T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBELİ LİNEER VE KUAZİ-LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METOTLARI

Talip ŞAHİN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBELİ LİNEER VE KUAZİ-LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METOTLARI

Talip ŞAHİN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312021 numaralı öğrencisi Talip ŞAHİN'in hazırladığı **"Birinci Mertebeli Lineer ve Kuazi-Lineer Denklemlerin Çözüm Metotları"** başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 16/06/2014 Pazartesi günü saat 14:00'te yapılmış, tezin onayına OY ÇOKLUĞU / OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

M. Ç. Mu

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Yusuf Pandır

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun …../…../2014. tarih ve …… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

……/……/2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BİRİNCİ MERTEBELİ LİNEER VE KUAZİ-LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METOTLARI

Talip ŞAHİN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2014; Sayfa: 61

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Hazırladığımız bu çalışmada, Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Lineer ve Kuazi-Lineer Diferansiyel Denklemlerin çözümü, bu çözümün varlığı, çözüm metotları ve bu denklemlerle bağlı problemler araştırıldı. Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Lineer ve Kuazi-Lineer Diferansiyel denklemlerin çözüm metotları incelenerek ayrı ayrı örneklerde çözüm metotlarının uygulaması gösterildi. İki, üç ve n değişkenli Birinci Mertebeli Lineer ve Kuazi-Lineer Diferansiyel Denklemler de ele alındı. Bu denklemlerin genel ve özel çözüm metotlarının bulunması incelendi. Ayrıca bu denklemlerin iki x,y serbest değişkenine bağlı olarak üç boyutlu uzayda oluşturduğu vektör alanlarının, vektör eğrilerinin ve vektör yüzeylerinin bulunması problemlerinin çözüm yöntemi de ele alındı.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Türev, Lineer, Kuazi Lineer, Diferansiyel Denklem, Cauchy Problemi, Kovalevskaya Teoremi

THE SOLUTION METHODS OF FIRST ORDER LINEAR AND QUASI-LINEAR EQUATIONS

Talip ŞAHİN

Bozok University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2014; Page: 61

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study we prepared, the first order partial linear and the solution of Quasi-linear differential equations, the existence of this solution, the solution methods and the problems related to these equations have been researched. The application of the solution methods have been shown with separate examples by analyzing the solution methods of First Order linear Partial differential equations and quasi linear differential equations. Two, three and n variable first order linear and quasi linear differential equations have been examined. The solutions of these equations' general and specific solution methods have been studied. In addition, the solution methods of the problems related to vector areas, vector curves and vector surfaces formed by these equations in three dimensional space depending on the two free variables x, y have been told.

Keywords: Partial Derivatives, Linear, Quasi-Linear, Differential Equations, Cauchy Problem, Kovalevskaya Theorem

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen, üzerimde çok emeği bulunan değerli hocam Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e bütün katkılarından dolayı, herkesten önce teşekkürü bir borç biliyorum.

Bu süreçte ders aldığım, bilgilerinden istifade ettiğim saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN, Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Arş. Gör. Hüseyin KAMACI, Öğr. Gör. Mehmet EKİCİ beyefendilere, Yrd. Doç. Dr. H. Fulya AKIZ hanımefendiye ve diğer tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca çalışma sürecinde bana daima destek olan ve sabrını esirgemeyen eşim Şehriban ŞAHİN'e, çocuklarıma, dönem arkadaşlarım Necati ŞAHBAZ ve Buğra BAĞCI'ya da hassaten teşekkür ediyorum.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR LİSTESİ

Const	: Sabit Değişmez Değer
GradU	: U nun Gradiyenti
$\vec{\nabla}$	: Hamilton Operatörü
div $\vec{U}$	: $\vec{U}$ Vektörünün Diverjansı
rot U	: U Vektör Alanının Burulganı Veya Rotoru
$pr_{\vec{\ell}}(grad\ u)$	: gradu Vektörünün $\vec{\ell}$ Vektörü Üzerine Projeksiyonu (İzdüşümü)
Sin	: Sinüs Fonksiyonu
Cos	: Kosinüs Fonksiyonu
$y^{(n)}(x)$	: y(x) Fonksiyonunun x-e Göre n. Mertebeden Türevi
$\frac{\partial}{\partial x}$	: x-e Göre Kısmi Türev Operatörü

1. GİRİŞ

1.1 Esas Anlamlar Ve Çözüm Kavramı

Bu tezde birinci mertebeli Lineer ve Kuazi-Lineer kısmi diferansiyel denklemler ele alınıp incelendi ve çözüm yöntemleri öğrenildi. Birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri adi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri ile bağlantılıdır[1-5].

Aranan fonksiyonun kendisinin ve türevlerinin dâhil olduğu denkleme diferansiyel denklem denir.

Aranan fonksiyon iki veya daha çok serbest değişkene bağlı olduğunda, bu fonksiyonun kendisinin ve kısmi türevlerinin dâhil olduğu denkleme kısmi diferansiyel denklem denir[4,5].

Böylece $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun ve bu fonksiyonun,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}.\partial x_2^{k_2} \dots .\partial x_n^{k_n}}, (k = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$$

kısmi türevlerinin dahil olduğu denkleme aranan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun kısmi diferansiyel denklemi denir. Burada $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ olarak alınmıştır.

Kısmi diferansiyel denklem genel olarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$F\left(x_1, x_2 \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}.\partial x_2^{k_2} \dots .\partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \ . \quad (1.1)$$

Bu denklemdeki F fonksiyonu gösterilen argümentlere bağlı verilmiş (belli) fonksiyondur.

Aranan u fonksiyonunun diferansiyel denklemin içerdiği en yüksek mertebeli türevinin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir[4,5].

Buna göre birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklem genel şekilde aşağıdaki gibi yazılır[4,5]:

$$F\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \ . \tag{1.2}$$

İki bağımsız x ve y değişkenlerine bağlı birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklem genel şekilde uygun olarak

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.3}$$

şeklinde yazılır.

Aranan fonksiyonu ve bu fonksiyonun gereken kısmi türevlerini verilmiş diferansiyel denklemde yerine yazdığımızda, denklemi sağlayan u fonksiyonuna kısmi diferansiyel denklemin çözümü denir[4,5].

Birçok fiziksel olaylar kısmi diferansiyel denklemle ifade olunur.

Örneğin,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z) \tag{1.4}$$

denklemi kırılma indisi $n(x, y, z)$ olan homojen olmayan ortamda ışık ışınlarının yayımlanması denklemidir. Aşağıdaki

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

denklemi patlamanın darbe dalgasının denklemidir.

Örnek:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

birinci mertebeli diferansiyel denklemini sağlayan $z = z(x, y)$ fonksiyonunu bulalım. Bu amaçla verilmiş denklemin her yanını x değişkenine nazaran integrallediğimizde,

$$z(x, y) = x + \varphi(y)$$

çözümünü buluruz. Burada $\varphi(y)$ fonksiyonu y değişkenine bağlı keyfi fonksiyondur. Burada $z(x, y)$ fonksiyonu için bulduğumuz bu ifade verilmiş denklemin genel çözümü olur.

Burada ele aldığımız bu örnekten şöyle bir sonuca varmış oluyoruz. Birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümü bir keyfi fonksiyona bağlı olur.

Burada birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerde Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için Sofiya Vasilyevna Kovalevskayanın teoremini verelim [2],[3]:

1.2 Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözümünün Varlığı Hakkında Kovalevskaya Teoremi

Aşağıdaki birinci mertebeli kısmi

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, u(x_1, x_2 \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{1.6}$$

diferansiyel denkleminin,

$$u|_{x_1 = x_{1_0}} = \varphi_0(x_2, x_3 \ldots, x_n) \tag{1.7}$$

başlangıç şartını sağlayan başlangıç değer probleminde (Cauchy Probleminde) $\varphi_0(x_2, x_3 \ldots, x_n)$ fonksiyonu başlangıç $x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0}$ noktasının bir yakın komşuluğunda analitik fonksiyon olduğunda ve (1.6) denkleminin sağ yanındaki

$$f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, u(x_1, x_2 \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

fonksiyonu ise kendi argümentlerinin, uygun olarak

$$x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0},$$

$$u_0 = \varphi_0(x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_0 = \varphi^1_{0x_2}(x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0}), \ldots, \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_n}(x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0})$$

noktasının bir komşuluğunda analitik fonksiyon olduğunda (1.6) denkleminin (1.7) başlangıç şartını sağlayan

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

çözümü vardır ve tekdir. Bu çözüm

$$(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0} \ldots, x_{n_0})$$

noktasının küçük bir komşuluğunda analitik fonksiyon olur. Bu teoremin ispatı analitik fonksiyonlar teorisinin sonuçlarına dayanılarak ispatlanır[1].

Bu teoremden de görülür ki, birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü bir keyfi φ_0 fonksiyonuna bağlıdır.

2. BİRİNCİ MERTEBELİ LİNEER VE KUAZİ-LİNEER DENKLEMLER VE ONLARIN SINIFLANDIRILMASI

2.1 Birinci Mertebeli Kuazi-Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Kısmi diferansiyel denklemlerde aranan $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun kısmi türevlerine nazaran lineer olan kısmi diferansiyel denklemlere Kuazi-Lineer denklem denir. Mesela,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n}$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemi birinci mertebeli kısmi türevli Kuazi-Lineer homojen olmayan diferansiyel denklemdir.

