta]$ için

$$1 - \mathcal{J}_\delta(t) \equiv 0$$

olduğundan ve $t \notin [a+\delta, b-\delta]$ olduğunda ise

$$1 - \mathcal{J}_\delta(t) \leq 1$$

olduğundan aşağıdaki değerlendirmede bulunulur:

$$\int_a^b |x(t) - x(t).\mathcal{J}_\delta(t)|^p dt \leq \int_a^{a+\delta} |x(t)|^p dt + \int_{b-\delta}^b |x(t)|^p dt \leq 2\delta M^p$$

Burada $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.

Böylece,

$$\|x(t) - x(t).\mathcal{J}_\delta(t)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p[a,b]} \leq M.\sqrt[p]{2\delta}$$

Bu son eşitsizlikten görüyoruz ki , $\forall\varepsilon > 0$ aldığımızda $\delta > 0$ sayısını

$$\delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^p$$

eşitsizliğini sağlayan seçtiğimizde her bir $x(t) \in \tilde{\mathcal{L}}_p[a,b]$ için ve $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için

$$x(t).\mathcal{J}_\delta(t) = \tilde{x}(t) \in \mathcal{C}^\circ{}_{[a,b]}$$

fonksiyonunu bulmuş oluruz ki,

$$\|x - \tilde{x}\|_{\tilde{\mathcal{L}}[a,b]} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece , burada $\overline{\mathcal{C}^\circ{}_{[a,b]}} = \tilde{\mathcal{L}}_p[a,b]$ olduğunu göstermiş olduk. Teorem tam olarak ispatlandı.

Teorem3.2. $\mathcal{C}^\circ{}_{[a,b]}$ lineer uzayında normu

$$\|x\|_{\overset{\circ}{C}_{[a,b]}} = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

gibi tanımlayarak $\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ uzayını normlu uzaya dönüştürelim. O zaman $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{[a,b]}$ lineer uzayı $\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ normlu uzayında her yerde yoğun olur, yani keyfi $x(t) \in \overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $x_\varepsilon(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{[a,b]}$ elemanı bulunur ki,

$$\|x - x_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{C}_{[a,b]}} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır[4].

İspat:$\overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ uzayında keyfi $x(t) \in \overset{\circ}{C}_{[a,b]}$ fonksiyonunu alalım. Ozaman $x(t)$ finit sürekli fonksiyonu için öyle $[a', b'] \subset [a, b]$ aralığı bulunur ki $a < a'$, $b < b'$ ve $x(t) \equiv 0$, $t \notin [a', b']$ olur. h sayısını öyle seçelim ki,

$$h < min(\, a' - a, b' - b)$$

şartı sağlansın. O zaman $x(t)$ fonksiyonunun $x_h(t)$ ortalama fonksiyonunu, yani

$$x_h(t) = \int_a^b \omega_h(s) x(s) ds \quad , \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

eşitliği ile tanımlanan $x_h(t)$ fonksiyonu $t \in (-\infty, +\infty)$ aralığında istenilen mertebeden diferasinyellenebilirdir ve $t \notin [a, b]$ için $x_h(t) \equiv 0$ olur.

Diğer yandan $|t - h| \ge h$ şartı sağlandığında $\omega_h(|t - h|) \equiv 0$ olduğundan ve

$$\int_a^b \omega_h(|t - s|) ds \equiv 1$$

eşitliği sağlandığından aşağıdaki değerlendirme yapılır:

$$|x(t) - x_h(t)| = \left| \int_{|t-h| \le h} \omega_h(|t - s|) x(s) ds - \int_{|t-h| \le h} \omega_h(|t - s|) ds x(t) \right|$$

$$\le \max_{|t-h| \le h} |x(s) - x(t)|. \int_{|t-h| \le h} \omega_h(|t - s|) ds$$

$$= \max_{|t-h| \le h} |x(s) - x(t)|.$$

Bu eşitsizlikten

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |x(t) - x_h(t)| \leq \lim_{h \longrightarrow 0} \max_{|t-h| \leq h} |x(s) - x(t)| = 0$$

olduğu bulunur. Yani $h \longrightarrow 0$ iken $\|x(t) - x_h(t)\|_{C^{\circ}[a,b]} \longrightarrow 0$.

Böylece Teorem3.2. ispatlanmış oldu.

Şimdi burada çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama fonksiyonların tanımını verelim. Böylece, E^m Euclide uzayında tanımlanmış m sayıda değişkenlere bağlı reel değerli fonksiyonları ele alacağız. E^m Euclide uzayında noktaları x,y gibi ve bu noktaların koordinatlarını uygun olarak $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ gibi göstereceğiz. E^m Euclide uzayında $x \in E^m$ elemanının normu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$$

ve x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - m)^2}$$

formülleri ile tanımlanır.

Şimdi E^m Euclide uzayında herhangi bir $y \in E^m$ noktasını alalım ve değişmez olarak sağlayalım. Pozitif $h > 0$ sayısını alalım ve

$$\omega(\frac{\|x - y\|}{h})$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada

$$\omega(t) = \begin{cases} c.e^{\frac{1}{t^2-1}}, & t^2 < 1 \\ 0 \quad , & t^2 \geq 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Dikkate alalım ki $\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)$ fonksiyonu E^m Euclide uzayında sürekli fonksiyondur ve $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkenlerine nazaran sürekli kısmi türevleri vardır. Bu fonksiyonun tanımından kolaylıkla görülürü ki, bu fonksiyon merkezi y noktasında yarıçapı h sayısına eşit olan

$$S_h(y) = \{x \in E^m : \|x - y\| < h\}$$

yuvarının yalnız iç noktalarında sıfırdan farklı olur.

Dikkate alalım ki , (3.8) eşitliğindeki c sayısı burada

$$c \int_{\|h\|<1} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} dx = 1 \ , \quad \left(dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)\right) \tag{3.9}$$

şartından bulunur.

Şimdi $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ m değişkenli fonksiyonun $\mathcal{D} \subset E^m$ sınırlı bölgesinde integrallenen fonksiyon olduğunu, yani $\mathcal{U} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonunu $\mathcal{D}$ bölgesinin dışına sıfır olarak devam ettirelim, yani

$$\mathcal{U}(x) \equiv 0 \ , \qquad x \in E^m \backslash \mathcal{D}$$

olsun.

Ele aldığımız $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ fonksiyonunun ortalama $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonunu

$$\mathcal{U}_h(x) = \frac{1}{h^m} \int_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) \mathcal{U}(y) dy \tag{3.10}$$

$(dy = (dy_1, dy_2, \dots, dy_m))$ formülü ile tanımlanır.

$\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)$ çekirdeğinin $\mathcal{S}_h(y)$ yuvarı dışında sıfır olduğundan (3.10) integralinin $\mathcal{S}_h(y)$ yuvarı üzere alındığı görülür.

Burada $x \in E^m \backslash \mathcal{D}$ için

$$\rho(x, \partial\mathcal{D}) = \inf_{y \in \partial\mathcal{D}} \|x-y\| \geq h$$

şartı sağlandığında $\mathcal{U}_h(x) \equiv 0$ olduğu açıktır.

Dikkate alalım ki, (3.9) eşitliğine dayanarak

$$\frac{1}{h^m} \int_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) dy = 1 \tag{3.11}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

(3,11) eşitliğini ispatlamak için bu eşitliğin sol yanındaki integralde integralleme değişkeninde

$$y_k - x_k = h.z_k\ ,\ \ k = 1,2,3,\dots,m$$

değişimini yapmak yeterlidir.

Çok değişkenli $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonunun ortalama $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki çok önemli özellikleri vardır:

Özellik1.$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ fonksiyonu sınırlı $\mathcal{D} \subset E^m$ bölgesinde sınırlı fonksiyon olduğunda , o zaman

$$\sup_{x\in E^m}|\mathcal{U}_h(x)| \le \sup_{y\in\mathcal{D}}|\mathcal{U}(y)| \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçektende

$$\mathcal{U}_h(x) = \frac{1}{h^m}\int\limits_{E^m}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\mathcal{U}(y)dy$$

eşitsizliğinin her yanından mutlak değer alıp aşağıdaki değerlendirme bulunur:

$$|\mathcal{U}_h(x)| \le \frac{1}{h^m}\int\limits_{E^m}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)|\mathcal{U}(y)|dy \le \frac{1}{h^m}\int\limits_{E^m}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\sup_{y\in\mathcal{D}}|\mathcal{U}(y)|\,dy$$

veya

$$|\mathcal{U}_h(x)| \le \sup_{y\in\mathcal{D}}|\mathcal{U}(y)|.$$

Sonuncu eşitsizlik her bir $x \in E^m$ için sağlandığından , bu ifadenin sol yanından $x \in E^m$ üzere supremuma geçerek (3.12) eşitsizliğini buluruz.

Özellik 2. Ortalama $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonunun $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkenlerine nazaran istenilen mertebeden türevlenendir ve $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonunu kısmi türevleri aşağıdaki formülle bulunur:

$$\frac{\partial^\alpha \mathcal{U}_h(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\partial {x_2}^{\alpha_2}\dots\partial {x_m}^{\alpha_m}} = \frac{1}{h^m}\int_{E^m}\frac{\partial^\alpha}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\partial {x_2}^{\alpha_2}\dots\partial {x_m}^{\alpha_m}}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\mathcal{U}(y)dy \tag{3.13}$$

Burada $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ eşitliği ile tanımlanır.

Burada dikkate almamız gerekir ki , ortalamanın çekirdeği olan

$$\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)$$

fonksiyonunun $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkenlerine nazaran E^m Euclide uzayında istenilen mertebeden kısmi türevleri vardır ve bu türevler yalnız merkezi x noktasında yarıçapı h olan $\mathcal{S}_h(x)$ yuvarında sıfırdan farklıdırlar. (3.13) formülünün doğru olduğunu göstermek için $\mathcal{U}_h(x)$ ortalama fonksiyonunun x_1 değişkenine nazaran türevinin varlığını göstermekle yetinebiliriz. Diğer değişkenlere nazaran ve daha yüksek mertebeli kısmi türevlerinin varlığı benzer şekilde gösterilir.

Türevin tanımından aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$\frac{\mathcal{U}_h(x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_m) - \mathcal{U}_h(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{1}{h^m}\int\limits_{E^m}\frac{1}{\Delta x_1}\left[\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\Bigg|_{(x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_m)} - \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\Bigg|_{(x_1, x_2, \dots, x_m)}\right]\mathcal{U}(y)dy.$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki integral altında parantez içindeki farka Lagrangenin sonlu artış hakkındaki formülü uygulandığında $\mathcal{U}(y)$ fonksiyonunun karşısındaki çarpım

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\Bigg|_{(x_1+\theta\Delta x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

şeklini alır. Bu yazdığımız türev $0 < \theta < 1$ eşitsizliğini sağlayan θ ve keyfi Δx_1 artışı için sınırlıdır ve burada $\mathcal{U}(y) \in L_1(E^m)$. Bu yüzden integral altındaki fonksiyon $c|\mathcal{U}(y)|$ çarpımını aşamaz. Bu yuzden $\Delta x_1 \longrightarrow 0$ şartında integral altında limiti seçebiliriz. Burada biz $c|\mathcal{U}(y)|$ fonksiyonunun integrallenen olduğunu da kullanmış olduk. Burada c sabit sayıdır. Böylece biz x_1 değişkenine nazaran türevin (3.13) formülünün doğruluğunu göstermiş olduk.

