T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

$\alpha_{1,}\ \alpha_2$ YAKIN-HALKALARIN REGÜLERLİĞİ ÜZERİNE

Esra Pınar AKKAYMAK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

α_1, α_2 YAKIN-HALKALARIN REGÜLERLİĞİ ÜZERİNE

Esra Pınar AKKAYMAK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130010 numaralı öğrencisi Esra Pınar AKKAYMAK'ın hazırladığı **"α_1, α_2 Yakın-Halkaların Regülerliği Üzerine"** başlıklı YÜKSEK LİSANS TEZİ ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 15/05/2012 Salı günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına ~~OY ÇOKLUĞU~~ / OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN(Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/5/12 tarih ve 5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23./5./20.12

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

İÇİNDEKİLER

α_1, α_2 YAKIN-HALKALARIN REGÜLERLİĞİ ÜZERİNE

Esra Pınar AKKAYMAK

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa:42

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde α_1 ve α_2 yakın-halka kavramlarının birbirleriyle ve regüler yakın-halkalarla ilişkileri incelendi. Dördüncü bölümde yakın-halkalarda bi-ideallik, bi-regülerlik kavramlarının birçok farklı yakın-halka çeşitleriyle ilişkileri irdelendi. Orijinal bir çalışmadan oluşan beşinci bölümde, α_1 yakın-halkaların regüler yakın-halkalarla çeşitli ilişkileri elde edildi. Ayrıca, bir yakın-halkanın α_1 alt yakın-halkası tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ispatlanmıştır. α_1 ve α_2 alt yakın-halkaların yakın-halka homomorfizmi altında özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yakın-Halka, α_1 Yakın-Halka, α_2 Yakın-Halka, Regüler Yakın-Halka.

ON REGULARITY OF α_1, α_2 NEAR-RINGS

Esra Pınar AKKAYMAK

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2012; Page:42

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Akın Osman ATAGÜN

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the first and second chapters. In the third chapter, the relations of α_1 and α_2 near-ring concepts with each other and regular near-rings have been examined. In the fourth chapter, the relations of the concepts of bi-idealness, bi-regularness in near-rings with a lot of different near-ring kinds have been investigated.In the fifth chapter, which consists of an original study, various relations of α_1 near-rings with regular near-rings have been obtained. Furthermore, α_1 subnear-ring of a near-ring has been defined and its various propertics have been proved. The features of α_1 and α_2 subnear-rings have been researched under near-ring homomorphism.

Keywords: Near-Ring, α_1 Near-Ring, α_2 Near-Ring, Regular Near-Ring.

TEŞEKKÜR

α_1, α_2 yakın-halkaların regülerliği üzerine adlı tez çalışmamda değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e bilgileriyle ve desteğiyle beni aydınlattığı için ve bu tezin oluşmasında geçen süreçte bana pozitif bakış açısıyla rehber olduğu için teşekkür ederim.

Yaşamımın her anında özveriyle beni destekleyen aileme, bu çalışmalar esnasında maddi manevi desteğini esirgemeyen eşim Mehmet KARATAŞ'a teşekkür ederim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	:	Yakın-halka
N_o	:	N yakın-halkasının sıfır-simetrik kısmı
N_c	:	N yakın-halkasının sabit kısmı
Γ	:	N-grup
$M(\Gamma)$	:	Γ'dan Γ'ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_o(\Gamma)$	:	Γ'da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_c(\Gamma)$	:	Γ'da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
$Hom(N,M)$	:	N'den M'ye tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi
$(a)_b$	:	a elemanı tarafından üretilen bi-ideal
$(a)_n$	:	a elemanı tarafından üretilen invaryant N-alt grup
$(a)_r$	:	a elemanı tarafından üretilen sağ N-alt grup
$(a)_l$	:	a elemanı tarafından üretilen sol N-alt grup
$C(N)$	:	N yakın-halkasının merkezi
N/I	:	Bölüm yakın-halkası

1. GİRİŞ

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson [3] tarafından atılmıştır. O, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır, bugün bu cisimler yakın-cisim olarak isimlendirilmektedir.