Bu (2.1) denkleminde $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \equiv 0$ olduğunda alınan,

$$f_1(x_1, x_2 \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2 \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2 \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.2}$$

denklemine (2.1) denklemine uygun birinci mertebeli Kuazi-Lineer homojen kısmi diferansiyel denklem denir.

İki x ve y serbest değişkenlerine bağlı Kuazi-Lineer kısmi homojen olmayan ve homojen birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemleri uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$P(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \quad , \tag{2.3}$$

$$P(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \tag{2.4}$$

Bu (2.1) ve (2.2) denklemlerinde iştirak eden $f_i(x_1, x_2 \dots, x_n, u)\,, (i = 1,2, \dots n)$ ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ fonksiyonları belli bir Ω bölgesinde tanımlanarak verilmiş fonksiyonlardır. (2.3) ve (2.4) denklemlerinde ki,

$$P(x, y, u)\,,\, Q(x, y, u)\,,\, R(x, y, u)$$

fonksiyonları da uygun olarak bir G bölgesinde tanımlanarak verilmiş fonksiyonlar oldukları varsayılır.

2.2 Birinci Mertebeli Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Aşağıdaki,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \tag{2.5}$$

şeklindeki birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemine homojen olmayan birinci mertebeli lineer kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Bu denklemde $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ katsayılarının tümünün aynı bir kümede sıfıra dönüşmediği varsayılır. (2.5) denkleminin sağ yanındaki fonksiyonun

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$$

şeklinde sıfıra eşit alınmasıyla oluşan,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.6}$$

denklemine, (2.5) denklemine uygun homojen birinci mertebeli lineer kısmi diferansiyel denklem denir [2-5].

İki x ve y serbest değişkenlerine bağlı birinci mertebeli homojen olmayan lineer kısmi diferansiyel denklem, aşağıdaki şekilde yazılır.

$$P(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \tag{2.7}$$

Bu (2.7) denklemine uygun homojen lineer denklem ise şu şekilde yazılır.

$$P(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

3. ÖN BİLGİLER

3.1 Alan Teorisinin Elemanları

3.1.1. Skaler Ve Vektörel Alan

Ele aldığımız uzayda veya uzayın bir V kısmında fiziksel özelliğe sahip bir U nesnesinin tanımlanmış olduğunu varsayalım. Yani V bölgesinin her bir noktasında U nesnesinin belli bir değerinin verildiğini varsayalım. Bu durumda V bölgesine U nesnesinin alanı denir. Alanda ele alınıp incelenen nesne, skaler değerli nesne olduğunda, bu alana skaler alan, vektörel değerli olduğunda ise vektörel alan denir.

Skaler alana bir örnek olarak, ısıtılmış V hacimli bir cisim ve onun sıcaklığını gösteren fonksiyon ise U olduğunda, bu durumda V skaler alan olur.

Her bir alan bu alanda incelenen nesnenin adı ile adlandırılır. Mesela V hacimli ısıtılmış cismin sıcaklığını gösteren fonksiyon U olduğunda, V bölgesine U sıcaklıklar alanı denir. Ancak V bölgesinde incelenen nesne basınç olduğunda ise V bölgesine U basınçlar alanı denir. Sıcaklık ve basınç skaler nesneler olmasından dolayı bu fonksiyonların doğurduğu alanlar skaler alanlardır.

Şimdi de vektörel alana ait bir örnek gösterelim.

Varsayalım ki kütlesi m olan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ maddesel noktası, belli bir çekim kuvvetine sahiptir. Genelliği bozmadan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının koordinat başlangıcında yerleştirilmiş olduğunu varsayalım. Bu durumda uzayın birim kütleli keyfi bir $M(x, y, z)$ noktasını alalım. O zaman bu $M(x, y, z)$ noktası koordinat başlangıcına doğru

$$\vec{F} = \gamma.\frac{m.1}{r^2}$$

formüllü $\vec{F}$ kuvveti ile çekime maruz kalacaktır. Burada $\gamma > 0$ sayısı gravitasyon sabiti ($\gamma = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), r ise koordinat başlangıcından $M(x, y, z)$ noktasına kadar olan uzaklıktır (Bakınız Şekil.3-1).

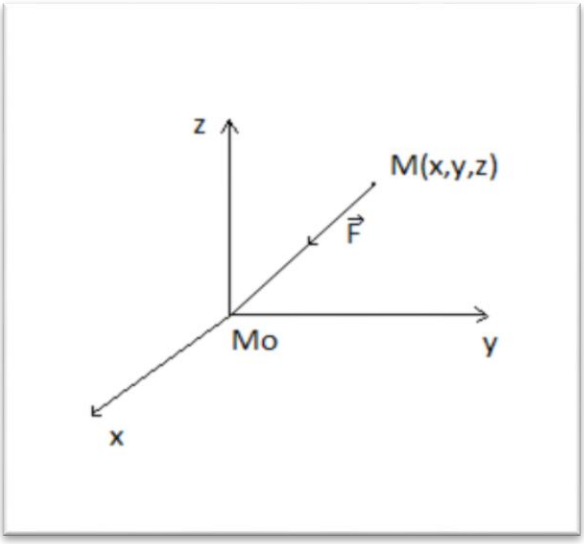
Bu örnekte uzayda bir vektörel alan tanımlanmış olur.

Skaler ve vektörel alan zamana bağlı olmadığında bu alana stasionar alan, aksi halde, yani zamana bağlı olduğunda uygun alana stasionar olmayan alan denir.

Stasionar ve skaler alan analitik olarak,

$$U = f(M) = f(x, y, z)$$

şeklinde gösterilebilir.



Şekil 0-1 Üç Boyutlu Uzayda Kütlelerin Cezbi

Şimdi stasionar ve ya vektörel alanın verildiğini varsayalım. Bu alanın vektör fonksiyonu $\vec{U}(x, y, z)$ olsun. $\vec{U}$ vektörünü OX, OY ve OZ eksenleri üzerine projeksiyonları uygun olarak U_x, U_y ve U_z olduğunda $\vec{U}$ vektör alanını,

$$\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu açılımdaki $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ ve $\vec{k}$ vektörleri uygun olarak OX, OY ve OZ eksenlerinin pozitif yönünde yönlendirilmiş birim vektörlerdir.

Şimdi $U = f(M)$ skaler alanın verildiğini varsayalım. Bu alanın $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasını alalım ve bu noktanın değişmez olduğunu kabul edelim. U fonksiyonun M_0

noktasındaki değerini U_o ile gösterelim. Ele aldığımız $U = f(M)$ alanın U_o değerine uygun tüm noktalar kümesi uzayda bir yüzey oluşturur. Dekart (kartezyen) koordinat sisteminde bu yüzeyin denklemi,

$$U(x, y, z) = c \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir. (3.1) denklemindeki c sabitini değiştirdiğimizde biz yüzeyler ailesini almış oluruz. Böyle yüzeylere skaler alanın seviye yüzeyleri denir.

3.1.2. Seviye Yüzeyi

Skaler fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların kümesine bu fonksiyonun tanımladığı skaler alanın seviye yüzeyi de denir. Özel halde, düzlem şekilli bölgelerde seviye yüzeylerinin denklemi,

$$U(x, y) = c \tag{3.1'}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi biz vektör alanın vektör hatlarını tanımlayalım. Varsayalım ki, uzayın bir V bölgesinde $\vec{U} = \vec{U}(M)$ vektör fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu o demektir ki, V bölgesinin her bir noktasında $\vec{U}$ vektör fonksiyonunun belirli bir değeri ve belirli bir yönü verilmiştir. Bu yöntemle uzayın V bölgesinde vektörel alan tanımlanmış olur. $\vec{U}$ vektör fonksiyonunun koordinat eksenleri üzerine projeksiyonlarını,

$$U_x = U_x(x, y, z),$$

$$U_y = U_y(x, y, z),$$

$$U_z = U_z(x, y, z),$$

gibi gösterelim. O zaman verilmiş vektör alanını,

$$\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$$

gibi yazabiliriz. Vektör alanını, geometrik olarak göstermek için vektör hatlarını kullanırlar.

3.1.3. Vektör Hattı

Her bir noktasında teğetinin yönü bu noktadaki alan vektörünün yönü ile çakışan hatta, vektör alanın vektör hattı denir.

M noktasından geçen vektör hattının denkleminin parametrik şeklide verildiğini varsayalım. Mesela,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

denklemleri ile verilsin. Burada t parametredir ve t-nin belli bir $[t_0, t_1]$ aralığında değiştiği varsayılır. Bu aralık genel olarak $[0,1]$ şeklinde alınır. Özel halde zamanı gösterebilir. Şayet t parametresi zaman olarak alınırsa M noktasının hız vektörü,

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dy}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

şeklinde olur. Vektör hatlarının tanımına esasen hız vektörü ile vektör hattının tüm noktalarında yönlerinin aynı olmaları gerekir. O zaman alan vektörünü,

$$\vec{U} = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}$$

şeklinde gösterirsek, aşağıdaki bağlantıyı buluruz:

$$U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Bu eşitliği kullanarak,

$$U_x = \frac{dx}{dt}, \quad U_y = \frac{dy}{dt}, \quad U_z = \frac{dz}{dt}$$

veya

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z} = dt \tag{3.2}$$

eşitliklerini buluruz. Buradaki

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z} \tag{3.3}$$

adi türevli diferansiyel denklemler sistemine vektör hatları ailesinin diferansiyel denklemi denir. (3.3) sisteminin genel çözümleri sistemi,

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

olur. (3.4) sistemi vektör hatlarının denklemidir. (3.4) te c_1 ve c_2 keyfi sabitlerinin farklı-farklı değerlerinde farklı-farklı vektör hatlarının denklemi alınır.