Özellik 3. Her bir $\mathcal{U}(x) \in L_1(E^m)$ fonksiyonu için aşağıdaki

$$\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x) = \frac{1}{h^m}\int\limits_{E^m}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)[\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(x)]dy \tag{3.14}$$

formülü doğrudur.

Gerçektende $\mathcal{U}_h(x)$ ortalama fonksiyonunun tanımına göre

$$\mathcal{U}_h(x) = \frac{1}{h^m} \int\limits_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) \mathcal{U}(y)dy$$

ve (3.11) eşitsizliğine göre ise

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x)\frac{1}{h^m} \int\limits_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) dy = \frac{1}{h^m} \int\limits_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) \mathcal{U}(x)dy$$

olduğundan bu iki eşitlikten (3.14) eşitliği bulunur.

Sonraki özellikleri yazmak için önce aşağıdaki tanımları matematik analizden hatırlatalım.

$\mathcal{D} \subset E^m$ açık sınırlı bölge olduğunu ve $\mathcal{U}(x) \in L_1(\mathcal{D})$ olduğunu varsayalım. Bu $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonunu $\mathcal{D}$ bölgesinden $E^m \backslash \mathcal{D}$ bölgesine sıfır değerli fonksiyon gibi devam ettirelim. Bu durumda $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonu ortalama sürekli olur. Yani $\forall \varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki, $\|y\| < \delta$ şartını sağlayan $y \in E^m$ için

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x)| dx < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Başka bir değişle $\forall \varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki, $\|y\| < \delta$ şartını sağlayan $\forall y \in E^m$ için

$$\|\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x)\|_{L_1(\mathcal{D})} < \varepsilon \tag{3.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde $\mathcal{U}(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonları için $\forall \varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki, $\|y\| < \delta$ şartını sağlayan $y \in \mathcal{D}$ için

$$\|\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} = \left(\int\limits_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \tag{3.16}$$

eşitsizliği sağlandığında $\mathcal{U}(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonu $x \in \mathcal{D}$ noktasında orta quadratik süreklidir denir.

Özellik 4. $\mathcal{U}(x) \in L_1(\mathcal{D})$ fonksiyonu için $h \longrightarrow 0$ şartında

$$\int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|\, dx \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

olur.

(3.17) nin anlamı odur ki $\mathcal{U}(x) \in L_1(\mathcal{D})$ fonksiyonunun ortalama $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonu $L_1(\mathcal{D})$ metriğinde $h \longrightarrow 0$ şartında $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonunun kendisine yakınsar.

Uygun olarak $\mathcal{U}(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun ortalama $\mathcal{U}_h(x)$ fonksiyonu $h \longrightarrow 0$ şartında quadratik olarak $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonuna yakınsar, yani

$$\int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|^2\, dx \longrightarrow 0\,, h \longrightarrow 0 \tag{3.18}$$

olur.

Buradaki özelliği (3.18) için ispatlayalım. (3.17) hali için daha kolay ispatlanır. Böylece $\mathcal{U}(x) \in L_2(\mathcal{D})$ olduğunu varsayalım , (3.14) eşitliğine esasen

$$\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x) = \frac{1}{h^m} \int_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)[\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(x)]dy$$

Bu eşitsizliği kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım;

$$|\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|^2 = \frac{1}{h^{2m}}\left|\int_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)[\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(x)]dy\right|^2$$

$$\leq \frac{1}{h^{2m}} \int_{E^m} \omega^2\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy \int_{\|x-y\|\leq h} |\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(x)|^2\, dy$$

Birinci ve ikinci integrallerin integrallenme bölgesi aynıdır. Birinci integralde $\frac{x-y}{h} = z$ değişimi yaptığımızda

$$\int_{E^m} \omega^2\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) dy = h^m \int_{E^m} \omega^2(z) dz = c_1 h^m$$

olur. Buradanda

$$|\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|^2 \leq \frac{c_1}{h^m} \int_{\|x-y\|\leq h} |\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(x)|^2\, dy$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin sağ yanında $x - y = y'$ değişimi yaptığımızda

$$|\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|^2 \leq \frac{c_1}{h^m} \int_{\|y'\|\leq h} |\mathcal{U}(x+y') - \mathcal{U}(x)|^2\, dy$$

eşitsizliğini buluruz.

Bu eşitsizliğin her yanından $\mathcal{D}$ bölgesi üzerinde integral alarak aşağıdaki değerlendirmeyi yaparız:

$$\int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)|^2 dx \leq \frac{c_1}{h^m} \int_{\|y'\|\leq h} dy' \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}(x+y') - \mathcal{U}(x)|^2 dx.$$

Burada ortalama sürekliliği kullanarak $\forall \varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle $h > 0$ sayısı bulunur ki, $\|y'\| < h$ eşitsizliğini sağlayan $y' \in \mathcal{D}$ noktaları için

$$\int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}(x+y') - \mathcal{U}(x)|^2 dx < \varepsilon^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece

$$\int_{\mathcal{D}} |\mathcal{U}(x+y') - \mathcal{U}(x)|^2 dx \leq \frac{c_1 \varepsilon^2}{h^m} \int_{\|y'\|\leq h} dy' = c_1 c_2 \varepsilon^2$$

eşitsizliği bulunur.

Bu eşitsizlikteki c_2 sabiti E^m Euclide uzayında birim yarıçaplı $\mathcal{S}_1(0)$ yuvarının hacmidir. Bu eşitsizlikte $\forall \varepsilon > 0$ sayısı keyfi alındığında (3.18) sonuncu eşitsizlikten alınır.

(3.17) özelliği daha kolay ispatlanır.

Gerçekten de, bu hal için

$$|\mathcal{U}_h(x) - \mathcal{U}(x)| \leq \frac{c_1}{h^m} \int\limits_{\|y'\| \leq h} |\mathcal{U}(x + y') - \mathcal{U}(x)| dy'$$

şeklinde değerlendirme yaparız.

Burada $L_1(\mathcal{D})$ uzayında ortalama süreklilik özelliğini kullanarak (3.17) özelliği ispatlanır.

Buradaki özellikler $\mathcal{D}$ bölgesi kapalı snırlı bölge olduğu halde ve $\mathcal{D}$ sınırlı ölçülen küme olduğu halde de sağlanır.

Şimdi biz burada bir değişkenli finit fonksiyonlara benzer şekilde çok değişkenli finit fonksiyonları tanımlayalım.

E^m Euclide uzayında tanımlanmış $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonu için öyle M sayısı bulunursa ki, bu fonksiyon $\|x\| > M$ şartını sağlayan tüm $x \in E^m$ noktalarında sıfıra eşit olduğunda , o zaman bu $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonuna E^m uzayında finit fonksiyon denir.

E^m Euclide uzayında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen ve finit olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ gibi gösterilir. Bu $\mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ sınıfından alınmış $\mathcal{U}(x)$ finit fonksiyonlarının her birisi için $M > 0$ sayısı genelde farklı olabilir. Tüm E^m uzayı üzerine integrallenen $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Yani $\mathcal{U}(x) \in L_1(E^m)$ olsun , $\|x\| < R$ yuvarında $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonu ile çakışan ve bu

$$\mathcal{S}_R(0) = \{x \in E^m : \|x\| < R\}$$

yuvarının dışında sıfıra eşit olan fonksiyonu $\mathcal{U}_M(x)$ gibi gösterelim. Burada $\mathcal{U}(x) \in L_1(E^m)$ olduğundan

$$\int\limits_{E^m} |\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}_M(x)| dx = \int\limits_{\|x\| > M} |\mathcal{U}(x)| dx \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

olur.

Şimdi burada $\mathcal{U}_M(x)$ fonksiyonu için $0 < h < 1$ olmak üzere ortalama fonksiyonunu

$$\mathcal{U}_{Mh}(x) = \frac{1}{h^m} \int\limits_{E^m} \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right) \mathcal{U}_M(y)dy$$

formülü ile tanımlayalım.

$\mathcal{U}_{Mh}(x)$ ortalama fonksiyonu istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenendir ve $\|x\| > M+1$ bölgesinde sıfıra eşittir.

Böylece $\mathcal{U}_{Mh}(x) = C^{\circ\infty}(E^m)$ olur.

Diğer yandan

$$\int\limits_{\|x\|>M+1} |\mathcal{U}_M(x) - \mathcal{U}_{Mh}(x)|\, dx \xrightarrow{h\to 0} 0$$

özelliği sağlanır.

Şimdi $\forall\varepsilon > 0$ saysını alalım ve değişmez sayalım. Bu $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $M > 0$ sayısı seçelim ki ;

$$\int\limits_{E^m} |\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}_M(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu işlemin devamı olarak öyle küçük $h > 0$ sayısı seçelim ki:

$$\int\limits_{E^m} |\mathcal{U}_M(x) - \mathcal{U}_{Mh}(x)|\, dx = \int\limits_{\|x\|>M+1} |\mathcal{U}_M(x) - \mathcal{U}_{Mh}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlansın.

O zaman

$$\|\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}_M(x)\|_{L_1(E^m)} = \int\limits_{E^m} |\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}_M(x)| dx < \varepsilon$$

değerlendirmesini yaparız.

Buradan kolaylıkla görmüş oluruz ki her bir $\mathcal{U}(x) \in L_1(E^m)$ fonksiyonu için öyle

$\mathcal{U}_{Mh}(x) \in \mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ ortalama fonksiyonu inşa edebiliriz ki, $\mathcal{U}_{Mh}(x)$ ortalama fonksiyonu $L_1(E^m)$ metriğindeki norma nazaran $\mathcal{U}(x)$ fonksiyonuna yaklaşır.

Benzer şekilde her bir $\mathcal{U}(x) \in L_2(E^m)$ fonksiyonu için

$$\|\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}_M(x)\|_{L_2(E^m)} \xrightarrow{h\to 0, M\to\infty} 0$$

olur.

Böylece aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem3.3: $\mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ lineer uzayı (lineer manifoldu) $L_1(E^m)$ ve $L_2(E^m)$ uzaylarında her yerde yoğundur[4].

Şimdi sınırlı $\mathcal{D} \subset E^m$ kümesini ele alalım.İstenilen mertebeden sürekli diferansiyellenen ve sınırlı $\mathcal{D} \subset E^m$ bölgesinde finit olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ gibi gösterelim. Böylece $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ sınıfının fonksiyonları E^m uzayında istenilen mertebeden diferansiyellenen ve finit olan öyle fonksiyonlardır ki $\mathcal{U}(x) \in \mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ ve $|\mathcal{U}(x)| > 0$ şartını sağlayan noktalar kümesi açık küme olur ve bu küme kapanışı ile $\mathcal{D}$ bölgesine dahil olur.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem3. 4.$\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ lineer manifoldu $L_1(\mathcal{D})$ ve $L_2(\mathcal{D})$ uzaylarında her yerde yoğundur[4].

Bu teorem bir boyutlu hale benzer şekilde ispatlanır.