α_1 ve α_2 yakın-halkalar regüler yakın-halkalara alternatif olarak alınabilecek farklı yapılardır. Bu kavramlar ilk olarak Uma ve arkadaşları [12] tarafından tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ispatlanmıştır. Her regüler yakın-halka bir α_2 yakın-halka olmasına rağmen, α_1 yakın-halka olması için sağ değişmeli olma şartı vardır. Aynı zamanda, her α_1 yakın-halkanın homomorfik görüntüsü yine α_1 yakın-halkadır fakat α_2 yakın-halka için bu genelde doğru değildir.

Halkalar için bi-ideallik kavramı, birbirlerinden bağımsız olarak Lajos-Szasz [4] , Le Rouxs [5] ve Szasz [8] tarafından daha sonra yakın-halkalar için bu kavram Tamizh Chelvam ve Ganesan [9,10] tarafından ortaya atılmış ve üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A * B = \{ \mathrm{a}_1(\mathrm{a}_2+\mathrm{b})-\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 \mid a_1, a_2 \in A,\ b \in B \}$$

ile tanımlanmıştır. Eğer, N 'nin bir B alt grubu için,

$$BNB \cap (BN) * B \subseteq B$$

sağlanıyorsa B 'ye N 'nin bir bi-ideali denir. Fakat bu tanım N 'nin sıfır-simetrik olması durumunda, $BNB \subseteq B$ olarak alınmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde, ilk olarak yakın-halkaların α_1 alt yakın-halkaları tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ispatlanmıştır. α_1 ve α_2 alt yakın-halkaların homomorfizm altında özellikleri araştırılmıştır. Daha sonra α_1 yakın-halkaların diğer tanımlanmış olan yakın-halkalarla ilişkileri incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve diğer bölümlerde ortak olarak kullanılan yapılar verilecektir. Yakın-halka teorisi üzerine çalışan hemen hemen tüm matematikçiler için temel kaynak kabul edilen, ilk baskısı 1977 ve yenilenmiş baskısı 1983 yıllarında yapılan Günter Pilz'e ait "Near-rings" [7] kitabı, bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Yakın-halkalar, genelleştirilmiş halkalardır. Halkalardan farklı olarak, bir yakın-halkada ilk işlem değişmeli olmak zorunda değildir ve ikinci işlemin birinci işlem üzerine tek yönlü dağılma özelliği olması yeterlidir. Bu tanım açık olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.1. [7] Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N,.)$ bir yarı grup,

c) $\forall x, y, z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer c) şıkkı yerine,

$$\forall x, y, z \in N \text{ için } x.(y+z) = x.y + x.z$$

alınırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir. Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler. Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir. Bazı yakın-halka örnekleri aşağıdadır.

Örnek 2.1.2. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3. $(N,+)$ bir grup ve $\forall x, y \in N$ için çarpma işlemi;

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu işlemler altında N bir yakın-halkadır. Bu yakın-halka literatürde, bazen, aşikar yakın-halka adıyla karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 2.1.4. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnekler 2.1.5. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun etkisiz elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

a) $M_0(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma \}$

b) $M_c(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ sabit} \}$

c) $M_c^0(\Gamma) = \{ f_\gamma : \Gamma \to \Gamma \mid \gamma \in \Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta) = \begin{cases} 0_\Gamma & , \delta = 0 \\ \gamma & , \delta \neq 0 \end{cases} \}$

Özellikler 2.1.6. [7] N bir yakın-halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

a) $\forall x \in N$ için, $0x = 0$ dır.

b) $\forall x, y \in N$ için, $(-x)y = -xy$ dir.

İspat: a) $\forall x \in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x$$

ve dolayısıyla $0x = 0$ bulunur.

b) $\forall x, y \in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılarak,

$$(-x)y = (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not: Bir N yakın-halkasında, her zaman, $\forall x, y \in N$ için $x0 = 0$ ve $x(-y) = -xy$ sağlanmayabilir. Mesela, Örnek 2.1.2. 'de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında, $f, g \in M(\Gamma)$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f 'nin orjinden geçmesiyle ve

$$f\circ(-g)=-(f\circ g)$$

olması ise f 'nin bir tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. [7] N bir yakın-halka olsun.

a) $N_0=\{n\in N \mid n0=0\}$ cümlesine N yakın-halkasının sıfır-simetrik kısmı,

b) $N_c=\{n\in N \mid n0=n\}=\{n\in N \mid \forall n'\in N \text{ için } nn'=n\}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c 'de birer yakın-halkadır.