Alanı oluşturan vektör fonksiyonun projeksiyonları sabit sayılar olduğunda bu vektörel alana homojen vektörel alan denir. Şimdi,

$$\vec{U} = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}$$

vektör alanın homojen vektör alan olduğunu varsayalım.

Demek ki, bu vektör alan için,

$$\begin{gathered} U_x = \text{const}, \\ U_y = \text{const}, \\ U_z = \text{const} \end{gathered}$$

olur. O zaman biz (3.2) bağlantısından,

$$\begin{cases} dx = U_x dt, \\ dy = U_y dt, \\ dz = U_z dt \end{cases}$$

eşitliklerini buluruz. Bu denklemleri çözerek,

$$\begin{cases} x = U_x t + a_0, \\ y = U_y t + b_0, \\ z = U_z t + c_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

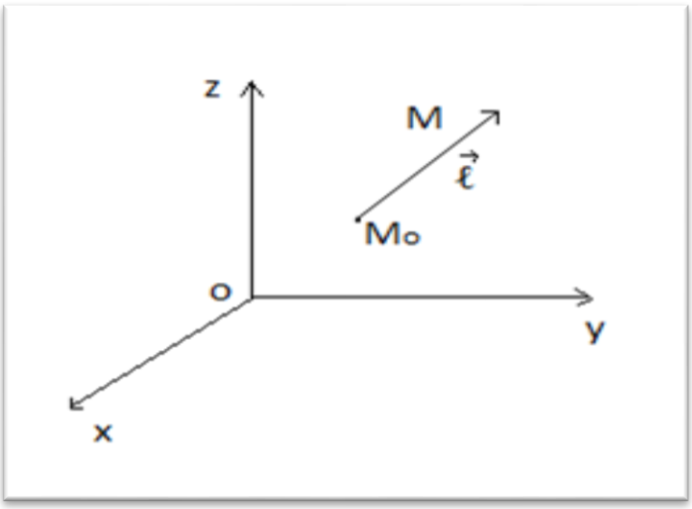
bağlantılarını buluruz. Bu (3.5) bağlantılarını

$$\frac{x - a_0}{U_x} = \frac{y - b_0}{U_y} = \frac{z - c_0}{U_z} \tag{3.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu (3.6) eşitlikleri $A_0(a_0, b_0, c_0)$ noktasından geçen ve $\vec{U}$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemidir.

3.1.4. Yöne Göre Türev

Üç boyutlu (x, y, z) uzayının bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasını ve bu noktadan geçen $\vec{\ell}$ vektörünü ele alalım (Bakınız Şekil.3-2).



Şekil 0-2 Üç Boyutlu Uzayda Yön Vektörünün Gösterilmesi

Burada ele aldığımız $\vec{\ell}$ vektörünün yöneltici kosinüslerini cosα, cosβ, cosγ ile gösterelim. $\vec{\ell}$ vektörü üzerinde $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından farklı bir $M(x, y, z)$ noktasını alalım. $U(x, y, z) = U$ fonksiyonunun M_0 ve M noktalarının dâhil olduğu V bölgesinde tanımlanmış, diferansiyellenen fonksiyon olduğunu varsayalım. M_0 noktasından M noktasına kadar olan uzaklığı M_0M ile gösterelim ve aşağıdaki orantıyı inşa edelim:

$$\frac{U(M) - U(M_0)}{M_0\,M} \; . \tag{3.7}$$

M noktası M_0 noktasına yakınsadığında (3.7) orantısının limiti bulunabilir. Bu limite $U(M)$ fonksiyonunun M_0 noktasında, $\vec{\ell}$ yönünde ($\vec{\ell}$ yönü üzere) türevi denir.

Bu türev $\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0}$ gibi gösterilir. Böylece, $\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0}$ türevinin değeri

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{M_0\, M}$$

şeklinde bulunur. Burada biz aşağıdaki,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_0} \cos\alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_0} \cos\beta + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{M_0} \cos\gamma \tag{3.8}$$

formülünün doğruluğunu ispatlayalım.

Bu amaçla $M_0\, M = t$ gibi gösterelim. O zaman,

$$x - x_0 = t\ \cos\alpha\,,$$
$$y - y_0 = t\ \cos\beta\,,$$
$$z - z_0 = t\ \cos\gamma$$

ve ya,

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ \cos\alpha\,, \\ y = y_0 + t\ \cos\beta\,, \\ z = z_0 + t\ \cos\gamma \end{cases} \tag{3.9}$$

eşitliklerini buluruz.

Burada (3.9) eşitliklerini $U(x,y,z) = U$ fonksiyonunda uygun olarak x,y,z değişkenlerinin yerlerine yazarak t değişkenine bağlı aşağıdaki fonksiyonu buluruz:

$$U(M) = U(x,y,z) = U(x_0 + t\ \cos\alpha,\ \ y_0 + t\ \cos\beta\ ,\ \ z_0 + t\ \cos\gamma) = F(t)\,.$$

Bu eşitlikten

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = F(0)$$

eşitliğini buluruz. Bu yüzden de,

$$\frac{U(M) - U(M_0)}{M_0M} = \frac{F(t) - F(0)}{t} \tag{3.10}$$

eşitliği bulunur.

Buradan da aşağıdaki formül bulunur.

$$F'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}\,. \tag{3.11}$$

Demek ki $F'(0)$ ifadesi, aşağıdaki

$$\lim_{M \to M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{M_0\, M} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0)$$

formülü ile hesaplanabilir.

Buradan da aşağıdaki,

$$\left(\left. \frac{\partial U}{\partial \ell} \right|_{M_0} \right) = F'(0)$$

formülünü buluruz. Böylece (3.9) eşitliklerinden, aşağıdaki

$$\frac{dx}{dt} = \cos \alpha \;, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos \beta \;, \qquad \frac{dz}{dt} = \cos \gamma$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikleri (3.11) eşitliğinde kullanarak aşağıdaki formülü buluruz:

$$F'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Burada,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U'_x(x_0 + t \,.\, \cos \alpha \;, y_0 + t \,.\, \cos \beta \;, z_0 + t \,.\, \cos \gamma)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = U'_y(x_0 + t\,.\cos\alpha\ , y_0 + t\,.\cos\beta\ , z_0 + t\,.\cos\gamma)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = U'_z(x_0 + t\,.\cos\alpha\ , y_0 + t\,.\cos\beta\ , z_0 + t\,.\cos\gamma)$$

olmasından dolayı,

$$F'(0) = U'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + U'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + U'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

eşitliğini buluruz. Böylece (3.8) formülü ispatlanmış oldu.

Özel halde $\vec{\ell}$ vektörü OX ekseni yönünde olduğunda,

$$\alpha = 0\ \ ,\ \ \beta = \frac{\pi}{2}\ \ ,\ \ \gamma = \frac{\pi}{2}$$

olur ve bu hal için aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

3.2 Alanın Gradiyenti

3.2.1. Alanın Gradiyentinin Tanımı

Burada skaler $U(x, y, z)$ alanının verilmiş olduğunu varsayalım. $U(x, y, z)$ fonksiyonunun alanın M_0 noktasında $\vec{\ell} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ yönü üzere türevi,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_0}\cos\alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_0}\cos\beta + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{M_0}\cos\gamma \qquad (3.12)$$

formülü ile bulunur. Burada,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2_{M_0} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2_{M_0} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2_{M_0} \neq 0$$

şartını sağladığını varsayalım. $\vec{\ell}$ vektörünün yönlendirici kosinüsleri aşağıdaki formülerle bulunur:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\vec{\ell}|}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{|\vec{\ell}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{|\vec{\ell}|}. \tag{3.13}$$

(3.13) ifadelerini (3.12) açılımında dikkate alarak (3.12) formülünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = \frac{1}{|\vec{\ell}|}\left(\frac{\partial U}{\partial x}a + \frac{\partial U}{\partial y}b + \frac{\partial U}{\partial z}c\right)_{M_0}. \tag{3.14}$$

Şimdi aşağıdaki eşitliği kabul edelim:

$$\vec{g} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\ .$$

O zaman,

$$\frac{\partial U}{\partial x}a + \frac{\partial U}{\partial y}b + \frac{\partial U}{\partial z}c$$

ifadesi $\vec{\ell}$ vektörü ile $\vec{g}$ vektörünün skaler çarpımı olur. Yani,

$$(\vec{\ell}, \vec{g}) = \frac{\partial U}{\partial x}a + \frac{\partial U}{\partial y}b + \frac{\partial U}{\partial z}c$$

çıkar. Bu yüzden (3.14) formülünü,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = \frac{1}{|\vec{\ell}|}(\vec{\ell}, \vec{g})_{M_0} = |\vec{g}_{M_0}|\cos(\vec{\ell} \overset{\wedge}{,} \vec{g}) \tag{3.15}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sonuncu formülden görüyoruz ki,

$$\cos(\vec{\ell} \overset{\wedge}{,} \vec{g}) = 1$$

olduğunda $\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0}$ türevi en büyük değerini alır. U fonksiyonunun M_0 noktasında $\vec{\ell}$ yönündeki türevinin değeri,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0} = |\vec{g}|_{M_0} = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\right)_{M_0}$$

sayısına eşit olur.