Gerçektende $\mathcal{D}$ açık kümesinin sınırını $\mathcal{S}$ ile gösterelim ve

$$\mathcal{D}_\delta = \left\{x\mathcal{D}: \rho(x,\mathcal{S}) = \inf_{u\in\mathcal{S}} \|x-u\| > S\right\}$$

kümesini ele alalım.

Kolaylıkla $\mathcal{S}$ sınırının kapalı küme olduğu ve $\mathcal{D}_\delta$ kümesinin ise açık küme olduğu ispatlanır.

$\mathcal{D}_\delta$ kümesinin $\mathcal{T}_\delta(x)$ karakteristik fonksiyonunu , yani

$$\mathcal{T}_\delta(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathcal{D}_\delta \\ 0, x \notin \mathcal{D}_\delta \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$\sigma_\delta(x)$ foksiyonunun fonksiyonu $\mathcal{T}_{2\delta}(x)$ fonksiyonunun $h=\delta$ yarıçaplı ortalama fonksiyonu olsun, yani

$$\sigma_\delta(x)=\frac{1}{\delta^m}\int\limits_{E^m}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)\mathcal{T}_\delta(y)dy$$

olsun.

1) $\sigma_\delta(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.$\sigma_\delta(x)$ fonksiyonu E^m Euclide uzayında istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenendir.

2) $\rho(x,\mathcal{S})\le\delta$ şartını sağlayan $x\in E^m$ noktalarında $\sigma_\delta(x)=0$ olur. Gerçektende, yarıçapı δ eşit olan yuvarla $\mathcal{D}_{2\delta}$ kümesi kesişir. Dikkate alalım ki ortalama yarıçapı δ -ye eşit olan yuvar üzere ortalama yapılır.

3) $x\in\mathcal{D}_{3\delta}$ noktalarında $\sigma_\delta(x)=1$ olur. Çünkü bu halde ortalamaya götürülen yuvar tümlükle $\mathcal{D}_{2\delta}$ kümesine yerleşir burada ise $\mathcal{T}_{2\delta}(x)\equiv 1$ olur.

4) $0\le\sigma_\delta(x)\le 1$ olur. Bu özellik $\mathcal{T}_{2\delta}(x)\ge 0$ ve $\omega\left(\frac{\|x-y\|}{\delta}\right)\ge 0$ olmasından ve 1) özelliğinden alınır.

Şimdi $\mathcal{v}(x)\epsilon\mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ fonksiyonunu ele alalım. Ozaman $\mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x)\epsilon\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ olur ve $x\in\mathcal{D}_{3\delta}$ için

$$\mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x)\equiv\mathcal{v}(x)$$

olur.

Aşağıdaki integrali değerlendirelim:

$$\int\limits_{\mathcal{D}}|\mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x)-\mathcal{v}(x)|^2dx=\int\limits_{\mathcal{D}}|\mathcal{v}(x)|^2\left(1-\sigma_\delta(x)\right)^2dx$$

$$\le\int\limits_{\mathcal{D}\backslash\mathcal{D}_{3\delta}}|\mathcal{v}(x)|^2dx\le\sup_{x\in\mathcal{D}}|\mathcal{v}(x)|^2.\,m(\mathcal{D}\backslash\mathcal{D}_{3\delta})$$

Burada $m(.)$ Lebesque ölçüsüdür.

Yeterince küçük δ sayıları için her bir $x \in \mathcal{D}$ noktası $\mathcal{D}_{3\delta}$ kümesinede dahil olur.

Bu yüzden $\delta \longrightarrow 0$ şartında $m(\mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_{3\delta}) \longrightarrow 0$ olur.

Böylece, üstte yaptığımız değerlendirmeden

$$\|\mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x) - \mathcal{v}(x)\|_{L^2(\mathcal{D})} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

alınır. Şimdi varsayalım ki $\mathcal{U}(x) \in L_2(\mathcal{D})$. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\mathcal{U}(x) \epsilon \mathcal{C}^{\circ\infty}(E^m)$ fonksiyonu bulunur ki

$$\|\mathcal{U}(x) - \mathcal{v}(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Bulduğumuz bu $\mathcal{v}(x)$ için ise öyle $\delta > 0$ sayısı bulunur ki

$$\|\mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x) - \mathcal{v}(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Böylece,

$$\|\mathcal{U}(x) - \mathcal{v}(x)\sigma_\delta(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} \le \|\mathcal{U}(x) - \mathcal{v}(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} + \|\mathcal{U}(x) - \mathcal{v}(x)\|_{L_2(\mathcal{D})} < \varepsilon$$

olur.

Bununla biz $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ lineer manifoldunun $L_2(\mathcal{D})$ de her yerde yoğun olduğunu göstermiş olduk.

Aynı yöntemle $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ lineer manifoldunun $L_1(\mathcal{D})$ uzayında her yerde yoğun olduğu gösterilir.

3.2. Genelleştirilmiş Türevler

Önce burada genelleştirilmiş türevi sade hallerde tanımlayalım.

Diferansiyel hesabı klasik matematik analizin en önemli bölümlerinden biri olmakla çok kapsamlı incelemelere sahiptir, ama pratik önemi olan bir çok problemler, özellikle de fiziğin bazı problemlerinin matematik metotları ile çözülmesi ve bazı önemli fiziksel problemlerin daha kapsamlı ve derinden incelenmesi fonksiyonun türevi anlamının genelleştirilmesini doğal olarak ortaya çıkarır.

Örneğin çok basit aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemleri ele alalım;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.19}$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \tag{3.20}$$

(3.19) denklemini dikkate aldığımızda x değişkenine bağlı her bir $u = \varphi(x)$ fonksiyonunun (3.19) denkleminin çözümü olduğu açıkça görür.

Ama (3.20) denklemine dikkat ettiğimizde (3.19) denklemini sağlayan $u = \varphi(x)$ çözümlerinde öyle fonksiyonları seçebiliriz ki örneğin yalnız sürekli olan yani diferansiyellenmeyen $\varphi(x)$ fonksiyonları için (3.20) denkleminin sol yanındaki diferansiyel operatör bu fonksiyonlar için tanımlanmamış olur. Böylece buradan görüyoruz ki ,(3.19) ve (3.20) denklemleri eşdeğer olmayabilir. Bu denklemlerin eşdeğer olmaları için bu denklemlerin çözüm kümelerinin çakışması gerekir. Bu şekilli durumlar olması doğal değildir.

Burada gösterilmiş örneklerden de görüldüğü gibi fonksiyonun türevi anlamının genelleştirilmesi doğal ve gerekli olduğu görülür.

Genelleştirilmiş türev anlamını vermek amacı ile burada finit fonksiyonu anlamını bir daha hatırlatalım.

$\mathcal{D} \subset E^m$ kümesinin sınırlı , açık bir bağlantılı bölge olduğunu varsayalım. Ele aldığımız bu $\mathcal{D}$ bölgesinde öyle bir $\mathcal{D}_\varphi$ bölgesi bulunursa ki bu $\mathcal{D}_\varphi$ bölgesi kapanışı ile birlikte $\mathcal{D}$ ye dahil olursa , yani $\overline{\mathcal{D}_\varphi} \subset \mathcal{D}$ şartı sağlandığında ve $\varphi(x)$ fonksiyonu $\mathcal{D}_\varphi$ bölgesinin dışında sıfıra eşit olduğunda , yani her bir $x \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_\varphi$ için $\varphi(x) \equiv 0$ olduğunda , o zaman $\varphi(x)$ fonksiyonuna sınırlı $\mathcal{D}$ bölgesinde finit fonksiyon denir.

Şimdi $u = u(x, y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeye dek (ikinci mertebe dahil) sürekli kısmi türevlerinin olduğunu varsayalım ve bu $u(x, y)$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y) \qquad (x, y) \in \mathcal{D}$$

denkleminin sağlandığını varsayalım. O zaman iki kez sürekli diferansiyellenen ve $\mathcal{D}$ bölgesinde finit fonksiyon olan her bir $\varphi(x, y)$ fonksiyonu için

$$\int\limits_{\mathcal{D}} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dxdy = \int\limits_{\mathcal{D}} f.\varphi \, dxdy \quad (3.21)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

(3.21) eşitliğinin doğruluğunu göstermek için bu eşitliğin sol yanına dahil olan ifadenin kısmi integrasyon yöntemin uygulayarak ve finit fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak (3.21) eşitliğinin doğruluğu ispatlanır.

Şimdi (3.21) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. O zaman her biri iki kez sürekli diferansiyellenen $u(x, y)$ fonksiyonuna karsi tek bir tane sürekli ve (3.21) denklemini sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonu olur.

Gerçekten de, $u(x, y)$ fonksiyonuna karşı iki farklı sürekli $f_1(x, y)$ ve $f_2(x, y)$ fonksiyonlarına karşı geldiğinde $\mathcal{D}$ bölgesinde keyfi finit $\varphi(x, y)$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanacaktir:

$$\int\limits_{\mathcal{D}} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dxdy = \int\limits_{\mathcal{D}} f_1.\varphi \, dxdy \qquad (3,22)$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dxdy = \int\limits_{\mathcal{D}} f_2.\varphi \, dxdy \qquad (3.23)$$

(3.22) ve (3.23) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılarak her bir finit $\varphi(x, y)$ fonksiyonu için

$$\int\limits_{\mathcal{D}} (f_1 - f_2).\varphi(x, y) \, dxdy = 0$$

eşitliği bulunur.

$\mathcal{C}^{\circ}(\mathcal{D})$ lineer manifoldu $L_1(\mathcal{D})$ de her yerde yoğun olduğundan bu eşitlikten (veya varyasyon hesabının esas lemmasından) $f_1 - f_2 \equiv 0$ veya

$$f_1(x, y) \equiv f_2(x, y) \;\; , (x, y) \in \mathcal{D}$$

eşitliği bulunur. Böylece (3.21) eşitliği keyfi finit $\varphi(x,y)$ fonksiyonu için sağlandığında her bir $u(x,y)$ fonksiyonuna karşı tek bir tane $f(x,y)$ fonksiyonuna karşı getirildiğini gösterdik.

Bu özellik dikkate alınarak zayıf türev aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlanmış $u(x,y)$ sürekli fonksiyonuna karşi öyle sürekli $f(x,y)$ fonksiyonu bulunursa ki (3.21) eşitliği $\mathcal{D}$ bölgesinde sürekli ve finit olan her bir $\varphi(x,y)$ fonksiyonu için sağlandığında $f(x,y)$ fonksiyonuna $u(x,y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ zayıf türevi denir ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

gibi gösterilir.

Bu yüzden (3.21) eşitliğini $\mathcal{D}$ bölgesinde sürekli ve finit olan her bir $\varphi(x,y)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathcal{D}} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dxdy = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \varphi dxdy \tag{3.24}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\mathcal{D}$ bölgesinde finit ve ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilen $\varphi(x,y)$ fonksiyonları için

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad ,(x,y) \in \mathcal{D} \tag{3.25}$$

eşitliği sağlandığından (3.25) eşitliğinden $u(x,y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden zayıf türevi içinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad ,(x,y) \in \mathcal{D} \tag{3.26}$$

eşitliği bulunur.

Şimdi $[a,b]$ aralığında sürekli diferansiyellenen $u(x)$ fonksiyonunu ele alaım. O zaman her bir $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{1}_{[a,b]}$ fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx \tag{3.27}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin doğruluğu kısmi integrasyon formülünün uygulanması ve $\varphi(x)$ fanksiyonunun $[a, b]$ aralığında finit fonksiyon olmasının kullanılmasıyla ispatlanır.