Örnek 2.1.8. [7] $(M(\Gamma))_0=M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c=M_c(\Gamma)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0&=\{f\in M(\Gamma) \mid f\circ 0=0\}\\&=\{f\in M(\Gamma) \mid f(0)=0\}\\&=M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c&=\{f\in M(\Gamma) \mid f\circ 0=f\}\\&=\{f\in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\}\\&=M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

$N=N_0$ ise N yakın-halkasına sıfır-simetrik ve $N=N_c$ ise N yakın-halkasına sabit yakın-halka denir. Örnek 2.1.8. 'den görüleceği gibi, $M_0(\Gamma)$ bir sıfır-simetrik ve $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Teorem 2.1.9. [2] Bir N yakın-halkası için $N=N_0+N_c$ dir.

İspat: $n\in N$ için,

$$[n-(n0)]0=[n+((-n)0)]0=n0+((-n)0)0=n0+(-n)0=0$$

Dolayısıyla,

$$n-(n0)\in N_0$$

dır. Aynı zamanda,

$$n0\in N_c$$

olduğu görülebilir. O halde,

$$n = [n - (n0)] + (n0)$$

olduğundan ispat tamamdır.

Tanım 2.1.10. [7] $(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer $(N,+)$ değişmeli ise N 'ye bir abelyen yakın-halka, $(N,.)$ değişmeli ise, N 'ye bir komutatif yakın-halka, $(N,.)$ birimli ise N 'ye birimli bir yakın-halka denir.

b) Eğer $(N - \{0\},.)$ bir grup ise, N 'ye bir yakın-cisim denir.

Tanım 2.1.11. [6] N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için,

$$aN = Na \tag{2.1.}$$

oluyorsa N 'ye bir alt değişmeli yakın-halka denir.

$C(N) = \{n \in N \mid nx = xn, \forall x \in N\}$ cümlesi N yakın-halkasının merkezi olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.12. [12] N bir alt değişmeli yakın-halka ve E={n $\in N \mid$ n idempotent} olmak üzere $E \neq \{0\}$ olsun. Bu taktirde; $E \subseteq C(N)$ dir.

İspat: N bir alt değişmeli yakın-halka ve $E \neq \{0\}$ olsun. $\forall e \in E$ için N alt değişmeli olduğundan,

$$eN = Ne$$

dir. Dolayısıyla, $\forall n \in N$ için,

$$en = xe$$

ve

$$ne = em$$

olacak şekilde $x, m \in N$ vardır. Buradan,

$$ene = e(ne) = e(em) = e^2m = em = ne$$

$$ene = (en)e = (xe)e = xe^2 = xe = en$$

olup,

$$en = ne$$

elde edilir.

Tanım 2.1.13. [12] N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a \in N$ için,

$$a = aba \tag{2.2.}$$

olacak şekilde $b \in N$ varsa N 'ye bir regüler yakın-halka denir.

Tanım 2.1.14. N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall x, y, z \in N$ için,

$$xyz = xzy \tag{2.3.}$$

sağlanıyorsa N 'ye bir sağ değişmeli yakın-halka denir.

Tanım 2.1.15. N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall x, y, z \in N$ için,

$$xyz = yxz \tag{2.4.}$$

sağlanıyorsa N 'ye bir sol değişmeli yakın-halka denir.

Tanım 2.1.16. Bir N yakın-halkası hem sol değişmeli yakın-halka hem de sağ değişmeli yakın-halka ise N 'ye bir değişmeli yakın-halka denir.