$\vec{g}$ vektörüne U skaler fonksiyonunun Gradiyenti denir ve,

$$\vec{g} = \text{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

gibi gösterilir. Böylece, skaler U fonksiyonunun yön üzere $\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_{M_0}$ türevi gradU vektörü yönünde en büyük değerini alır. (1.15) formülü de aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \text{pr}_{\vec{\ell}}\,(\text{gradU}) \ . \qquad (3.16)$$

Şimdi biz U skaler fonksiyonunun Gradiyentinin M_o noktasından geçen seviye yüzeyine dik olduğunu, yani $(\text{gradU})_{M_0}$ vektörünün M_o noktasındaki seviye yüzeyinin normali yönünde olduğunu gösterelim.

Gerçekten de ele aldığımız alanın seviye yüzeyinin denklemi

$$U(x, y, z = c$$

şeklinde yazılır. M_o noktasında bu yüzeyin normalinin denklemi ise,

$$\frac{x - xo}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{y - yo}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{z - zo}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

şeklinde yazılır. Burada x, y, z, normalin keyfi M noktasının koordinatlarıdır.

Böylece,

$$\text{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

normalin yönünü gösteren vektördür.

Gradiyentin hesaplanmasında ise aşağıdaki formüller kullanılır.

$$\mathrm{grad}(U_1 \pm U_2) = \mathrm{grad}(U_1) \pm \mathrm{grad}(U_2)$$

$$\mathrm{grad}(U_1.U_2) = U_1\mathrm{grad}(U_2) + U_2\,\mathrm{grad}(U_1)$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \frac{U_2.\mathrm{grad}(U_1) - U_1.\mathrm{grad}(U_2)}{(U_2)^2}\;, \qquad U_2 \neq 0$$

$$F = [U(x,y,z)] \text{ olduğunda } \quad \mathrm{grad}\,F = F'_U\,.\mathrm{grad}U$$

3.2.2. Hamilton Operatörü

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

sembolüne Hamilton operatörü denir. Bu operatörlere Nabla-Operatör de denir. Ve $\vec{\nabla}$ gibi gösterilir.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,.$$

Alan teorisinde Hamilton operatörü çok kullanılır. $\vec{\nabla}$-operatörü ile skaler U fonksiyonuna etki ettiğimizde U fonksiyonunun Gradiyenti alınır. Yani,

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}U$$

şeklinde olur.

Burada $\vec{\nabla}$ vektörü ile $\vec{U}$ vektörünün skaler çarpımını ele alalım.

$$\vec{U} = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}$$

ve

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

olduğundan,

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{U}\right) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

olur.

Burada ki,

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

ifadesine $\vec{U}$ vektörünün diverjansı denir. Ve div $\vec{U}$ gibi gösterilir.

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \ .$$

Şimdi $\vec{\nabla}$ vektörünün $\vec{U}$ vektörüne vektörel çarpımını ele alalım.

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{U}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Bu eşitlikle tanımlanan vektöre $\vec{U}$ vektörel alanın Burulganı veya rotoru denir. $\operatorname{rot} U$ gibi gösterilir. Böylece,

$$\operatorname{rot} \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

determinantı ile bulunur.

4. İKİ DEĞİŞKENE BAĞLI BİRİNCİ MERTEBELİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1 İki Değişkene Bağlı Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Kuazi-Lineer Diferansiyel Denklemlerin Geometrik Yorumu Ve Çözüm Yöntemleri

İki x ve y serbest değişkenlerine bağlı birinci mertebeli kısmi türevli Kuazi-Lineer diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılır [2]:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)\,. \tag{4.1}$$

Bu denklemde $z = z(x,y)$ aranan fonksiyondur. P, Q, R fonksiyonlarının argümentlerinin değişme bölgesinde sürekli fonksiyonlar olduklarını ve bu fonksiyonların üçünün de aynı tanım bölgesinde sıfıra eşit olmadığını varsayarız. Yani,

$$P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$$

şartının sağlandığını varsayarız.

Şimdi burada (4.1) denklemine uygun olarak sürekli

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \tag{4.2}$$

vektör alanını ele alalım. Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektörleri uygun olarak OX, OY, OZ koordinat eksenlerinin yönlendirici birim vektörleridir. Yani,

$$\vec{i} = (1,0,0)\ , \qquad \vec{j} = (0,1,0)\ , \quad \vec{k} = (0,0,1) \tag{4.3}$$

vektörleridir.

Her bir noktasında teğetinin yönü $\vec{F}$ alan vektörünün yönü ile çakışan eğrilere $\vec{F}$ vektör alanının vektör eğrileri denir.

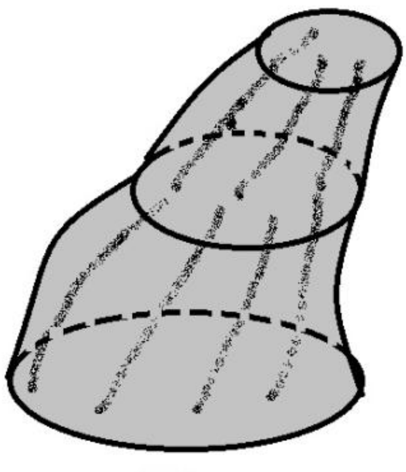
$\vec{F}$ alanının vektör eğrileri bu eğrilerin teğeti yönünde yönlendirilmiş,

$$\vec{t} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \tag{4.4}$$

vektörü ile $\vec{F}$ alan vektörünün kollenyar (aynı doğru veya paralel doğrular üzerinde yerleşen vektörler- kolineer) şartından bulunur. (4.4) vektörü ile (4.2) alan vektörünün kollenyarlık (kolineerlik) şartı aşağıdaki eşitliklerle yazılır:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \ . \tag{*}$$

Alanın vektör eğrilerinden oluşan yüzeye vektör yüzeyleri denir. Vektör yüzeyle en azından bir ortak noktası olan vektör eğrisi tam olarak vektör yüzey üzerinde yerleşir. Bu vektör yüzeyin en esas özelliğidir (Bakınız Şekil.4-1).



Şekil 0-1 Alanın Vektör Eğrilerinden Oluşan Vektör Yüzeyleri

Vektör yüzeyinin esas özelliği ondadır ki, bu yüzeyin her bir normali yönünde yönlendirilmiş her bir $\vec{N}$ vektörü ile alanın $\vec{F}$ vektörü birbirine dik olur. Yani $\vec{N}$ vektörü ile $\vec{F}$ vektörünün skaler çarpımı her bir yüzey noktasında sıfıra eşit olur. Yani

$$(\vec{N}, \vec{F}) = 0 \tag{4.5}$$

şartı sağlanır.

Şimdi alan vektör yüzeyinin,

$$z = f(x, y) \tag{4.6}$$

denklemi ile tanımlandığını varsayalım.

O zaman denklemi (4.6) denklemi ile yazılan yüzey için $\vec{N}$ vektörü,

$$\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} - \vec{k} \tag{4.7}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu yüzden de (4.5) şartı aşağıdaki şekli alır:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \tag{4.8}$$

Şimdi varsayalım ki vektör yüzeyinin denklemi,

$$u(x, y, z) = 0 \tag{4.9}$$

şeklinde yazılsın.

O zaman vektör yüzeyinin her bir noktasındaki normal vektörü yönündeki $\vec{N}$ vektörü,

$$\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \tag{4.10}$$

şeklinde bulunur. (4.10) formülü ile bulunan vektör için (4.5) şartı,

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{4.11}$$

şeklini alır. Böylece vektör alanındaki vektör yüzeyini bulmak için ya (4.8) şeklindeki Kuazi-Lineer denklemi ya da (4.11) şeklindeki lineer homojen denklemi integrallememiz gerekir. Burada (4.8) denklemini integrallersek vektör yüzeyinin denklemi olan (4.6),

$$z = f(x, y)$$

aşikar (apaçık) bir şekilde bulunur. Ama (4.11) denklemini integrallersek vektör yüzeyinin denklemi olan (4.9),

$$u(x, y, z) = 0$$

gayri aşikar (kapalı) şekilde bulmuş oluruz.

Vektör yüzey, vektör eğrilerden oluştuğundan (4.8) ve ya (4.11) denklemlerinin integrallenmesi adi türevli diferansiyel denklemler sisteminin integrallenmesine getirilmiş olur.

Böylece vektör hatlarının denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \ . \tag{4.12}$$

Bu (4.12) denkleminde $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ ve $R(x, y, z)$ fonksiyonlarından herhangi biri sıfırdan farklı olduğunda (4.12) denklemini, adi türevli sistem diferansiyel denkleme getirebiliriz.

Mesela, bu fonksiyonlardan $P(x, y, z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu şartlarda (4.12) denklemi,

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)} \end{cases} \tag{4.13}$$

sistemi şeklinde yazabiliriz. Böylece Kuazi-Lineer

$$P(x,y,z)\frac{dz}{dx} + Q(x,y,z)\frac{dz}{dy} = R(x,y,z)$$

(4.8) denkleminin keyfi Φ fonksiyonuna bağlı olan integralini bulmak için yardımcı

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

(4.12) sisteminin bağlı olmayan (biri birine bağlı olmayan) iki tane

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = c_2$$

integrallerini bulmamız gerekir. Burada $c_1\ ve\ c_2$ keyfi sabit sayılardır. O zaman Φ keyfi fonksiyon olmak üzere (4.8) denkleminin aranan integrali

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, z)\,, \varphi_2(x, y, z)\big) = 0$$

şeklinde bulunur.