Şimdi her bir $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{1}_{[a,b]}$ fonksiyonu için ve $[a, b]$ aralığında sürekli olan bir $f(x) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \tag{3.28}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (3.27) ve (3.28) eşitliklerini taraf tarafa çıkararak her bir $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{1}_{[a,b]}$ için

$$\int_a^b [u'(x) - f(x)]\varphi(x)dx = 0$$

eşitliğinin sağlandığını buluruz.

$\overset{\circ}{C}{}^{1}_{[a,b]}$ lineer uzayı (lineer manifoldu) $\tilde{L}_{[a,b]}$ uzayında her yerde yoğun olduğundan sonuncu eşitlikten

$$u'(x) = f(x), \;\; x \in [a, b] \tag{3.29}$$

eşitliği bulunur.

Böylece (3.28) eşitliği $u(x)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevinin tanımı olur.

Şimdi biz bu örnekleri de dikkate alarak genelleştirilmiş türevin daha geniş fonksiyonlar sınıf için çok değişkene bağlı fonksiyonun genelleştirilmiş kısmi türevinin tanımını verelim. Bu durumda matematik analizde üç katlı integraller için kısmi integrasyon formülünü ele alalım:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} dv = -\iiint_{\mathcal{D}} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dv + \oiint_{\mathcal{S}} \varphi\psi \cos(n, z)\, ds \tag{3.30}$$

Bu formülde $\mathcal{S}$ yuzeyi $\mathcal{D}$ bölgesinin sınırı n ise $\mathcal{S}$ yüzeyinin dış normalini (n, z) ise oz ekseni ile n normali arasında kalan acıyı gösterir. Bu formüldeki yönlendirici $cos(n, z)$ fonksiyonu uygun şekilde tanımlanarak sonlu katlı integraller için (3,30) formülüne benzer formüller yazılır.

(3.30) formülünde $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde diferansiyellenen ve finit fonksiyon olarak , yani $\varphi(x, y, z) \in \overset{\circ}{C}{}^{1}_{[a,b]}$ olarak alındığında (3.30) formülünün sağ yanındaki $\mathcal{S}$ yüzeyi üzere alınmış yüzey integrali sıfıra eşit olur. Bu hal için (3.30) formülü aşağıdaki şekli alır:

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} dv = -\iiint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \psi dv \tag{3.31}$$

Şimdi m değişkenli $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$= $\varphi(x)$ fonksiyonunun ℓ mertebeden aşağıdaki kısmi türevini ele alalım;

$$D^{\ell}\varphi(x) = \frac{\partial^{\ell}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_m^{\ell_m}}, \qquad (\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m).$$

Burada $\varphi(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları $\mathcal{D} \subset E^m$ bölgesinin dahilinde ℓ mertebeden sürekli kimsi türevleri olduğunda ve $\varphi(x)$ fonksiyonu D bölgesinde finit fonksiyon olduğunda o zaman aşağıdaki kısmi integrasyon formülü sağlanır:

$$\int\limits_{D} D^{\ell}\varphi(x). u(x) dx = (-1)^{\ell} \int\limits_{D} \varphi(x)\, D^{\ell}u(x) dx \tag{3.32}$$

Bu (3.32) formülü genelleştirilmiş türevin esası olarak alınır.

Tanım3.1. $u(x)$ ve $u^{*}(x)$ fonksıyonlarının $L_2(\mathcal{D})$ uzayından alınmıs fonksiyonlar olduklarını ve her bir keyfi alınmış $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathcal{D})$ finit sonsuz mertebeden diferansiyellenen fonksiyon için

$$\int\limits_{D} u(x) D^{\ell}\varphi(x) dx = (-1)^{\ell} \int\limits_{D} u^{*}(x)\varphi(x)\, dx \tag{3.33}$$

eşitliği sağlandığında $u^{*}(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonuna $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun $\mathcal{D}$ bölgesinde ℓ mertebeden genelleştirilmiş türevi denir ve

$$u^*(x) = D^\ell u(x) = \frac{\partial^\ell u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_m^{\ell_m}}, \qquad (\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m)$$

gibi gösterilir. Şimdi (3.33) formülü ile tanımlanan genelleştirilmiş türevin tek olarak tanımlanmış olduğunu , yani tekliğini ispatlayalım.

Aksini farz edelim. Varsayalım ki $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun iki tane

$u^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$ ve $u_1^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$ genelleştirilmiş türevleri vardır. Burada $u^*(x)$ ve $u_1^*(x)$ fonksiyonlarının türevlerinin hemen hemen çakıştığını gösterelim. Bu amaçla

$$\int_D u(x) D^\ell \varphi(x) dx = (-1)^\ell \int_D u^*(x) \varphi(x)\, dx$$

ve

$$\int_D u(x) D^\ell \varphi(x) dx = (-1)^\ell \int_D u_1^*(x) \varphi(x)\, dx$$

eşitliklerini taraf tarafa çıkararak her bir keyfi alınmış $\varphi(x) \in \mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ fonksiyonu için

$$\int_D \big(u^*(x) - u_1^*(x)\big) \varphi(x) dx = 0 \tag{3.34}$$

eşitliğini buluruz.

$\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ lineer manifoldu $L_2(\mathcal{D})$ uzayında her yerde yoğun olduğundan $\exists \varphi_n(x), n = 1,2, \dots$ dizisi bulabiliriz ki , $\{\varphi_n(x)\} \subset \mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ ve $n \longrightarrow \infty$ şartında $\varphi_n(x) \longrightarrow \big(u^*(x) - u_1^*(x)\big)$ olur. (3.34) eşitliği her bir $\varphi(x) \in \mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ için sağlanır, yani bu hal için de

$$\int_D \big(u^*(x) - u_1^*(x)\big) \varphi_n(x) dx = 0 \tag{3.35}$$

olur.

(3.35) eşitliğinin her yanından $n \longrightarrow \infty$ için limit alırsak ve $L_2(\mathcal{D})$ uzayında skaler çarpımın süreklilik özelliğini kullanarak

$$\int_D \left(u^*(x) - u_1^*(x)\right)^2 dx = 0$$

eşitliğini buluruz. Bu sonuncu eşitlikten $L^2(\mathcal{D})$ uzayında $u^*(x)$ ve $u_1^*(x)$ fonksiyonlarının eşdeğer, yani hemen hemen her yerde

$$u^*(x) \equiv u_1^*(x)$$

olduğu bulunur.

Böylece,

$$u^*(x) = D^\ell u(x) = \frac{\partial^\ell u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_m^{\ell_m}}, \qquad (\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m)$$

genelleştirilmiş türevinin tek olduğunu göstermiş olduk.

Özel halde $u(x)$ fonksiyonunun klasik $D^\ell u(x)$ türevi bulunduğunda kısmı integrasyon formülünü kullanarak bu türevin genelleştirilmiş $u^*(x)$ türevi ile çakıştığı gösterilir , yani bu hal içinde

$$\int_D u(x) D^\ell \varphi(x) dx = (-1)^\ell \int_D D^\ell u(x) \varphi(x)\, dx$$

eşitliği sağlanır.

Genelleştirilmiş türevin tanımından ve tekliğinden aşağıdaki formülün doğruluğunu göstermiş olur;

$$D^\ell(c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)) = c_1 D^\ell u_1(x) + c_2 D^\ell u_2(x)$$

Burada aşağıdaki genelleştirilmiş türevler var olduğunda soldaki genelleştirilmiş türevinde varlığını alırız.

Genelleştirilmiş türevin tanımından bulunur ki, genelleştirilmiş türev yalnız D^ℓ -nin şekline bağlıdır. Kısmi türevlerin tekrarlanma sırasına bağlı değildir.

Dikkate alalım ki, genelleştirilmiş $D^\ell u(x)$ türevinin varlığından $\ell_1 < l$ şartını sağlayan ℓ_1 için $D^{\ell_1} u(x)$ türevinin varlığı alınmıyor. Aynı zamanda $D^\ell u(x)$

şeklindeki diğer kısmi türevlerde alınmıyor. Örneğin $D^{\ell}u(x) = \frac{\partial^{\ell}u(x)}{\partial x_1^{\ell}}$ kısmi türevinin varlığından $D^{\ell}u(x) = \frac{\partial^{\ell}u(x)}{\partial x_3^{\ell}}$ kısmi türevinin varlığı alınmıyor.

Genelleştirilmiş türev operatörü kapalılık özelliğine sahip lineer operatördür. Gerçektende , $\{\mu_n(x)\} \subset L_2(\mathcal{D})$ dizisini alalım. Varsayalım ki ,

$$\mu_n(x) \longrightarrow \mu(x) \in L_2(\mathcal{D}) \quad .$$

O zaman

$$D^{\ell}\mu_n(x) = \mu_n^*(x)$$

ve

$$\mu_n^*(x) \longrightarrow \mu^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$$

olsun.

Bu şartlar sağlandığında

$$D^{\ell}\mu(x) = \mu^*(x)$$

olur.

Bunu ispatlamak için

$$\int\limits_D \mu_n(x)D^{\ell}\varphi(x)dx = (-1)^{\ell}\int\limits_D \mu_n^*(x)\varphi(x)\,dx$$

eşitliğinin her yanından $n \longrightarrow \infty$ için limit almak yeterlidir.

Şimdi varsayalım ki, $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun genelleştirilmiş $D^{\ell}u(x) = u^*(x)$ türevi vardır. Bu $u(x)$ fonksiyonunun ortalama fonksiyonu $u_h(x)$ fonksiyonunu , yani

$$u_h(x) = \frac{1}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u(y)\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy$$

fonksiyonunu ele alalım.

Ortalama $u_h(x)$ fonksiyonunun x değişkenine nazaran ℓ mertebeden klasik kısmi türevini hesaplayalım:

$$\mathcal{D}_x^\ell u_h(x) = \frac{1}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u(y)\mathcal{D}_x^\ell \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy$$

$$= \frac{(-1)^\ell}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u(y)\mathcal{D}_y^\ell \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy \tag{3.36}$$

Bu formülde $x \in \mathcal{D}$ alındığında ve bu x noktasından $\mathcal{D}$ bölgesinin $\mathcal{S}$ sınırına dek uzaklık h>0 sayısından büyük olduğunda $\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)$ fonksiyonunu genelleştirilmiş türevinin tanımındaki , yani (3.33) formülündeki finit $\varphi(x)$ fonksiyonunun yerine alabiliriz.

Bu yüzden de

$$\frac{(-1)^\ell}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u(y)\mathcal{D}_y^\ell \omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy = \frac{1}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u^*(y)\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy$$

eşitliğini yazabiliriz.

Bu formülü (3.36) eşitliğini kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\mathcal{D}_x^\ell u_h(x) = \frac{1}{h^m}\int\limits_{\mathcal{D}} u^*(y)\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right)dy \tag{3.37}$$

(3.37) formülünden görüyoruz ki , genelleştirilmiş türevin ortalanması verilmiş fonksiyonun ortalama $\mathcal{D}_x^\ell$ şeklindeki türevinin $\mathcal{D}$ bölgesinde $\mathcal{S}$ sınırından h>0 sayısından büyük olan uzaklıktaki x noktasındaki değerlerine eşit olur.