2.2. N-Gruplar

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara taşınmasıyla elde edilmiş olan N-grup, yani N üzerinde yakın-modül kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.1. [7] $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{aligned} \mu : N \times \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ (n, \gamma) &\rightarrow n\gamma \end{aligned}$$

alalım. Eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(x + y)\gamma = x\gamma + y\gamma \tag{2.5.}$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma) \tag{2.6.}$$

şartları sağlanıyorsa, (Γ, μ) ikilisine bir N-grup, yani N üzerinde yakın-modül denir. Kısaca, N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma \tag{2.7.}$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Örnekler 2.2.2. a) N bir yakın-halka olsun.

$$
\begin{aligned}
\mu : N \times N &\rightarrow N \\
(x, y) &\rightarrow xy
\end{aligned}
$$

altında $(N,+)$ bir N -gruptur. Bu N -grup, kısaca N^N ile gösterilir.

b) Γ bir grup olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\mu : M(\Gamma) \times \Gamma &\rightarrow \Gamma \\
(f, \gamma) &\rightarrow f(\gamma)
\end{aligned}
$$

altında, Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur. Gerçekten, $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(f+g)\gamma = (f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

ve

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(g\gamma)$$

sağlanır.

N -grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Bu durumda,

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $0\gamma = 0_\Gamma$,

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için, $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için, $x0_\Gamma = 0_\Gamma$,

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için, $n\gamma = n0_\Gamma$ dır.

İspat a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

ve dolayısıyla $0\gamma = 0_\Gamma$ dır.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için,

$$(-x)\gamma = (0-x)\gamma = 0\gamma - x\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -x\gamma$$

dır.

c) $\forall x \in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$n\gamma = (n0)\gamma = n(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

elde edilir.

2.3. Alt Yapılar

Tanım 2.3.1. N bir yakın-halka ve $(M,+)$, $(N,+)$'nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M'ye N'nin bir alt yakın-halkası denir.

Örnek 2.3.2. N_0 ve N_c, N yakın-halkasının alt yakın-halkalarıdır. Gerçekten, $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

yani, $(N_0,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubudur. $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

dır. O halde $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur. Şimdi, $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = x - y$$

yani, $x - y \in N_c$ olur. Bu ise, $(N_c,+)$ grubunun $(N,+)$'nın bir alt grubu olduğunu gösterir. $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = xy$$

dır. O halde $N_c N_c \subseteq N_c$ elde edilir.

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ'nın

$$N\Delta \subseteq \Delta \tag{2.8.}$$

şartını sağlayan, bir Δ alt grubuna, Γ'nın bir N-alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

2.4. Homomorfizm ve İdealler

Tanım 2.4.1. N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \tag{2.9.}$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y) \tag{2.10.}$$

şartları sağlanıyorsa, h dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir.

Önerme 2.4.2. [2] N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ yakın-halka homomorfizmi olsun. Bu durumda,

a) $h(N)$ görüntüsü, M 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

b) Eğer T, M 'nin bir alt yakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$'de N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_c) \subseteq M_c$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1}'de bir izomorfizmdir.

İspat a) $h(N)$'nin M 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Şimdi, $a = h(x), b = h(y) \in h(N)$ alalım. O halde,

$$ab = h(x)h(y) = h(xy) \in h(N)$$

olur. Bu ise, $h(N)$'nin, M 'nin bir alt yakın-halkası olduğunu gösterir.

b) T M 'nin bir alt yakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$'nin N 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Eğer, $h(x), h(y) \in T$ ise,

$$h(xy) = h(x)h(y) \in T$$

yani,

$$xy \in h^{-1}(T)$$

olur. Dolayısıyla $h^{-1}(T)$ N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

olur. Bu ise, $h(N_0) \subseteq M_0$ olduğu anlamına gelir.

d) $\forall n_c \in N_c$ için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)h(0_N) = h(n_c 0_N) = h(n_c)$$

elde edilir. Buradan, $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucuna ulaşılır.

e) $h: N \to M$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda, $h^{-1}: M \to N$ bir grup izomorfizmidir. Şimdi, $u, v \in M$ alalım. Bu durumda, $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak şekilde tek $x, y \in N$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} h^{-1}(uv) &= h^{-1}(h(x)h(y)) \\ &= h^{-1}(h(xy)) \\ &= xy \\ &= h^{-1}(h(x))h^{-1}(h(y)) \\ &= h^{-1}(u)h^{-1}(v) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, ispatı tamamlar.

Tanım 2.4.3. [7] N bir yakın-halka ve I N'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $I\,N \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I'ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I < N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I, N'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I, N'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I <_r N$ ve $I <_l N$ ile gösterilir.