(4.8) Kuazi-Lineer denkleminin

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

eşitlikleri ile bulunan eğriden geçen integralini,

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0\,, \\ \varphi_1(x, y, z) = c_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \tag{4.15}$$

sisteminden x,y,z değişkenlerini yok etmekle

$$\Phi(c_1\,, c_2) = 0$$

eşitliğinin bulunması gerekir. O zaman (4.8) Kuazi-Lineer denkleminin (4.14) sisteminin belirlediği eğriden geçen integral yüzeyi,

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, z)\,, \varphi_2(x, y, z)\big) = 0$$

şeklinde bulunur.

4.2 İki Değişkene Bağlı Lineer Ve Kuazi-Lineer Diferansiyel Denklemlerin Çözümüne Ait Örnekler

Örnek.4.1:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

denkleminin keyfi fonksiyona bağlı integralini bulalım.

Şimdi bu amaçla verilmiş denklem için yardımcı denklemi inşa edelim.

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}$$

bu sisteme uygun olarak,

$$\begin{cases} dx = dy \\ dz = dx \end{cases}$$

sistemini yazalım. Bu sistemi çözerek birbiriyle bağımsız

$$\begin{cases} x - y = c_1 \\ z - x = c_2 \end{cases}$$

integrallerini buluruz. Keyfi Φ fonksiyonuna bağlı çözümü ise,

$$\Phi(x-y, z-x)=0$$

şeklinde bulunur. Ama z değişkenine nazaran yapılmış çözüm

$$z = x + \varphi(x-y)$$

şeklinde buluruz. Burada φ fonksiyonu keyfi diferansiyellenen bir fonksiyondur.

Örnek.4.2:

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

denkleminin

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$$

eğrisinden geçen integral yüzeyini bulalım.

Bu amaçla verilmiş denklemin yardımcı denklemini yazalım.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

Burada,

$$\begin{cases} dz = 0 \\ xdx = -ydy \end{cases}$$

sistemini çözerek

$$\begin{cases} z = c_1 \\ x^2 + y^2 = c_2 \end{cases}$$

bağımsız integrallerini buluruz. x, y, z değişkenlerini,

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \\ x^2 + y^2 = c_2 \\ z = c_1 \end{cases}$$

sisteminden yok ederek $c_1 = c_2$ olduğunu buluruz. Burada ele aldığımız problemin çözümünü,

$$z = x^2 + y^2$$

şeklinde buluruz.

Örnek.4.3:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

denkleminin genel integralini bulalım.

Bu denklemin yardımcı denklem sistemi ise,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

sistemini ele alıp çözersek aşağıdaki bağımsız integrallerini bulmuş oluruz.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = c_1 \\ \dfrac{z}{x} = c_2 \end{cases}$$

Bu yüzden verilen denklemin genel integrali,

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

şeklinde bulunur. Burada Φ keyfi fonksiyondur. z değişkenine nazaran çözülmüş integral

$$z = x.\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada ψ fonksiyonu keyfi diferansiyellenen fonksiyondur.

Örnek.4.4:

Burada örnek-2 deki,

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

denkleminin

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \tag{4.16}$$

çemberinden geçen integral yüzeyini bulalım.

Burada (4.16) eğrisi, vektör eğrisi (karakteristik eğri) olduğundan ele aldığımız belirli bir problem değildir. Bu problemin çözümü tek olmadığından problem korrekt (çözümü var, tek ve diferansiyel denklem sınır şartlarında verilenlere sürekli bağlı) değildir.

Gerçekten de ele aldığımız denklemin integral yüzeyi tüm

$$z = \Phi(x^2 + y^2)$$

şekilli dönme yüzeyleridir. Bu dönme yüzeylerinin dönme ekseni OZ koordinat ekseni ile çakışır. (4.16) çemberinden geçen sonsuz sayıda böyle dönme yüzeyleri bulunur.

Mesela,

$$z = x^2 + y^2 - 3,$$

$$4z = x^2 + y^2,$$

$$z = -x^2 - y^2 + 5$$

dönme paraboloidleri (4.16) çemberinden geçen paraboloidlerdir.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

küresi de, (4.16) çemberinden geçen küredir. Bu yüzden ele aldığımız bu problem korrekt problem değildir.

Örnek.4.5:

$$(x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Ele aldığımız bu denklemin yardımcı denklemi

$$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}$$

şeklinde yazılır. Bu orantıların pay ve paydalarını taraf tarafa toplayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dy}{-y}$$

bu eşitliğin her iki tarafını integrallersek

$$\ln|x+y| = -\ln|y| + \ln|c|$$

veya

$$(x+y)y = c_1$$

birinci integralini buluruz. Zaten $dz = 0$ dan $z = c_2$ idi. Böylece ele aldığımız denklemin genel çözümü

$$z = \Phi\big((x+y)y\big)$$

şeklinde bulunur. Burada Φ keyfi diferansiyellenen fonksiyondur.

Örnek.4.6:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Bu denklemin yardımcı denklemi şu şekilde olacaktır:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2y+z} \ .$$

Bu sistemin integrallerini bulmak için, birinci orantının pay ve paydasını 2xy ifadesi ile çarpıp sonra ikinci orantının pay ve paydasını x^2 ifadesiyle çarpıp çıkan orantıları toplayarak sonra üçüncü orantının 3 katını toplamlardan çıkarırsak sonuç olarak karşımıza

$$\frac{2xydx + x^2dy - 3dz}{4x^2y - 3x^2y - 3z} = \frac{d(x^2y - 3z)}{x^2y - 3z}$$

eşitliği çıkar. O halde yardımcı denklemin

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} \\ \dfrac{d(x^2y - 3z)}{x^2y - 3z} = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$$

denklem sistemini buluruz. Bu sistemi çözersek aşağıdaki bağımsız integralleri elde ederiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = c_1 \,, \\ \dfrac{x^2y - 3z}{x} = c_2 \;. \end{cases}$$

Böylece ele aldığımız kısmi türevli diferansiyel denklemin her bir çözümü

$$\Phi(c_1, c_2) = 0$$

eşitliğinden,

$$\Phi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{x^2y - 3z}{x}\right) = 0$$

denkleminden gayri-aşikar (kapalı) şekilde tanımlanır. Burada Φ keyfi diferansiyellenen fonksiyondur. Gayri-aşikar fonksiyonun özelliğine dayanarak,

$$\Phi\left(\frac{x^2}{y}, \; \frac{x^2y - 3z}{x}\right) = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{x^2y-3z}{x}=\varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

eşitliğini buluruz. Burada φ keyfi sürekli diferansiyellenen fonksiyondur. Sonuncu eşitlikten

$$z=\frac{x^2y}{3}-\frac{x}{3}\varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

bulunur. Bir daha dikkate alalım ki, burada $\varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$ fonksiyonu keyfi sürekli diferansiyellenen fonksiyondur.

Örnek.4.7:

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+z^2y\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. Bu denklemin yardımcı denklemi

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z^2y}$$

şeklinde yazılır. Aşağıda ki

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{2xy}=\dfrac{dy}{x}\,,\\ \dfrac{dx}{2xy}=\dfrac{dz}{z^2y}\end{cases}$$

denklem sistemini çözersek,

$$\begin{cases}x-y^2=c_1,\\ \ln x+\dfrac{2}{z}=c_2\end{cases}$$

bağımsız integrallerini buluruz.

Bu yüzden,

$$u = \varphi\left(x - y^2,\ \ \ln x + \frac{2}{z}\right)$$

verilmiş denklemin genel çözümü olur. Burada φ keyfi sürekli diferansiyellenen fonksiyondur.

Örnek.4.8:

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denkleminin genel integralini bulalım.

Verilen denklemin yardımcı denklemini yazalım.

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{0}.$$

Öncelikle

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

eşitliğini ele alalım. Orantıların özelliklerini kullanarak sonuncu eşitliği aşağıdaki,

$$\frac{dx + dy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{dx - dy}{x^2 + y^2 - 2xy}$$

veya

$$\frac{d(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{d(x - y)}{(x - y)^2}$$

şekilde yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki yanını integrallersek

$$-\frac{1}{x + y} = -\frac{1}{x - y} + c$$

$$\frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} = c$$

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} = c$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliği

$$\frac{y}{x^2 - y^2} = c_1$$

şeklinde de yazabiliriz.

İkinci denklemden $dz = 0$ alırız.

Buradan da $z = c_2$ integralini buluruz.

Bu yüzden verilen denklemin genel integrali

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}, z\right) = 0$$

ve ya

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$$

olur. Burada Φ ve φ fonksiyonları sürekli diferansiyellenen fonksiyonlardır.

Örnek.4.9:

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$$

denkleminin

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

çemberinden geçen vektör yüzeyini(çözümünü) bulalım.