Ortalama fonksiyonun özelliklerinden

$u_h(x) \longrightarrow u(x)$ ve $h \longrightarrow 0$ şartında $\mathcal{D}$ -nin dahilinde yerleşen her bir $\mathcal{D}'$ bölgesinde $L_2(\mathcal{D}')$ uzayında

$$D^\ell u_h(x) \longrightarrow u^*(x)$$

olur.

Genelleştirilmiş türevin ikinci tanımı da verilir.

Tanım3.2. $u_n(x) \in C^{\circ\infty}(E^m)$ için $u_n(x)$ ve $D^\ell u_n(x)$ fonksiyonları dizilişlerinin $n \longrightarrow \infty$ şartında uygun olarak $u(x)$ ve $u^*(x) \in L_2(\mathcal{D}')$ fonksiyonlarına yakınsadıklarını ve $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ olduğunu varsayalım. O zaman $u^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonuna $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem3.5. Genelleştirilmiş türevin 1 ve 2 tanımları eşdeğerdir[5]

Bu teoremi ispatlamak için $u^*(x)$ fonksiyonu $u(x)$ fonksiyonunun tanım3.2 anlamında genelleştirilmiş $D^\ell u(x)$ türevi olduğunu varsayalım. Ozaman

$$\int_D D^\ell \varphi(x) u(x) dx = (-1)^\ell \int_D \varphi(x) D^\ell u(x)\, dx \qquad (3.32)$$

formülünde $u(x)$ fonksiyonu yerine $u_n(x)$ ve $D^\ell u(x)$ fonksiyonu yerine $D^\ell u_n(x)$ alalım.

O zaman

$$\int_D u_n(x) D^\ell \varphi(x) dx = (-1)^\ell \int_D D^\ell u_n(x) \varphi(x)\, dx\, , n = 1,2, \ldots$$

eşitliğini alırız. Bu eşitlikte $n \longrightarrow \infty$ şartında limit aldığımızda

$$\int_D u(x) D^\ell \varphi(x) dx = (-1)^\ell \int_D D^\ell u(x) \varphi(x)\, dx$$

eşitliğini buluruz. Bu (3.33) formülü ile çakıştığından Tanım3.1 –i almış oluruz. Teoremin tersi Tanım 3.2 'den önce ispatlanmıştır.

Şimdi biz burada genelleştirilmiş türevin özelliklerini gösterelim .

$D^\ell u(x) = u^*(x)$ fonksiyonunu $u(x)$ fonksiyonunun bir D bölgesinde genelleştirilmiş türevi olduğunda $D^\ell u(x) = u^*(x)$ fonksiyonunu D bölgesinin keyfi alt bölgesinde de $u(x)$ fonksiyonunun genelleştirlmiş türevi olur. Bu özellik tanım3.2 –den direk alınır. $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonu $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun α mertebeden genelleştirilmiş

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} = u^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$$

türevi olduğunda ve $u^*(x) \in L_2(\mathcal{D})$ genelleştirilmiş türevin de β mertebeden genelleştirilmiş

$$\frac{\partial^{\beta} u^*(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_m^{\beta_m}} = \mu(x) \in L_2(\mathcal{D})$$

türevi olduğunda, o zaman $u(x) \in L_2(\mathcal{D})$ fonksiyonunun $\alpha + \beta$ mertebeden

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \partial x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m+\beta_m}} = \mu(x) \in L_2(\mathcal{D})$$

genelleştirilmiş türevi olur.

Bu özellik genelleştirilmiş türevin 1 tanımından alınır.

$u(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında genelleştirilmiş türevinin olması , bu fonksiyonun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olmasına eşdeğer olduğu ispatlanır.

Gerçekten de $u(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu varsayalım. O zaman bu fonksiyonun $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde türevi vardır ve $u'(x)$ türevi integrallenen fonksiyon olur. Keyfi alınmış $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{[a,b]}(\mathcal{D})$ fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x)\, \varphi'(x) dx$$

integralini kısmı integrasyon formülünün uygulanmasıyla

$$\int_a^b u(x)\, \varphi'(x) dx = -\int_a^b u'(x)\, \varphi(x) dx$$

sekline alabiliriz.

Bu eşitlikten $u'(x)$ fonksiyonunun $u(x)$ ‘ in genelleştirilmiş türevi olduğu görülür.

Aksine $f(x)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğunda ve $f(x)$ ‘ in genelleştirilmiş $f'(x)$ türevi $L_2[a, b]$ uzayına dahil olduğunda

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\xi)d\xi \text{ , } a \leq x \leq b$$

olur. Bu ise $f(x)$ fonksiyonunun mutlak sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Genelleştirilmiş türevle birlikte genelleştirilmiş diferansiyel ifadelerde tanımlanır. Örnek olarak ikinci mertebeden aşağıdaki operatörü dikkate alalım:

$$Lu = \sum_{k,n=1}^{m} \alpha_{kn} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu$$

Burada L diferansiyel operatorunun eşlenik L^* diferansiyel operatörünü de ele alalım:

$$L^* u = \sum_{k,n=1}^{m} \alpha_{kn} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu$$

Burada $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ sınıfından alınmıs keyfi $\varphi(x)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathcal{D}} uL^*\varphi dx = \int_{\mathcal{D}} Lu\varphi dx$$

eşitliği sağlanır.

$u(x) \in L(\mathcal{D})$ fonksiyonları için genelleştirilmiş diferansiyel ifade , yani $Lu = u^*$ ifadesi aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\int_{\mathcal{D}} uL^*\varphi dx = \int_{\mathcal{D}} u^*\varphi dx$$

Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu $\mathcal{C}^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ sınıfından alınmış keyfi fonksiyondur.

Bu tanıma dayanarak

$$Lu = 0$$

Açık şekilde

$$\sum_{k,n=1}^{m} \alpha_{kn} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0$$

denkleminin genelleştirilmiş $u(x)$ çözümü aşağıdaki eşitliği sağlayan $u(x)$ fonksiyonuna denir.

$$\int_{\mathcal{D}} uL^{*}\varphi dx = 0$$

Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu $C^{\circ\infty}(\mathcal{D})$ sınıfından alınmış keyfi fonksiyondur.

4. SOBOLEV UZAYLARI

4.1. $w_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev Uzayının Tanımı

$L_2(\mathcal{D})$ uzayında yerleşen ve birinci mertebeli genelleştirilmiş türevleride $L_2(\mathcal{D})$ uzayında olan tüm u(x) fonksiyonları sınıfını $w_2^1(\mathcal{D})$ gibi gösterelim. $w_2^1(\mathcal{D})$ sınıfı lineer uzay oluşturur. $u_k(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$, k=1,2,3,…,n için

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$$

olur. Burada c_k keyfi sabit sayılardır. $w_2^1(\mathcal{D})$ lineer uzayında aşağıdaki formülle skaler çarpım tanımlanır;

$$(u,v)_{w_2^1} = \int_{\mathcal{D}} \left(u.v + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} . \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx \qquad (4.1)$$

bu formülde $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ genelleştirilmiş türevdir. (4.1) skaler çarpımın doğurduğu norm

$$\|u\|_{w_2^1}^2 = \int_{\mathcal{D}} \left(u^2 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2 \right) dx \qquad (4.2)$$

formülü ile tanımlanır.(4.1) formülü ile tanımlanmış skaler çarpımın tüm gereken özellikleri sağladığı kolaylıkla gösterilir;

$(u,v)_{w_2^1} = (v,u)_{w_2^1}$;

$(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)_{w_2^1} = c_1 (u_1, v)_{w_2^1} + c_2 (u_2, v)_{w_2^1}$;

$u \not\equiv 0$ için $(u,u) > 0$.

Bu özelliklerden

$$\left|(u,v)_{w_2^1}\right| \leq \|u\|_{w_2^1} . \|v\|_{w_2^1}$$

Cauchy-Bunyakovski eşitsizliği ve

$$\|u+v\|_{w_2^1} \leq \|u\|_{w_2^1} + \|v\|_{w_2^1}$$

üçgen eşitsizliği alınır.

Böylece bu yöntemle tanımlanmış $w_2^1(\mathcal{D})$ uzayına Sobolev uzayı denir.

$w_2^1(\mathcal{D})$ uzayında elemanlar dizisinin yakınsaklığı, yani $\{u_n\} \in w_2^1(\mathcal{D})$ dizisinin $u \in w_2^1(\mathcal{D})$ elemanına $u_n \xrightarrow{w_2^1} u,\ n \longrightarrow \infty$ şartındaki yakınsaklığı

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o \qquad (4.3)$$

şartı ile sağlanır.

$w_2^1(\mathcal{D})$ uzayında normun (4.2) ifadesinden kolaylıkla (4.3) şartının $u_n(x)$ dizisinin $u(x)$ fonksiyonuna ve $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ genelleştirilmiş türevler dizisinin $\frac{\partial u}{\partial x}$ genelleştirilmiş türevine $L_2(\mathcal{D})$ uzayında yakınsamasına eşdeğer olduğu alınır, yani

$$\begin{cases} \|u_n - u\|_{L_2(\mathcal{D})} \longrightarrow o, \\ \left\|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_k} - \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2(\mathcal{D})} \longrightarrow 0, \qquad k = 1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (4.4)$$

$w_2^1(\mathcal{D})$ uzayındaki normun ters üçgen

$$\left|\|u\|_{w_2^1} - \|v\|_{w_2^1}\right| \leq \|u - v\|_{w_2^1}$$

eşitsizliğini kullanarak $w_2^1(\mathcal{D})$ uzayındaki normun sürekliliği ispatlanır, yani

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o$$

şartından

$$\|u_n\|_{w_2^1} \longrightarrow \|u\|_{w_2^1}$$

şartı alınır.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem4.1: $w_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev uzayı Hilbert uzayıdır[5].

Burada $w_2^1(\mathcal{D})$ uzayının tam uzay olduğunu göstermek teoremi ispatlamak için yeterlidir. Bu amaçla $w_2^1(\mathcal{D})$ uzayından $\{u_n(x)\} \subset w_2^1(\mathcal{D})$ Cauchy dizisini alalım, yani bu dizi $\forall \varepsilon > 0$ için öyle N sayısı vardır ki ,n>N eşitliğini sağlayan $\forall$ n ve p=1,2,…sayıları için

$$\left\|u_{n+p} - u_n\right\|_{w_2^1} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $\forall\varepsilon > 0$ için $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\left\|u_{n+p} - u_n\right\|_{w_2^1} \longrightarrow o \tag{4.5}$$

olur.

Şimdi gösterelim ki öyle $u(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$ eleman bulunur ki, $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o \tag{4.6}$$

(4.5) şartını aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\left\|u_{n+p} - u_n\right\|_{L_2} \longrightarrow o\,;$$

$$\left\|\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\|_{L_2} \longrightarrow o\,, n \longrightarrow \infty$$

$L_2(\mathcal{D})$ uzayı tam olduğundan öyle $u \in L_2(\mathcal{D})$ ve $v_n \in L_2(\mathcal{D})$ (k=1,2,…,m) fonksiyonları bulunur ki $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{L_2} \longrightarrow o$$

$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - v_k\right\|_{L_2} \longrightarrow o\,, (k = 1,2, \ldots, n) \tag{4.7}$$

olur.