Not: a) N bir yakın-halka ve $I < N$ ise, N/I bölüm yakın-halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

b) $\{0\}$ ve N, N yakın-halkasının idealleridir. Bunlara N'nin aşikar idealleri denir. Benzer şekilde, $\{0_\Gamma\}$ ve Γ, N yakın-halkasının Γ N-grubunun aşikar idealleridir.

c) N ve M iki yakın-halka ve $h \in Hom(N, M)$ ise,

$$çekh = \{n \in N \mid h(n) = 0_M\}$$

cümlesine h homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 2.4.4. [7] Eğer N yakın-halkasının, bir M alt yakın-halkası için, $MN \subseteq M$ ve $NM \subseteq M$ şartları sağlanıyorsa, M 'ye N yakın-halkasının bir invaryant alt yakın-halkasıdır denir. Burada N 'nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır.

Örnek 2.4.5. [7] N bir yakın-halka olsun. Bu durumda,

a) $N_0 <_l N$ dir, fakat $N_0 < N$ olmak zorunda değildir.

b) N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır, fakat ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir.

Bunların doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

a) $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$(x+n-x)0 = x0+n0-x0 = x0-x0 = 0$$

yani, N_0 N 'nin bir normal alt grubudur. Şimdi, $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$[x(y+n)-xy]0 = x(y0+n0)-xy0 = xy0-xy0 = 0$$

olur. Bunun anlamı $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$x(y+n)-xy \in N_0$$

olmasıdır. Bu ise $N_0 <_l N$ olduğunu gösterir. Şimdi, $N_0 < N$ olmak zorunda olmadığını göstermek için, bir örnek yeterlidir. R reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$ olsun. $1 \in M(R)$ ile birim dönüşüm gösterilirse, $1 \in N_0 = M_0(R)$ dir. $\phi \in M(R)$ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \phi : R &\rightarrow R \\ x &\rightarrow 1_R \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(1 \circ \phi)(0) = 1(1_R) = 1_R$$

yani,

$$1 \circ \phi \notin M_0(R) = N_0$$

olur. Bu ise, $M_0(R)$ 'nin $M(R)$ 'nin bir ideali olmadığını gösterir.

b) $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(xn)0 = x(n0) = xn$$

yani, $NN_c \subseteq N_c$ dir. Yine, $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(nx)0 = n0 = n = nx$$

olduğundan, $N_c N \subseteq N_c$ olur. O halde N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. N_c N 'nin genelde ne sağ ne de sol idealidir, çünkü $(N_c,+)$ $(N,+)$ 'nın genelde bir normal alt grubu değildir. Örneğin, $(\Gamma,+)$ abelyen olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları $\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$\begin{aligned} f_\gamma : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ x &\rightarrow \gamma \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşüm ise, bu durumda,

$$(1 + f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur, fakat

$$(1 + f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

dır. Bu ise,

$$1 + f_\gamma - 1 \notin M_c(\Gamma)$$

olduğunu gösterir. Buradan, $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$ 'nın bir normal alt grubu değildir. O halde, $M_c(\Gamma)$ 'nın $M(\Gamma)$ 'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın bir abel grubu olmasıdır.

Lemma 2.4.6. [12] N bir sıfır-simetrik yakın-halka olsun. Bu taktirde N 'nin her I ideali için, $NI \subseteq I$ dır. Dolayısıyla $NIN \subseteq I$ dır.

İspat: I N 'nin bir ideali olsun. Dolayısıyla $\forall i \in I$ ve $\forall n, n' \in N$ için,

$$n(n' + i) - nn' \in I$$

dır. Burada $n' = 0$ alınırsa ve N 'nin sıfır-simetrik olduğu kullanılırsa $ni \in I$ olur. O halde, $NI \subseteq I$ ve $IN \subseteq I$ dır. Buradan,

$$NIN \subseteq IN \subseteq I$$

elde edilir.

3. α_1, α_2 YAKIN-HALKALAR

Yakın-halkalarda regülerlik kavramı ile ilgili olarak birçok çalışma yapılmış ve halen bu çalışmalara yenileri eklenmektedir. α_1 ve α_2 yakın-halkalar regüler yakın-halkalara alternatif olarak alınabilecek farklı yapılardır. Bu bölümde α_1 ve α_2 yakın-halka kavramları tanıtılmış olup, birbirleriyle ve regüler yakın-halkalarla ilişkileri incelenmiştir. Bu kavramlar ilk olarak Uma ve arkadaşları [12] tarafından tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ispatlanmıştır.