Verilmiş denklemin yardımcı denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{2xy}.$$

Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} \ , \\ \dfrac{dx}{yz} = -\dfrac{dz}{2xy} \ \ . \end{cases}$$

Bu sistemin birinci

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}$$

denkleminden

$$xdx = ydy$$

denklemini buluruz ve bu denklemi çözerek,

$$x^2 - y^2 = c_1$$

birinci integralini buluruz. Sistemin ikinci

$$\frac{dx}{yz} = -\frac{dz}{2xy}$$

denkleminden

$$2xdx = -zdz$$

denklemini buluruz. Bu sonuncu denklemi çözerek

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = c_2$$

birinci integralini buluruz. Böylece, verilmiş denklemin genel integralini

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \psi(x^2 - y^2) \qquad (**)$$

şeklinde buluruz. Burada ψ fonksiyonu sürekli diferansiyellenen keyfi fonksiyondur.

(**) denklemi ile(formülü ile) tanımlanan yüzeylerden

$$z = 3$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

çemberinden geçen yüzeyi seçelim. (**) eşitliğindeki ψ fonksiyonunu seçmek için (**) eşitliğinde

$$z = 3$$

$$x^2 = 16 - y^2$$

alalım. O zaman

$$16 - y^2 + \frac{9}{2} = \psi(16 - 2y^2)$$

eşitliğini buluruz. Burada

$$16 - 2y^2 = t$$

alalım. O zaman

$$y^2 = 8 - \frac{t}{2}$$

olur. Böylece,

$$\psi(t) = \frac{t + 25}{2}$$

eşitliğini buluruz. Buradan da

$$\psi(x^2 - y^2) = \frac{x^2 - y^2 + 25}{2}$$

eşitliğini buluruz. ψ fonksiyonu için bu ifadeyi (**) formülünde dikkate alarak buluruz ki:

$$\left(x^2+\frac{z^2}{2}\right)=\frac{x^2-y^2+25}{2}$$

veya

$$x^2+y^2+z^2=25$$

Böylece, verilmiş denklemin $z=3$ ve $x^2=16-y^2$ çemberinden geçen çözüm(vektör yüzey) merkezi koordinat başlangıcında yarıçapı $r=5$ olan küredir.

Açıklama: Burada

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+\ Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \tag{4.8}$$

şeklinde ki (4.8) denkleminin, parametrik

$$\begin{cases} x_0=x_0(s) \\ y_0=y_0(s) \\ z_0=z_0(s) \end{cases} \tag{4.17}$$

denklemleri ile yazılan eğriden geçen vektör yüzeyin bulunması istendiğinde (4.8) denkleminin çözümünü parametrik

$$\begin{cases} x=x(t,s) \\ y=y(t,s) \\ z=z(t,s) \end{cases} \tag{4.18}$$

şeklinde aramamız daha faydalı olur.

Bu halde (4.8) denkleminin karakteristik denklemine uygun olarak aşağıdaki şekilde parametre dahil etmemiz gerekir:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}=dt\ . \tag{4.19}$$

Bu (4.19) denklemler sisteminin çözümünden $t=0$ ve ya $t=t_0$ değerinde (4.17) denklemleri ile yazılan eğriden geçen çözümünü seçmemiz gerekir.

Örnek.4.10:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

denkleminin, denklemi, (4.17) teki,

$$\begin{cases} x_0 = s \\ y_0 = s^2 \\ z_0 = s^3 \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilen eğriden geçen vektör yüzeyini bulalım. Bu amaçla verilmiş denklemin uygun yardımcı denklemini parametre dâhil etmekle aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{1} = \frac{dz}{1} = dt\,.$$

Bu sistemi

$$dx = -dy = dz = dt$$

şeklinde de yazabiliriz. Uygun olarak aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{cases} dx = dt\,, \\ dy = -dt\,, \\ dz = dt\ \ . \end{cases}$$

Bu sistemin genel çözümü aşağıdaki

$$\begin{cases} x = t + c_1 \\ y = -t + c_2 \\ z = t + c_3 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada başlangıç şartlarını kullanarak

$$\begin{cases} x|_{t=0} = c_1 = s \\ y|_{t=0} = c_2 = s^2 \\ z|_{t=0} = c_3 = s^3 \end{cases}$$

eşitliklerini buluruz. Böylece, bulunması istenen vektör yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = t + s\ , \\ y = -t + s^2, \\ z = t + s^3 \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Hatırlatalım ki, (4.8) denkleminin (4.17) eğrisinden geçen çözümünün bulunması problemi Cauchy problemi diye adlandırılır.

Örnek.4.11:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denkleminin

$$z|_{x=0} = y$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım.

Bu Cauchy problemini çözmek için önce verilmiş denklemin yardımcı denklemini yazalım:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2e^x - y} = \frac{dz}{0}.$$

Bu adi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemi ister Lagrangen sabitlerin varyasyonu yöntemini uygulayarak istersek normal yoldan

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x - y$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 2e^x$$

buluruz. Yani,

$$y^{\prime} + y = 2e^{x}\,.$$

Bu eşitliğin her tarafını e^{x} ile çarparsak

$$y^{\prime}e^{x} + ye^{x} = 2e^{2x}$$

Bu da o demektir ki,

$$(ye^{x})^{\prime} = 2e^{2x}$$

Şimdi integralleme yaparsak,

$$ye^{x} - e^{2x} = c_1$$

şeklinde buluruz.

Böylece verilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü

$$z = \varphi(ye^{x} - e^{2x})$$

şeklindedir. Burada Cauchy şartını kullanarak

$$z|_{x=0} = y = \varphi(y-1)$$

eşitliğini buluruz. Bu sonuncu eşitlikten

$$\varphi(y) = y + 1$$

olduğunu buluruz. Buradan da genel çözümden verilmiş problemin çözümünü

$$z = \varphi(ye^{x} - e^{2x}) = ye^{x} - e^{2x} + 1$$

şeklinde buluruz.

Böylece, verilmiş cauchy probleminin çözümünü

$$z(x,y) = ye^{x} - e^{2x} + 1$$

şeklinde bulmuş oluruz.

Örnek.4.12:

Burada

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$

denkleminin

$$z|_{x=2}=y^2+1$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım. Bu problemi çözmek için verilmiş denklemin yardımcı denklemini yazalım:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-yx}.$$

Bu yardımcı denklemler sisteminde uygun olarak birinci eşitliği ve birinci orantıyı y, ikinci orantıyı x ile çarpıp üçüncü ile toplarsak, aşağıdaki denklem sistemini buluruz:

$$\begin{cases}\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\\ \frac{d(xy+z)}{xy+z}=\frac{dx}{x}.\end{cases}$$

Bu sistemi çözerek sistemin genel çözümler sistemini,

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=c_1\\ \frac{xy+z}{x}=c_2\,.\end{cases}$$

şeklinde buluruz. Burada Cauchy şartlarını kullanarak

$$c_1=\frac{2}{y}$$

$$c_2=y+\frac{y^2+1}{2}$$

eşitliklerini buluruz. Buradan da

$$y = \frac{2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(\frac{2}{c_1} + 1)^2$$

ve ya

$$c_2 = \frac{2}{c_1} + \frac{4 + c_1^2}{2c_1^2}$$

olur. Şimdi de c_1 ve c_2 ifadelerini yerine yazarak Cauchy probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$y + \frac{z}{x} = 2\frac{y}{x} + \frac{4 + \frac{x^2}{y^2}}{2\frac{x^2}{y^2}}$$

ve ya

$$y + \frac{z}{x} = 2\frac{y}{x} + \frac{4y^2 + x^2}{2x^2}$$

ya da

$$2xz = 4xy + 4y^2 + x^2 - 2x^2y\,.$$

Sonuç olarak buradan da

$$(x + 2y)^2 = 2x(xy + z)$$

şeklinde çözüm bulunmuş olur.

5. n DEĞİŞKENE BAĞLI BİRİNCİ MERTEBELİ KISMİ TÜREVLİ LİNEER HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1 n Değişkene Bağlı Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Lineer Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemlerinin Genel Şeması

Aşağıdaki lineer homojen birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemi ele alalım:

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0\,. \qquad (5.1)$$

Bu diferansiyel denklemin katsayıları olan,

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,\;\; X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,\;\; \dots\,,\;\; X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonlarının tümünün aynı bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında sıfıra dönüşmediğini ve bu fonksiyonların tanım bölgesinde sınırlı kısmi türevlerinin var olduğunu farz edelim.

(5.1) denklemine uygun aşağıdaki yardımcı sistemi tertip edelim:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}\;. \qquad (5.2)$$

(5.2) adi türevli diferansiyel denklemler sistemidir. $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ foksiyonları üstte gösterdiğimiz varsayımları sağladıklarında (5.2) sistemi varlık ve teklik teoreminin şartlarını sağlamaktadır.

(5.2) adi türevli diferansiyel denklemler sisteminin (n-1) tane biri-birine bağlı olmayan aşağıdaki birinci integrallerinin bulunduğunu varsayalım:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{n-1} \end{cases} \qquad (5.3)$$

n-boyutlu ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatlı uzayda (5.3) sistemi (integraller sistemi) (n-1) parametreye bağlı eğriler ailesidir.

Bu (n-1) parametreye bağlı (5.3) eğriler ailesine (5.1) denkleminin karakteristikleri denir.

Burada biz ispatlayalım ki, (5.2) sisteminin keyfi

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

birinci integralinin sol yanı olan

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonu (5.1) lineer homojen birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denkleminin çözümüdür.