Ama genelleştirilmiş diferansiyelleme işleminin kapalılık özelliğinden

$u(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$ ve $v_k = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$, (k=1,2,…,n) olduğu görülür.

Bu (4.7) ile birlikte (4.4) şartına getirilmiş olur ki bu da (4.7) 'ye eşdeğerdir. Böylece teorem ispatlanır.

4.2. $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev Uzayının Tanımı

Burada tüm $u(x) \in \mathcal{C}^{0^\infty}(\mathcal{D})$ fonksiyonlar sınıfının $w_2^1(\mathcal{D})$ normlu uzayına göre kapanışından alınan alt uzayı $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ gibi gösteririz. Bu $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev uzayıda tam ve skaler çarpımlı uzay olmasından dolayı Hilbert uzay olur. Böylece $u(x) \in w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ olması öyle $u_n(x) \in \mathcal{C}^{0^\infty}(\mathcal{D})$,(n=1,2,…) dizisi için $n \longrightarrow \infty$

iken

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o \qquad (4.8)$$

olur .

${w^0}_2^1(\mathcal{D})$ uzayında skaler çarpım ve norm uygun olarak (4.1) ve (4.2) formülleri ile tanımlanır.

Şimdi $u(x) \in {w^0}_2^1(\mathcal{D})$ ve $v(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$ alalım. Bu durumda aşağıdaki parça parça integrasyon formülü doğru olur;

$$\int_{\mathcal{D}} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_{\mathcal{D}} v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \,, (k = 1,2, \dots, m) \qquad (4.9)$$

Gerçektende $u(x) \in {C^0}^{\infty}(\mathcal{D})$ aldığımızda (4.9) formülü genelleştirilmiş türevin tanımı gibi doğrudur.

(4.8) formülünü $u_n(x) \in {C^0}^{\infty}(\mathcal{D})$ için yazalım ve var sayalım ki , $u_n(x)$ dizisi $w_2^1(\mathcal{D})$ normunda $u(x) \in w_2^1(\mathcal{D})$ fonksiyonuna yakınsar.

O zaman

$$\int_{\mathcal{D}} u_n \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_{\mathcal{D}} v \frac{\partial u_n}{\partial x_k} dx, (k = 1,2, \dots, m)$$

eşitliklerinin her iki yanından $n \longrightarrow \infty$ iken limit alındığında (4.8) eşitliğini bulmuş oluruz.

Her bir $u(x) \in {w^0}_2^1(\mathcal{D})$ fonksiyonu için aşağıdaki

$$\int_{\mathcal{D}} u^2\,(x) dx \leq c \int_{\mathcal{D}} (\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k})^2\, dx \qquad (4.9)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikteki c>0 sayısı $u(x)$ fonksiyonuna bağlı olmayan ve yalnız $\mathcal{D}$ bölgesine bağlı olan bir sabit sayıdır. (4.9) eşitsizliğine Puankare-Friedrichs eşitsizliği denir.

(4.9) eşitsizliğini ispatlamak için $u(x) \in {C^0}^{\infty}(\mathcal{D})$ alalım.

$0 \leq x_k \leq a, k = 1,2, \dots, m$ eşitsizliği ile tanımlanan bir Δ kubunu alalım. Δ kubunda ki a sayısını öyle seçelim ki, $\mathcal{D}$ bölgesinin kapanışı olan $\overline{\mathcal{D}}$ kümesini Δ kubu içinde sağlansın, $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ olsun. $\Delta \backslash \mathcal{D}$ kümesine $u(x)$ fonksiyonunu sıfır gibi devam ettirelim.

O zaman $u(x) \in \mathcal{C}^{0^{\infty}}(\Delta)$ fonksiyonu için

$$u(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial \xi_1} d\xi_1$$

eşitliğini yazabiliriz.

Bu son eşitliğin yardımıyla ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki değerlendirme yapılır;

$$u^2(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq a \int_0^{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 \tag{4.10}$$

(4.10) eşitliğinin her yanını $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkenlerine göre 0 ‘dan a ‘ya dek integrallenerek

$$\int_0^{a} \dots \int_0^{a} u^2(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1\, dx_2 \dots dx_m \leq a \int_{\Delta} (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2\, dx$$

eşitsizliğini buluruz. Son eşitsizliğin her yanını x_1 değişkenine göre 0 ‘dan a ‘ya dek integralleyerek

$$\int_{\Delta} u^2(x) dx \leq a^2 \int_{\Delta} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx$$

eşitsizliği bulunur.Bu eşitsizliğin sağ yanına

$$a^2 \int_{\Delta} \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx$$

ifadesini ekleyerek

$$\int_{\Delta} u^2(x) dx \leq a^2 \int_{\Delta} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikte integral $\mathcal{D}$ bölegesi üzerinde alındığında bu eşitsizlikte $c = a^2$ olmak üzere (4.9) eşitsizliği $u(x) \in \mathcal{C}^{0^{\infty}}(\mathcal{D})$ fonksiyonları için sağlanmış olur.

Şimdi $u \in w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ ve $\{u_n\} \subset C^{0^{\infty}}(\mathcal{D})$ dizisinin $w_2^1(\mathcal{D})$ normunda u fonksiyonuna yakın olduğunu varsayalım, yani $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o$$

olduğunu varsayalım. (4.9) eşitsizliğini u_n fonksiyonları için aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\|u_n\|_{L_2}^2 \leq c \sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2$$

Bu eşitsizliğin her iki yanından $n \longrightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq c \sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik (4.9) eşitsizliğidir. Dikkate alalım ki (4.9) eşitsizliğinden

$$\|u\|_{w_2^1}^2 \leq c_1 \int_{\mathcal{D}} \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2 \, dx \,, \quad u \in w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D}), c_1 = c + 1 \qquad (4.11)$$

eşitsizliği alınır.

Şimdi $w_2^2(\mathcal{D})$ uzayının tanımını verelim. $L_2(\mathcal{D})$ uzayındaki birinci ve ikinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri olan tüm fonksiyonların kümesini $w_2^2(\mathcal{D})$ gibi gösterelim. Bu $w_2^2(\mathcal{D})$ kümesinin lineer uzay olduğu kolaylıkla görülür. $w_2^2(\mathcal{D})$ uzayında skaler çarpım

$$(u, v)_{w_2^2(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} \left(u.v + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k,n=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_n} \right) dx \quad (4.12)$$

formülü ile tanımlanır.(4.12) skaler çarpımın doğurduğu norm

$$\|u\|_{w_2^2} = \left[(u, u)_{w_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4,.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Kolaylıkla $w_2^2(\mathcal{D})$ Sobolev uzayının Hilbert uzayı olduğu ispatlanır.

4.3.Puankare Eşitsizliği Ve RellichTeoremi

4.3.1 Puankare Eşitsizliği

Burada Δ ile m boyutlu kubu gösterelim. Bu Δ kubunun hacmini $|\Delta|$ ile gösterelim. O zaman tüm $u(x) \in w_2^1(\Delta)$ fonksiyonları için

$$\int_{\Delta} u^2(x)dx \leq \frac{1}{|\Delta|}\left[\int_{\Delta} u(x)dx\right]^2 + \frac{m}{2}|\Delta|^{\frac{2}{m}}\int_{\Delta} \sum\nolimits_{k=1}^{m} (\frac{\partial v}{\partial x_k})^2\, dx \qquad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.14) eşitsizliğine Puankare eşitsizliği denir. Biz Puankare eşitsizliğini Δ kubunda tanımlanmış sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar için ispatlayalım. Δ kubunda sürekli diferansiyellenen fonksiyonların kümesinin $w_2^1(\Delta)$ uzayında her yerde yoğun olduğu gösterilir. Bu yüzden (4.14) eşitsizliğinin $w_2^1(\Delta)$ sınıfında da sağlandığı alınır. (4.14) eşitsizliğini m=3 hali için ispatlayalım. m=3 halinde Δ kubunun $0\leq x, y, z \leq a$ eşitsizlikleri ile tanımlandığını varsayalım. Δ kubundan keyfi olarak $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarını alalım. Bu halde Δ kubunda tanımlanmış sürekli diferansiyellenen $u(M) = u(x, y, z)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$u(M_1) - u(M_2) = \int_{x_1}^{x_2} D_x u(x, y_2, z_2)dx + \int_{y_1}^{y_2} D_y u(x_1, y, z_2)dy$$

$$+\int_{z_1}^{z_2} D_z u(x_1, y_1, z)dz$$

Burada

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

eşitsizliğini kullanarak buluruz;

$$[u(M_2) - u(M_1)]^2 \leq 3\left[\int_{x_1}^{x_2} D_x u(x, y_2, z_2)dx\right]^2 + 3\left[\int_{y_1}^{y_2} D_y u(x_1, y, z_2)dy\right]^2$$

$$+3\left[\int_{z_1}^{z_2} D_z u(x_1, y_1, z)dz\right]^2$$

Bu eşitsizliğin sağ yanındaki terimlerin her birine Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygulayarak ve integrallerin integrallenme aralığını $[0, a]$ ile değiştirerek aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$[u(M_2) - u(M_1)]^2 \leq 3a[\int_0^a \left(D_x u(x, y_2, z_2)\right)^2 dx + \int_0^a \left(D_y u(x_1, y, z_2)\right)^2 dy$$

$$+ \int_0^a \left(D_z u(x_1, y_1, z)\right)^2 dz]$$

Bu eşitsizliğin her yanını $dM_1 dM_2$ - ye göre $(dM_i = dx_i dy_i dz_i \, , i = 1,2)$ integralleyelim, burada $M_1 \; ve \; M_2$ noktaları Δ kubunda birbirine bağlı olmadan dolaşır. Böylece aşağıdaki eşitsizlikler bulunur :

$$\iint_\Delta [u(M_2) - u(M_1)]^2 \, dM_1 dM_2 \leq 3a^5 \int_\Delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dM \, , \quad (4.15)$$

Burada (4.15) eşitsizliğinin sol yanındaki integrali aşağıdaki şekle dönüştürelim.

$$\iint_\Delta [u(M_2) - u(M_1)]^2 \, dM_1 dM_2 = 2a^3 \int_\Delta u^2(M) \, dM - 2\left(\int_\Delta u(M) dM\right)^2$$

Bu eşitsizliği (4.15) eşitsizliğinde dikkate alalım ve $2a^3 = 2|\Delta|$ ifadesine sadeleştirelim. O zaman m=3 hali için (4.14) eşitsizliğini buluruz. Böylece Puankare eşitsizliği ispatlanmış olur.

Sonuç: $\mathcal{D}$ bölgesinin E^m Euclide uzayında sınırlı bölge olduğunu varsayalım. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için öyle sonlu N sayısı vardır ki ve $L_2(\mathcal{D})$ çift –çift ortagonal olan öyle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ fonksiyonları bulunur ki ,bu fonksiyonlar için $\|\varphi_n\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanır ve $u(x) \in {w^0}_2^1(\mathcal{D})$ fonksiyonları için

$$\int_\Delta u^2(x) \, dx \leq \sum_{n=1}^{N} [u(x)\varphi_n(x) dx]^2 + \varepsilon \int_\Delta \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \qquad (4.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.16) eşitsizliğini $u(x) \in \mathcal{C}^{0^\infty}(\mathcal{D})$ fonksiyonları için ispatlamak yeterlidir. Çünkü $\overline{\mathcal{C}^{0^\infty}}(\mathcal{D}) = {w^0}_2^1(\mathcal{D})$ dir.