Tanım 3.1. [12] N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a \in N$ için,

$$a = xax \tag{3.1.}$$

olacak şekilde $\exists x \in N$ varsa N 'ye bir α_1 yakın-halka denir.

Tanım 3.2. [12] N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a \in N - \{0\}$ için,

$$x = xax \tag{3.2.}$$

olacak şekilde $\exists x \in N - \{0\}$ varsa N 'ye bir α_2 yakın-halka denir.

Örnek 3.3. [12] **a)** $N = \{0, a, b, c\}$ cümlesi üzerinde aşağıdaki tablolar ile verilen işlemlere göre $(N, +, .)$ bir yakın-halkadır.

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	0	b	b
c	a	a	c	c

Burada,

$$0b0 = 0,\ aba = a,\ bcb = b,\ cbc = c$$

olup N bir regüler yakın-halkadır.

$$b0b = 0,\ cac = a,\ bbb = b,\ ccc = c$$

olduğundan N bir α_1 yakın-halkadır. Aynı zamanda,

$$aaa = a,\ cbc = c,\ aca = a$$

olduğundan N bir α_2 yakın-halkadır.

b) $N=\{0,a,b,c\}$ cümlesi üzerinde aşağıdaki tablolar ile verilen işlemlere göre $(N,+,.)$ bir yakın-halkadır.

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	a	b	b
c	0	a	c	c

Burada,

$$bab=a,\ bbb=b,\ ccc=c,\ a0a=0$$

olup N bir α_1 yakın-halkadır. $a\in N$ için,

$$a0a\neq a,\ aaa\neq a,\ aba\neq a,\ aca\neq a$$

olduğundan N regüler yakın-halka değildir. Aynı zamanda $a\in N-\{0\}$ için,

$$aaa\neq a,\ bab\neq b,\ cac\neq c$$

olduğundan N α_2 yakın-halka değildir.

c) Her $(N,+,.)$ yakın cisminde;

$$\forall n\in N \text{ için } 1n1=n,\ 1\in N$$

ve

$$\forall n\in N-\{0\} \text{ için } n^{-1}nn^{-1}=n^{-1},\ n^{-1}\in N-\{0\}$$

olup yakın cisimler α_1 ve α_2 yakın-halkalardır.

d) $N=\{0,a,b,c\}$ cümlesi üzerinde aşağıdaki tablolar ile verilen işlemlere göre $(N,+,.)$ bir yakın-halkadır.

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	0	b	0
c	a	a	c	a

Burada,

$$aaa = a,\ aba = a,\ aca = a$$

olup N bir α_2 yakın-halkadır. Buna rağmen $c \in N$ için,

$$c0c \neq c,\ cac \neq c,\ cbc \neq c,\ ccc \neq c$$

olduğundan N regüler yakın-halka değildir. Aynı zamanda $c \in N$ için,

$$0c0 \neq c,\ aca \neq c,\ bcb \neq c,\ ccc \neq c$$

olduğundan N α_1 yakın-halka değildir.

e) Bir N Boolean yakın-halkasında $\forall a \in N$ için $aa = a$ olduğundan,

$$aaa = aa = a$$

olup her Boolean yakın-halkası α_1 ve α_2 yakın-halkadır.

f) $(Z_6, +)$ grubu aşağıda verilen tablodaki işleme göre $\left(Z_6, +, .\right)$ bir yakın-halkadır.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	5	1	0	5	1
2	0	4	2	0	4	2
3	0	3	3	0	3	3
4	0	2	4	0	2	4
5	0	1	5	0	1	5

Burada $3 \in Z_6$ için,

$$030 \neq 3,\ 131 \neq 3,\ 232 \neq 3,\ 333 \neq 3,\ 434 \neq 3,\ 535 \neq 3$$

olduğundan Z_6 α_1 yakın-halka değildir.

$3 \in Z_6 - \{0\}$ için,

$$131 \neq 1,\ 232 \neq 2,\ 333 \neq 3,\ 434 \neq 4,\ 535 \neq 5$$

olduğundan Z_6 α_2 yakın-halka değildir.