Gerçekten de, (5.2) sisteminin keyfi integral eğrisi üzerinde

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonu aynen sabit değer alır. Yani

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

olur. Bu yüzden de keyfi integral eğrisi üzerinde

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0 \tag{5.4}$$

eşitliği sağlanır. Ama integral eğrileri üzerinde (5.2) eşitliklerinden görüldüğü gibi dx_i diferansiyelleri uygun olarak X_i fonksiyonları ile proporsiyonaldır (orantılıdır, mütenasiptir).

(5.4) eşitliğinin sol yanı dx_i diferansiyellerine nazaran homojen olduklarından,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0$$

eşitliğindeki dx_i diferansiyellerini onlarla mütenasip olan X_i fonksiyonlarıyla değiştirebiliriz. O zaman (5.2) sisteminin integral eğrileri üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0 \tag{5.5}$$

eşitliğini buluruz. (5.2) sisteminin integral eğrileri, $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin, ele aldığımız değişme bölgesinin her bir noktasından geçtiğinden ve (5.5) aynılığının sol yanı $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ sabitlerine bağlı olmadığı için (5.5) denklemi(aynılığı) bir integral eğrisinden diğer integral eğrisine geçtiğimizde değişmiyor.

Böylece, (5.5) aynılığı yalnız integral eğrisi üzerinde değil $x_1, x_2, \dots, x_n$ değiştiği bölgenin her bir noktasında sağlanır.

Bu ise onu gösterir ki, $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu verilmiş,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \equiv 0$$

denkleminin çözümüdür.

Φ fonksiyonu n-1 değişkenli keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = c$$

(5.2) denklemler sisteminin birinci integrali olduğu açıktır. Gerçekten de, (5.2) sisteminin integral eğrisi üzerinde tüm $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ fonksiyonlarının her biri sabit sayıya dönüşür.

Böylece, bu yüzden

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

fonksiyonu (5.2) denkleminin integral eğrisi üzere sabit sayıya dönüşür. Demek ki, Φ keyfi diferansiyellenen fonksiyon olmak üzere

$$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

(5.1) lineer homojen denkleminin çözümüdür.

Şimdi biz burada

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

fonksiyonunun (5.1) denkleminin genel çözümü olduğunu gösterelim.

Teorem.5.1:

Φ keyfi diferansiyellenen fonksiyon olmak üzere

$$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

(5.1) denkleminin genel çözümüdür. Yani

$$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \, ,$$

bu denklemin tüm çözümlerini kendisinde sağlar.

İspat:

Var sayalım ki,

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(5.1) denkleminin herhangi bir çözümüdür. Gösterelim ki, öyle bir Φ fonksiyonu var ki,

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

eşitliği sağlanır. ψ ve $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ (5.1) denkleminin çözümleri olduklarından

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0\,, \\
\sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_i} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots.., \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} = 0
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

(5.6) denklemler sistemi $X_1, X_2, \dots, X_n$ değişkenlerine nazaran lineer homojen cebirsel denklemler sistemidir. Varsayımımıza göre

$$X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonları aynı zamanda her bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktasında sıfıra dönüşmüyor. Yani (5.6) homojen lineer cebirsel denklemler sisteminin sıfırdan farklı

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

çözümü vardır. Bu yüzden (5.6) sisteminin determinantı sıfıra eşittir:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{d\psi}{dx_1} & \dfrac{d\psi}{dx_2} & & \dfrac{d\psi}{dx_n} \\
\dfrac{d\psi_1}{dx_1} & \dfrac{d\psi_1}{dx_2} & \cdots & \dfrac{d\psi_1}{dx_n} \\
\cdots & \cdots & ::: & \cdots \\
\dfrac{d\psi_{(n-1)}}{dx_1} & \dfrac{d\psi_{(n-1)}}{dx_2} & \cdots & \dfrac{d\psi_{(n-1)}}{dx_n}
\end{vmatrix} \equiv 0
$$

Bu ise ψ ve $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ fonksiyonlarının arasında fonksiyonel bağlantı olduğunu gösterir:

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0\,. \tag{5.7}$$

(5.2) denkleminin $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$, $(i = 1,2, \dots, n-1))$ birinci integrallerinin bağımsız olduklarından dolayı n tertipli (ölçülü)

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Jakobyanının (n-1) tertipli aşağıdaki şekilde

$$\frac{D(\psi,\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_{n-1}})}$$

bir minörünün sıfırdan farklı olması gerekir.

Böylece, (5.7) denklemini ψ fonksiyonuna nazaran çözerek aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$\psi = \Phi(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1})\,.$$

5.2 Örnek

Aşağıdaki denklemi integralleyelim.

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \qquad (5.8)$$

(5.8) denkleminin karakteristiklerinin belirlendiği yardımcı (5.2) denklemi (5.8) denklemi için aşağıdaki şekilde olur:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}\,.$$

Bu adi türevli diferansiyel denklemler sisteminin birinci integralleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1\,,\qquad \frac{x_2}{x_n}=c_2\,,\qquad \dots\,,\qquad \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1}\,.$$

Böylece (5.8) denkleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde olur:

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Burada Φ fonksiyonu sıfırıncı (ölçülü) mertebeden homojen keyfi fonksiyondur.

6. n DEĞİŞKENE BAĞLI BİRİNCİ MERTEBELİ KISMİ TÜREVLİ KUAZİ-LİNEER HOMOJEN OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

6.1 n Değişkene Bağlı Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Kuazi-Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Metotları

Birinci mertebeli Kuazi-Lineer homojen olmayan kısmi türevli

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \qquad (6.1)$$

denklemini ele alalım.

Burada tüm X_i ve Z fonksiyonları sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar olduklarını ve $x_1, x_2, \dots, x_n$,z değişkenlerinin değişme bölgesinde her birinin aynı zamanda (aynı noktada) sıfıra dönüşmediğini varsayalım.

Bu şartlar sağlandığında (6.1) denklemi bu denklemin lineer homojen denkleme getirilmesiyle integrallenir.

Bu amaçla 3 değişkenli diferansiyel denklem halinde olduğu gibi (6.1) denkleminin z çözümünü aşağıdaki aşikar olmayan şekilde aramamız yeterlidir:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0\,. \qquad (6.2)$$

Burada $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ olduğunu varsayarız.

Gerçekten de $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çözümünün (6.2) denklemini sağladığını varsayarsak, o zaman,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0$$

aynılığını x_i değişkenine nazaran diferansiyelleyerek

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

eşitliğini buluruz. Buradan da,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

eşitliği bulunur. Bulduğumuz $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ türevlerini (6.1) denkleminde yerine yazıp, sonra ise $\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ ifadesine çarpıp, tüm terimleri denklemin sol tarafına götürerek, aşağıdaki homojen lineer diferansiyel denklemi buluruz:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad . \qquad (6.3)$$

Burada biz z değişkenini $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin fonksiyonu olduğunu ve

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$$

denkleminin çözümü olduğunu varsaymışız.

Böylece, biz

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$$

denkleminin sağlanmasıyla (6.3) lineer homojen denklemini aynılığa dönüştürerek u fonksiyonunu bulmamız gerekir.

Önce (6.3) denklemini sağlayan ve serbest

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z$$

değişkenlerine bağlı u fonksiyonunu bulalım.

Bu u fonksiyonlarını bulmak için yardımcı denklemler sistemini yazalım:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, , x_n, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, , x_n, z)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, , x_n, z)} = \frac{dz}{Z(x_1, x_2, , x_n, z)} \quad . \qquad (6.4)$$

(6.4) sisteminin n tane bağlı olmayan integrallerini bulalım:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_1 ,$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_2 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_n .$$

O zaman (6.3) sisteminin genel çözümü,

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

şeklinde bulunur. Burada Φ fonksiyonu keyfi fonksiyondur.

(6.1) denkleminin keyfi fonksiyona bağlı z çözümü,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$$

veya

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$$

denkleminden bulunur.

(6.1) denkleminin bu yöntemle bulunmuş çözümlerinden başka,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$$

denklemini sağlayan z çözümleri de bulunabilir. Ama buradaki u fonksiyonu (6.3) denkleminin çözümü olmayabilir. Fakat (6.3) denklemini

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$$

olmasından dolayı sağlıyor. (6.1) denkleminin böyle çözümlerine özel çözümler denir.

Özel çözümler çok değildirler. Bu çözümler bir parametreli aile oluşturmazlar. Gerçekten de özel çözümler bir parametreye bağlı aile oluştursalardı ve

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c \tag{6.5}$$

denklemiyle tanımlanmış olsalardı, burada c, $c_0 \leq c \leq c_1$ şartını sağlayan parametre olmak üzere, her bir c için (6.5) denkleminin sağlanmasıyla (6.3) denklemi aynen sağlanması gerekirdi. Ama (6.3) denklemi c parametresini sağlamıyor. Bu yüzden de (6.5) denkleminin sağlanmasıyla (6.3) denklemini aynılığa dönüştüremez.

6.2 n Değişkene Bağlı Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Kuazi-Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümüne Ait Örnekler

Örnek.6.1:

Burada

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = pz \tag{6.6}$$

denklemini integralleyelim. Burada p sabit sayıdır.

(6.6) denklemini çözmek için önce (6.3) denklemine uygun olarak,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + pz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

denklemini yazarız. Sonra ise bu denkleme uygun yardımcı,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

denklemini yazarız. Bu sistemin bağımsız integralleri

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1 \quad , \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{x_{(n-1)}}{x_n} = c_{(n-1)} \quad , \quad \frac{z}{x_n{}^p} = c_n$$

şeklinde bulunur.