$\mathcal{D}$ bölgesini içinde sağlayan Δ kubunu ele alalım. Tüm $u(x) \in C^{0^{\infty}}(\mathcal{D})$ fonksiyonlarını $\Delta \backslash \mathcal{D}$ kümesini sıfır olarak devam ettirelim. Ele alınmış ve değişmez sağlanan $\varepsilon > 0$ sayısı için Δ kubunu eşit $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ kublarına ayıralım. Buradaki N sayısını öyle seçelim ki ,

$$\frac{m}{2} |\Delta_n|^{\frac{2}{\Delta}} < \varepsilon \tag{4.17}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Aşağıdaki eşitlikle $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarını tanımlayalım :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}} , x \in \Delta_n \cap \mathcal{D} , \\ o \quad , x \notin \Delta_n \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

Dikkate alalım ki , $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarının inşasında her bir n=1,2,…,N için $\|\varphi_n\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq 1$ ve $\varphi_n(x)$ fonksiyonları çift-çift ortagonaldir.

Böylece (4.14) eşitsizliğini $u(x) \in C^{0^{\infty}}(\mathcal{D})$ için Δ_n kubu için yazarsak ve (4.17) eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\int_{\Delta_n} u^2(x)\, dx \leq \left[\int_{\Delta_n} u(x)\varphi_n(x) dx \right]^2 + \varepsilon \int_{\Delta_n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx$$

Sonuncu eşitsizliği tüm n=1,2,…,N için taraf tarafa topladığımızda (4.16) eşitsizliğini bulmuş oluruz.

Aşağıdaki teorem doğrudur**.**

Teorem4.2. (Rellich)

$\mathcal{D}$ kümesinin E^m Euclide uzayından alınmış keyfi sınırlı bölge olduğunu varsayalım. O zaman $w_2^1(\mathcal{D})$ uzayının normuna nazaran sınırlı olan her bir $u(x) \in w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ fonksiyonları kümesi $L_2(\mathcal{D})$ uzayında kompakt küme oluşturur. Bazen Rellich teoremini $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayı $L_2(\mathcal{D})$ uzayına yatırılmıştır şeklinde de söylenebilir[2].

İspat: $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayında $\|u_n(x)\|_{w_2^1(\mathcal{D})} \leq A$ eşitsizliğini sağlayan $\{u_n(x)\} \subset w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ dizisini ele alalım. Bu $\{u_n(x)\}$ dizisinden $\{u_{n_k}(x)\}$ alt dizisi seçelim. Bu $\{u_{n_k}(x)\}$ alt dizisi için

$$\|u_{n_k} - u_{n_k+p}\|_{w_2^1(\mathcal{D})} \leq 2A$$

eşitsizliği sağlanır. Burada n_k ve $n_k + p$ keyfi sayılardır. Böylece,

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{n_k+p}}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 4A^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Teoremi ispatlamak için $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayından keyfi alınmış ve $\|u_n(x)\|_{w_2^1(\mathcal{D})} \leq A$ eşitsizliğini sağlayan her bir $\{u_n(x)\} \subset w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ dizisinden fundamental olan ve $L_2(\mathcal{D})$ uzayında yakınsak olan $\{u_{n_k}\}$ alt dizisinin seçilebildiğini göstermemiz gerekir.

Şimdi biz $\varepsilon_p = \frac{1}{2^p}$, $p = 1,2, \ldots$ dizisini alalım. O zaman her bir ε_p için öyle

$$\varphi_1^{(p)}(x), \varphi_2^{(p)}(x), \ldots, \varphi_{N_p}^{(p)}(x)$$

fonksiyonları seçilir ki bu fonksiyonlar için (4.16) eşitsizliği sağlanacaktır. p=1,2,.. sayıları ve n=1,2,…,N_p sayıları için

$$\int_{\mathcal{D}} u_i(x)\varphi_n^{(p)}(x)\, dx \,, i = 1,2, \ldots$$

sayısal dizisinin modülü A sayısı ile sınırlı olur;

$$\left| \int_{\mathcal{D}} u_i(x)\varphi_n^{(p)}(x)\, dx \right|^2 \leq \int_{\mathcal{D}} u_i^2(x)dx \int_{\mathcal{D}} \left[\varphi_n^{(p)}(x)\right]^2 dx \leq A^2$$

$\{u_i(x)\}$ dizisinden öyle $\{u_{i_l}(x)\}$ alt dizisi seçebiliriz ki , tüm p=1,2,… ve n=1,2,…,N_p sayıları için sayısal

$$\int_{\mathcal{D}} u_{i_l}(x)\varphi_n^{(p)}(x)dx \,, l = 1,2, \ldots \tag{4.18}$$

dizisi yakınsak olur.

Şimdi $\{u_{i_l}(x)\}$ alt dizisinin $L_2(\mathcal{D})$ uzayında yakınsak olduğunu gösterelim. keyfi p=1,2,… için $\varphi_n^{(p)}(x)$, n=1,2,…,N_p fonksiyonlarını öyle seçelim ki,

$$\int_{\mathcal{D}} \left[u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)\right]^2 dx \leq \sum_{n=1}^{N_p} \left[\int_{\Delta} \left(u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)\right) \varphi_n^{(p)}(x) dx\right]^2 + 4A^2.\varepsilon_p$$

$i, l = 1,2, \ldots$ $\forall \varepsilon > 0$ için öyle p sayısı seçelim ki $4A^2.\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitisizliği sağlansın. (4.18) dizisinin yakınsaklığını kullanarak öyle l_0 bulunur ki $j, l > l_0$ için sonuncu eşitsizliğin sağ yanıda $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük olsun. O zaman $j, l > l_0$ için

$$\int_{\mathcal{D}} \left[u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)\right]^2 dx < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Bu ise $u_{i_l}(x)$ dizisinin $L_2(\mathcal{D})$ uzayının normuna göre kendisinde yakınsak olduğunu gösterir. Buradanda $u_{i_l}(x)$ dizisinin $L_2(\mathcal{D})$ uzayında limitinin olduğunu gösterir. ($L_2(\mathcal{D})$ uzayın Hilbert uzayı olmasından dolayı). Böylece Rellich teoremi ispatlanmış oldu.

5. $w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ SOBOLEV UZAYINDA QUADRATİK FONKSİYONELİN MİNİMUM PROBLEMİ

5.1 Quadratik Fonksiyonelin Minimum Problemi

Burada $a_{k,n}(x) = a_{nk}(x)$, $(k, n = 1,2, \dots, m)$ fonksiyonları $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlanmış sınırlı ölçülen fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Katsayıları $a_{nk}(x)$ fonksiyonları olan quadratik formun $\mathcal{D}$ bölgesinde düzgün pozitif belirli olduğunu varsayalım, yani keyfi alınmış reel $\xi_i(i = 1,2, \dots, m)$değişkenleri için

$$a \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \leq \sum_{k,n=1}^{m} a_{nk}(x)\xi_k\xi_n \; (a > 0) \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Burada a sabit sayı olup x değişkenine bağlı değildir. $a_{nk}(x)$ fonksiyonlarının $\mathcal{D}$ bölgesinde sınırlı olmalarını kullanarak aşağıdaki eşitsizliğin de sağlandığı bulunur;

$$\sum_{k,n=1}^{m} a_{nk}(x)\xi_k\xi_n \leq \beta \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \;, \beta > 0 \tag{5.2}$$

Burada β sabit sayıdır. $w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ sınıfından alı $u(x) \in w^{0}{}_{2}^{1}(\mathcal{D})$ fonksiyonlarında tanımlanmış aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$J(u) = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k,n=1}^{m} a_{nk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) dx \tag{5.3}$$

fonksiyonelini ele alalım.

(5.1) ve (5.2) eşitliklerinin kullanılmasıyla $J(u)$ fonksiyoneli için aşağıdakı değerlendirmeyi yapabiliriz:

$$a \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq J(u) \leq \beta \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{5.4}$$

Burada (5.3) Puankare-Friedrichs eşitsizliğini kullanarak ve (4.11) eşitsizliğini dikkate alarak (5.4) eşitsizliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$a_1\|u\|^2_{w_2^1} \leq J(u) \leq \beta\|u\|^2_{w_2^1}, (0 < a_1 < \beta) \tag{5.5}$$

Burada a_1 pozitif sabit bir sayıdır.

Burada $J(u)$ fonksiyoneli ile birlikte aşağıdaki eşitlikte tanımlanan bi lineer

$$J(u,w) = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k,n=1}^{m} a_{nk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) dx \tag{5.6}$$

$u(x),\ w(x) \in {w^0}_2^1(\mathcal{D})$ ifadesini ele alacağız.

Lemma 1: $J(u)$ ve $J(u,w)$ fonksiyonelleri ${w^0}_2^1(\mathcal{D})$ uzayındaki yakınsamaya göre sürekli fonksiyonellerdir[2].

İspat: $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{w_2^1} \longrightarrow o$$

ve

$$\|w_n - w\|_{w_2^1} \longrightarrow o$$

olduklarını varsayalım. O zaman

$$J(u_n) \longrightarrow J(u)$$

ve

$$J(w_n) \longrightarrow J(w)$$

olduklarını gösterelim. Özellikle sonuncu yakınsamayı göstermek yeterlidir. Yani $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\int_{\mathcal{D}} a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial w_n}{\partial x_j}\, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{D}} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx, (i,j = 1,2,\ldots,m) \tag{5.7}$$

yakınsaklıklarının gösterilmesi yeterlidir.

(5.7) ifadesini ispatlayalım. Burada $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_2} \longrightarrow o$$

Yakınsaklığından ve $a_{ij}(x)$ fonksiyonlarının sınırlı olmalarından $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\left\| a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L_2} \longrightarrow o$$

yakınsaklığı alınır. Buradan ek olarak $n \longrightarrow \infty$ iken

$$\left\| \frac{\partial w_n}{\partial x_j} - \frac{\partial w}{\partial x_j}\right\|_{L_2} \longrightarrow o$$

olur. Bunlar dikkate alınarak $L_2(\mathcal{D})$ uzayında skaler çarpımın sürekli olması özelliğinden (5.7) bağlantısı alınır.

Şimdi $h(x)$ fonksiyonunun $L_2(\mathcal{D})$ uzayından alınmış değişmez sağlanan bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Aşağıdaki fonksiyoneli ele alaım:

$$\phi(u) = J(u) - 2\int_{\mathcal{D}} h(x)u(x)dx \ \left(u \in w^0{}_2^1(\mathcal{D})\right) \tag{5.8}$$

Lemma 2: (5.8) formülü ile tanımlanan $\phi(u)$fonksiyoneli $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayında sürekli ve alttan sınırlı fonksiyoneldir. $\phi(u)$ fonksiyonelinin sürekli olması $J(u)$ fonksiyonelinin sürekli olmasından ve

$$l(u) = \int_{\mathcal{D}} h(x)u(x)dx \tag{5.9}$$

lineer fonksiyonelinin $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayında sürekli olmasından alınır. Burada aynı zamanda $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayındaki yakınsaklıktan $L_2(\mathcal{D})$ uzayındaki yakınsaklık alınır. Sonuncu yakınsaklıktan ise $l(u)$ fonksiyonelinin sürekliliği alınır[2].