Not: Örnek 3.3. 'ün b) şıkkından görüldüğü üzere α_1 ve α_2 yakın-halka kavramları birbirlerinden farklıdırlar. Ayrıca Örnek 3.3. 'ün b) ve d) şıklarından yakın-halkanın α_1 ve α_2 olması da regülerliği gerektirmez.

3.1. α₁ Yakın-Halkalar

Önerme 3.1.1. [12] N bir α_1 yakın-halka olmak üzere $\forall a \in N$ için,

a) $a^2x = xa^2$

b) $a = x^n a x^n$, $\forall n \geq 1$

olacak şekilde $x \in N$ vardır.

İspat: N bir α_1 yakın-halka ve $a \in N$ olsun. Bu taktirde,

$$a = xax$$

olacak şekilde $x \in N$ vardır.

a) $xa^2 = (xa)a = xa(xax) = (xax)ax = a(ax) = a^2x$ olup $xa^2 = a^2x$ elde edilir.

b) $\forall n \geq 1$ için, $xax = x(xax)x = x^2ax^2 = x^2(xax)x^2 = x^3ax^3 = ... = x^n a x^n$ olur.

Önerme 3.1.2. [12] N bir regüler yakın-halka olsun. Eğer, N sağ değişmeli ise N bir α_1 yakın-halkadır.

İspat: N regüler olduğundan $\forall a \in N$ için $a = aba$ olacak şekilde $b \in N$ vardır.

$$x = ab$$

olsun. N sağ değişmeli olduğundan,

$$xax = (ab)a(ab) = (aba)ab = a(ab) = aba = a$$

olup $\forall a \in N$ için,

$$xax = a$$

olacak şekilde $x \in N$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla N bir α_1 yakın-halkadır.

Önerme 3.1.3. [12] N bir sıfır-simetrik sağ değişmeli α_1 yakın-halka olsun. Bu taktirde $ab=0$ şartını sağlayan $a,b\in N$ için $ba=0$ olur.

İspat: $a,b\in N$ için $ab=0$ olsun. N bir α_1 yakın-halka olduğundan,

$$xax=a$$

ve

$$yby=b$$

olacak şekilde $x,y\in N$ vardır. N sıfır-simetrik ve sağ değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned} ba &= (yby)(xax) = yb(yxa)x = yb(yax)x \\ &= y(bya)x^2 = y(bay)x^2 = (yba)yx^2 \\ &= (yab)yx^2 = (y0)yx^2 = y0yx^2 = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.1.4. [12] Bir N α_1 yakın-halkasının homomorfizma altındaki görüntüsü yine bir α_1 yakın-halkadır.

İspat: N ve M yakın-halkaları ve $h:N\to M$ yakın-halka homomorfizması verilmiş olsun. $\forall u,v\in h(N)$ için

$$u=h(a), v=h(b)$$

olacak şekilde $a,b\in N$ vardır. N bir α_1 yakın-halka olduğundan

$$a=xax, b=yby$$

olacak şekilde $x,y\in N$ vardır.

$$u=h(a)=h(xax)=h(x)h(a)h(x)=h(x)uh(x)$$

ve

$$v=h(b)=h(yby)=h(y)h(b)h(y)=h(y)vh(y)$$

olacak şekilde $h(x),h(y)\in h(N)$ vardır. Dolayısıyla $h(N)$ bir α_1 yakın-halkadır.

Önerme 3.1.5. [12] N bir α_1 yakın-halka ve I N yakın-halkasının bir ideali olsun. Bu taktirde N/I bölüm yakın-halkasıda bir α_1 yakın-halkadır.

İspat:

$$\begin{aligned} h: N &\rightarrow N/I \\ x &\rightarrow x+I \end{aligned}$$

ile tanımlı h fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x+y) = x+y+I = (x+I)+(y+I) = h(x)+h(y)$$

$$h(xy) = xy+I = (x+I)(y+I) = h(x)h(y)$$

olduğundan h bir homomorfizmadır. Aynı zamanda $\forall (x+I),(y+I) \in N/I$ için,

$$h(x) = x+I, h(y) = y+I$$

olacak şekilde $x, y \in N$ vardır. Buradan h bir epimorfizmadır. N bir α_1 yakın-halka ve $h(N) = N/I$ olduğundan Önerme 3.1.4. 'den N/I bir α_1 yakın-halkadır.