Verilmiş denklemin z çözümü

$$\Phi(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{(n-1)}}{x_n}, \frac{z}{x_n{}^p}) = 0$$

denkleminden bulunur. Bu denklemden,

$$z = x_n^p \, \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{(n-1)}}{x_n}\right)$$

denklemi elde edilir.

Böylece p.-ci dereceli homojen keyfi fonksiyonu verilmiş denklemin çözümü olur.

Örnek.6.2:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

homojen olmayan denklemini çözelim.

Verilen denkleme uygun homojen denklem

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

şeklinde olacaktır. Bu denkleme uygun yardımcı adi türevli denklemler sistemi

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

şeklinde yazılır. Bu sistemin birinci integralleri ikinci eşitlikten

$$z-2y=c_1$$

ve üçüncü eşitlikten birinci ve ikinci eşitliği çıkartarak, ikinci integrallerini,

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz-dy-dx}{-\sqrt{z-x-y}}$$

ve buradan da

$$\frac{dy}{1}=\frac{d(z-y-x)}{-\sqrt{z-x-y}}$$

şeklinde buluruz. Bu eşitliği integrallersek,

$$y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$$

bulunur. O halde genel çözüm

$$\Phi\left(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}\right) = 0$$

denkleminden elde edilir. Burada Φ keyfi diferansiyellenen fonksiyondur.

Örnek.6.3:

$$(y + z)^2 \frac{\partial z}{\partial x} - x(y + 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

denklemini çözelim.

Bu denkleme uygun homojen lineer denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$(y + z)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - x(y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Bu sistemin yardımcı sistemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{dx}{(y + z)^2} = \frac{dy}{-x(y + 2z)} = \frac{dz}{xz}$$

ve ya

$$\frac{dx}{y^2 + z^2 + 2yz} = \frac{dy}{-xy - 2xz} = \frac{dz}{xz} \tag{6.7}$$

şeklinde yazılır. Yardımcı sistemin sağ yanındaki iki orantıyı x ile çarparak, üçüncü orantı ikinci orantıya eklenirse

$$-\frac{d(y + z)}{y + z} = \frac{dz}{z}$$

eşitliğini buluruz. Bu son denklemi çözersek,

$$(y+z)z = c_1 \tag{6.8}$$

birinci integralini buluruz. Şimdi (6.7) yardımcı sistemini tekrar ele alalım. Bu sistemin orantılarının pay ve paydalarını, birinci orantıda x, ikinci orantıda y ve üçüncü orantıda -z ile çarparsak, orantıların eşitliğinin özelliğine esasen

$$\frac{x\,dx}{xy^2 + xz^2 + 2xyz} = \frac{y\,dy}{-xy^2 - 2xyz} = \frac{-z\,dz}{-xz^2}$$

sistemini buluruz. Yine orantıların eşitliği özelliğinden

$$\frac{x\,dx}{xy^2 + xz^2 + 2xyz} = \frac{y\,dy - zdz}{-xy^2 - 2xyz - xz^2} = \frac{-z\,dz}{-xz^2}$$

sistemini buluruz. Bu sistemin birinci eşitliğini alarak aşağıdaki denklemi buluruz.

$$xdx + ydy - zdz = 0$$

Bu denklemin her yanını integrallersek ikinci genel çözümü aşağıdaki gibi bulmuş oluruz.

$$x^2 + y^2 - z^2 = c_2\,. \tag{6.9}$$

Bulduğumuz bu (6.8) ve (6.9) birinci integrallerinin yardımı ile,

$$z = z(x, y)$$

verilmiş denkleminin genel çözümü aşağıdaki,

$$\Phi[(y+z)z\,, x^2 + y^2 - z^2] = 0$$

denkleminden bulunabilir.

Örnek.6.4:

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Bu denkleme uygun homojen lineer denklem

$$yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

şeklinde yazılır. Bu sistemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

şeklinde yazılır. Bu sistemin birinci integralini bulalım. Önce

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

sisteminden

$$zdz - xdx = 0$$

$$z^2 - x^2 = c_1 .$$

Daha sonra

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}$$

sisteminden

$$ydy - xdx = 0$$

$$y^2 - x^2 = c_2$$

buluruz. Buradan da

$$u = \Phi(z^2 - x^2 , y^2 - x^2),$$

$$\Phi((z^2 - x^2 , y^2 - x^2) = 0,$$

$$z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$$

genel çözümünü buluruz. Burada ψ keyfi fonksiyondur.

Örnek.6.5:

Burada

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$$

denklemini çözelim.

Bu denklemin yardımcı denklemi,

$$\frac{dx}{\frac{1}{x}}=\frac{dy}{\frac{1}{y}}=\frac{dz}{4}$$

şeklinde olur. Bu sistemin birinci integrallerini bulalım.

$$xdx-ydy=0$$

$$y^2-x^2=c_1$$

ve

$$dz=4xdx$$

$$z-2x^2=c_2$$

olur. Buradan,

$$\Phi(y^2-x^2\,,z-2x^2)=0$$

$$z=2x^2+\psi(\,y^2-x^2)$$

genel çözümünü buluruz. Burada da ψ keyfi fonksiyondur.

Örnek.6.6:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

denklemini çözelim.

Bu denkleminde yardımcı denklemi

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}}$$

şeklinde olur. Birinci integrallerini ise

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}=\mathrm{c}_1$$

$$\mathrm{z}=\mathrm{c}_2$$

şeklinde buluruz. Buradan da genel çözümü

$$\mathrm{z}=\Phi\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)$$

olarak buluruz. Burada da Φ keyfi fonksiyondur.

Örnek.6.7:

$$y\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}-\mathrm{x}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=0$$

denklemini çözmek içinde yardımcı denklem,

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{y}}=-\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{x}}$$

şelinde bulunur. Sonuncu eşitlikten

$$\mathrm{xdx}+\mathrm{ydy}=0$$

denklemini buluruz. Bu denklemi integrallersek,

$$\psi_1=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\mathrm{c}$$

$$\mathrm{z}=\Phi(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)$$

genel çözümünü buluruz. Burada da Φ keyfi fonksiyondur.

Örnek.6.8:

Burada

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

denklemini çözelim.

Bu denklemin yardımcı denklemi ise,

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

şeklinde yazılır. Burada da

$$-d\sqrt{x}=-d\sqrt{y}$$

eşitliğini ve

$$\sqrt{y}-\sqrt{x}=c_1$$

$$\sqrt{z}-\sqrt{x}=c_2$$

çözümlerini buluruz. O halde denklemin genel çözümü

$$u=\Phi\left(\sqrt{y}-\sqrt{x},\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada da Φ keyfi fonksiyondur.

7. SONUÇ

Bu tezde Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Lineer ve Kuazi-Lineer Diferansiyel Denklemler ele alınıp incelendi ve çözüm metotları araştırıldı. Bu metotların uygulanmasına ait örnekler çözülerek gösterildi.

Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki Kovalevskaya teoremi verildi.

Alan Teorisinin Elemanları, Alanın Gradiyenti ve Hamilton Operatörleri tanımlandı.

Birinci Mertebeli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin sınıflandırılması yapıldı.

İki serbest değişkene bağlı Kuazi-Lineer diferansiyel denklemlerin geometrik yorumu anlatıldı.

n değişkene bağlı Lineer ve Kuazi-Lineer birinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm metotları incelendi ve gösterilen metotların uygulamasıyla alakalı örnekler çözüldü.

KAYNAKLAR

1. Petrovsky I.G. Lectures on Diferential Educations. Newyork 1962
2. Elsgols L.E. Calculs Of Variationus, Pergamon Press, Ltd. Newyork 1961
3. Stepanov V.V. Kurs Differansialnıch Uravneniy, Gosudarstvennoe İzdatelstvo Tekniko-Teoretiçeskoy Literaturı, Moskova 1953
4. Çağlayan M. , Çelebi O. Kısmi Diferansiyel Denklemler, Bursa 2010
5. Aliyev G.G. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, İstanbul 1995
6. Sağel K.M. Vektörel Analiz, Ankara 1999
7. Mustafayev M.I. Ders Notları 2014

ÖZGEÇMİŞ

1975 Yılında Sorgun'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Sorgun'da tamamladım. Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1998 de mezun oldum. Aynı yıl Eylül ayında Sorgun'da Ertuğrul Gazi İlköğretim Okulunda matematik öğretmeni olarak memurluğa başladım. Sırayla Ertuğrul Gazi İlköğretim Okulu, Sorgun Lisesi, Sorgun Anadolu Lisesi, Sorgun Anadolu Öğretmen Lisesinde öğretmenlik, ayrıca Anadolu Öğretmen Lisesi Öğrenci Pansiyonunda 1,5 yıl vekaleten İdarecilik görevleri yaptım. 2001 yılında Bitlis'te Asker Öğretmen olarak askerlik görevimi tamamladım. Halen M.A. D. Anadolu Öğretmen Lisesinde Öğretmen olarak çalışıyorum. Evli, 2 çocuk babasıyım. Sorgun'da ikamet ediyorum.

2013 yılında yüksek lisans eğitimime Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladım. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında eğitimime devam ediyorum.

İletişim Bilgileri

Adres : Bozok Üniversitesi FEF Matematik Bölümü Divanlı Yolu 10. km.

66100 YOZGAT

Telefon: (354) 415 26 70

Cep Tel: (505) 313 12 77

E-posta: talipshn@hotmail.com