Şimdi burada $\phi(u)$ fonksiyonelinin alttan sınırlı olduğunu gösterelim. (4,4) eşitsizliğinden ve Puankare-Friedrichs eşitsizliğinin uygulanmasıyla aşağıdaki değerlendirme yapılır;

$$\phi(u) \geq J(u) - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2} \geq \ a\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2}$$

$$\geq \frac{a}{c}\|u\|_{L_2}^2 - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2} = \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\|u\|_{L_2} - \sqrt{\frac{c}{a}}\|h\|_{L_2}\right)^2 - \frac{c}{a}\|u\|_{L_2}^2$$

$$\geq -\frac{c}{a}\|h\|_{L_2}^2$$

lemma ispatlandı.

Böylece $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ sınıfının fonksiyonlarında $\phi(u)$ fonksiyoneli tanımlanmış ve alt sınırı vardır. Bu alt sınırı $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayının bir fonksiyonunda minimum değer alıp almadığı problemini belirlemek gerekir.

5.2. Varyasyon Probleminin Çözümü

$w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayından $u(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonlarını alalım. Kolaylıkla

$$\phi(u+w) = \phi(u) + 2\left[J(u,w) - \int_{\mathcal{D}} hwdx\right] + J(w) \qquad (5.10)$$

olduğu gösterilir.

$\phi(u)$ fonksiyonelinin alt sınırını d ile gösterelim, yani

$$d = \inf_{u \in w^0{}_2^1} \phi(u)$$

olsun. O zaman infimumun tanımından öyle minimumlaştırıcı $\{u_k\} \subset w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ dizisi bulunur ki , $k \longrightarrow \infty$ şartında

$$\phi(u_k) \equiv d_k \longrightarrow d \qquad (5.11)$$

olur.

(5.10) fonksiyonelinde $u(x)$ fonksiyonunu $u_k(x)$ ile $w(x)$ fonksiyonunu λ reel parametre olmakla $\lambda w(x)$ ile değiştirelim. Burada

$$\phi(u_k + \lambda w) \geq d$$

eşitliğini dikkate alarak aşağıdaki değerlendirmeyi yaparız:

$$\lambda^2 J(w) + 2\lambda\left[J(u_k, w) - \int_{\mathcal{D}} hwdx\right] + d_k - d \geq 0 \qquad (5.12)$$

eşitsizliğinden görüyoruz ki , λ parametresinin quadratik üç terimlisi negatif değildir. O zaman bu quadratik üç terimlisinin diskriminantı için

$$\left| J(u_k, w) - \int_{\mathcal{D}} hwdx \right|^2 \leq J(w)(d_k - d) \quad (5.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir.Burada

$$|J(u_k - u_\ell, w)| \leq \left| J(u_k, w) - \int_{\mathcal{D}} hwdx \right| + \left| J(u_\ell, w) - \int_{\mathcal{D}} hwdx \right|$$

değerlendirmesini dikkate alarak (5.13) eşitsizliğinden aşağıdaki değerlendirmesini buluruz.

$$|J(u_k - u_\ell, w)| \leq \sqrt{J(w)}\left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_\ell - d}\right]$$

Burada $w = u_k - u_\ell$ alıp ve sonra $\sqrt{J(w)}$ ifadesini sadeleştirip sonra ise her tarafin quadratını alırsak

$$J(u_k - u_\ell) \leq \left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_\ell - d}\right]^2$$

eşitsizliğini buluruz.

Bu eşitsizlikten (5.5) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki gereken eşitsizliği buluruz:

$$\|u_k - u_\ell\|^2_{w^0{}_2^1} \leq \frac{1}{\alpha_1}\left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_\ell - d}\right]^2 \quad (5.14)$$

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3. Minimallaştırıcı $\{u_k(x)\}$ dizisi $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ uzayında yakınsak dizidir. Gercektende (5.14) ve (5.11) ‘den

$$\lim_{\ell,k\to\infty} \|u_k - u_\ell\|^2_{w_2^1} = 0 \quad (5.15)$$

olduğu alınır. $w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ tam Hilbert uzayı olduğundan (5.15) –dan ise $\{u_k\}$ dizisi couchy dizisi olmasından dolayı öyle $u_0 \in w^0{}_2^1(\mathcal{D})$ fonksiyonu bulunur ki ,

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_0\| = 0$$

eşitliği sağlanır[1]

Lemma 4. $u_0(x)$ fonksiyonunun minimallaştırıcı dizisinin limiti olduğunu var sayalım. O zaman her bir $w \in \overset{0}{w}{}^{1}_{2}(\mathcal{D})$ fonksiyonu için

$$J(u_0, w) = \int_{\mathcal{D}} hwdx \ \left(w \in \overset{0}{w}{}^{1}_{2}(\mathcal{D})\right) \tag{5.16}$$

eşitliği sağlanır[1].

Bu lemmanın ispatı lemma 1 'e dayanarak (5.13) eşitsizliğinin her yanından $k \longrightarrow \infty$ şartında limit almakla ispatlanır.

Aşağıdaki esas teorem doğrudur.

Teorem5.1: $\phi(u)$ fonksiyoneli dakik alt sınırını (infimum değerini) tek bir tane $u_0(x) \in \overset{0}{w}{}^{1}_{2}(\mathcal{D})$ fonksiyonunda alır[1].

$u_0(x)$ fonksiyonunun minimallaştırıcı dizinin limiti olduğunu varsayalım.

$u(x) \in \overset{0}{w}{}^{1}_{2}(\mathcal{D})$ alalım. $w(x) = u(x) - u_0(x)$ olsun. (5.10) eşitliğinde $u(x)$'in yerine $u_0(x)$ yazalım ve (5.16) eşitliğini kullanarak buluruz:

$$\phi(u) = \phi(u_0 + w) + J(w) \tag{5.17}$$

Burada $J(w) \geq 0$ olduğunda $w = 0$ olduğu bulunur. Bu yüzden

$$\phi(u) \geq \phi(u_0) \tag{5.18}$$

eşitsizliği bulunur. Burada eşitsizlik yalnız $u = u_0$ halinde alınır. Teorem5.1 ispatlanmış olur.

Not 1: $u_0(x)$ minimallaştirıcı fonksiyonun tek olmasından her bir minimallaştırıcı dizinin $u_0(x)$ minimallaştırıcı fonksiyonuna yakınsayacağı görülür.

Not2: Biz minimallatirici $u_0(x)$ fonksiyonunun keyfi alınmış $w \in \overset{0}{w}{}^{1}_{2}(\mathcal{D})$ fonksiyonu ile birlikte (5.16) bağıntısını sağladığını gördük. Şimdi tersine (5.16) bağlantısının sağlandığını varsayalım.O zaman (5.17) –den alınır ki, $u_0(x)$ minimalleştırıcı fonksiyondur. Böylece ,(5.16) bağlantısına $u_0(x)$ fonksiyonunu belirleyen varyasyon denklemi olduğu gibi ele alabiliriz. Bu (5.16) eşitliği önce ele aldığımız varyasyon problemine eşdeğerdir.Böylece, (5.16) eşitliği $\phi(u)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonunun $u(x) = u_0(x)$ alındığındaki sıfıra eşit olması şartıdır.

5.3. Sınır Değer Problemi İle Bağlantı

$\mathcal{D}$ bölgesinin $\mathcal{S}$ sınırı regüler olduğunu (yani her bir noktasında teğet düzleminin olduğu yüzey olduğunu) ve $a_{kn}(x)$ fonksiyonlarının $\mathcal{D}$ bölgesinin kapanısı olan $\overline{\mathcal{D}}$ bölgesinde sürekli diferansiyellenen olduğunu ve $u_0(x)$ fonksiyonunun ele aldığımız varyasyon probleminin çözümü olduğunu varsayalım. O zaman $u_0(x)$ fonksiyonu $J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Ostrogradski denkleminin , yani

$$-\sum_{k,n=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = h(x) \tag{5.19}$$

denkleminin

$$u(x)|_s = 0 \tag{5.20}$$

sınır şartını sağlayan çözümü olur. Burada (5.19) denklemini almak için önce (5.16) eşitliğinin sağ yanında parça-parça integrasyon formülünü uygulayıp , sonra ise (5.16) eşitliğini

$$-\int_{\Omega}\left[\sum_{k,n=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kn}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right) + h\right] w dx = 0 \tag{5.21}$$

şeklinde alırız.

(5.21) eşitliği keyfi alınmış $w \in w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ için sağlanır. $w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ Sobolev uzayı $L_2(\mathcal{D})$ Hilbert uzayında her yerde yoğundur. (5.21) eşitliğinin sol yanında parantez içerisindeki ifade $C(\overline{\mathcal{D}})$ uzayına dahildir. Bu yüzden varyasyon hesabının esas lemmasına göre veya $\overline{w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})} = L_2(\mathcal{D})$ eşitliğinin sağlanmasından parantez içirisinde ki ifadenin her bir $x \in \mathcal{D}$ için sıfıra eşit olması alınır. Yani (5.19) eşitliği alınır.

Böylece varyasyon problemin $C^2(\overline{\mathcal{D}})$ uzayına dahil olan çözümü (5.19)-(5.20) probleminin klasik çözümü olur. Ama ele aldığımız varyasyon probleminin $u_0(x) \in w^{0}{}_2^1(\mathcal{D})$ çözümü (5.19)-(5.20) probleminin genelleştirilmiş çözümü olur.

SONUÇ

Bu tezde genelleştirilmiş türev anlamı verildi. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş çözümü anlamı verildi. Soblev uzayında Quadratik fonksiyonelin minimum problemi ele alındı ve incelendi. Bu Quadratik fonksiyonelin Euler Ostragranski denklemi yazıldı ve bu denklemin genelleştirilmiş çözümü tanımlandı.

KAYNAKLAR

1. Elsgols ,L.E, Calculus of Variations pergamon pres , Ltd. , Newyork, 1961.

2. Balakishan , A.V. , Applied Function analysis, Spinger-Verlag Newyork,1976.

3. Smirnov , V.İ. , Kurs Vissey Matematiki Tom IV çast pervaya , M.:Nauka,1974.

4. Trenogin, V.A. , Funksionalniy Analiz, M.:Nauka,1980.

5. Lyüsternik, L.A. , Sobolev, V.I:, Elemantı Fonksinalnogo Analiza, M.:NAuka,1965.

6. Vladimirov, V.S. , Uravneniya Matematiceskoy fiziki, M.:Nauka,1967.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Samsun'da doğan Nurcan ŞERAN, ilköğretimini Gülören Merkez İlköğretim okulunda başlayıp Paşalı Necati İlköğretim Okulunda tamamladı, lise öğrenimini Aktepe (yabancı dil ağırlıklı) lisesinde tamamladı. 2008 yılında kazandığı Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2012 yılında başarıyla bitirmiştir.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

İletişim Bilgileri

Adres: Alsancak Mahallesi Şehitler Sokak No:86/8 Etimesgut

06790 ANKARA

Telefon:0 (537) 233 78 57

E-posta: seran_nurcan@hotmail.com