3.2. α₂ Yakın-Halkalar

Önerme 3.2.1. [12] Bir α_2 yakın-halkasında E={n $\in N \mid$ n idempotent} $\neq \{0\}$ dır.

İspat: N bir α_2 yakın-halka olsun. Bu taktirde $\forall a \in N-\{0\}$ için $xax = x$ olacak şekilde $x \in N-\{0\}$ vardır. Burada,

$$(ax)^2 = ax(ax) = a(xax) = ax$$

$$(xa)^2 = xa(xa) = (xax)a = xa$$

olup xa ve ax idempotent elemanlardır. Dolayısıyla $ax, xa \in E$ olur. Burada $x \neq 0$ olduğundan,

$$xa \neq 0$$

dır. Aksi halde; $xa = 0$ olsa idi,

$$x = xax = 0x = 0$$

çelişkisi ortaya çıkardı.

Önerme 3.2.2. [12] Her regüler yakın-halka bir α_2 yakın-halkadır.

İspat: N bir regüler yakın-halka olsun. Buradan $\forall a \in N-\{0\}$ için $aba = a$ olacak şekilde $b \in N$ vardır. $x = bab$ olsun.

$$xax = (bab)a(bab) = b(aba)bab = b(a)bab = b(aba)b = bab = x$$

olur ki bu N 'nin bir α_2 yakın-halka olduğunu ispatlar.

Uyarı: Bir α_1 yakın-halkanın homomorfik görüntüsü yine bir α_1 yakın-halkadır. Eğer N α_2 yakın-halka ve $f: N \to M$ 'de bir yakın-halka homomorfizmi ise M α_2 yakın-halka olmak zorunda değildir. Gerçekten; N Klein-4 grup üzerinde aşağıdaki işlemlerle verilen $(N,+,.)$ ve $(N,+,*)$ yakın-halkaları için,

*	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	0	0	0
c	a	a	a	a

$$f(0)=0,\ f(a)=a,\ f(b)=0,\ f(c)=a$$

olarak tanımlı

$$f: N \to N$$

dönüşümü bir homomorfizmadır.

Burada $(N,+,*)$ bir α_2 yakın-halkadır fakat $(N,+,.)$ bir α_2 yakın-halka değildir.

Önerme 3.2.3. Bir N α_2 yakın-halkasının monomorfizma altındaki görüntüsü yine bir α_2 yakın-halkadır.

İspat: N ve M yakın-halkaları, $h: N \to M$ yakın-halka monomorfizması verilmiş olsun. h bir yakın-halka monomorfizması olduğundan $\forall y \in h(N)-\{0\}$ için, $y = h(x)$ olacak şekilde $x \in N-\{0\}$ vardır. N bir α_2 yakın-halka olduğundan,

$$b = bxb$$

olacak şekilde $b \in N-\{0\}$ vardır.

$$h(b) = h(bxb) = h(b)h(x)h(b)\,,\ h(b) \in h(N)-\{0\}$$

olup $h(N)$ bir α_2 yakın-halkadır.

4. YAKIN-HALKALARDA Bİ-İDEALLİK VE Bİ-REGÜLERLİK

Halkalar için bi-ideallik kavramı, birbirlerinden bağımsız olarak Lajos-Szasz [4] , Le Rouxs [5] ve Szasz [8] tarafından daha sonra yakın-halkalar için bu kavram Tamizh Chelvam ve Ganesan [9,10] tarafından ortaya atılmış ve üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A * B = \{ \mathrm{a}_1(\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}) - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 \mid a_1, a_2 \in A,\ b \in B \}$$

ile tanımlanmıştır. Eğer, N 'nin bir B alt grubu için,

$$BNB \cap (BN) * B \subseteq B$$

sağlanıyorsa B 'ye N 'nin bir bi-ideali denir. $N = N_0$ olduğunda $\forall xb \in BNB$ için,

$$xb = x(0+b) - x0 \in (BN) * B$$

olduğundan,

$$BNB \subseteq (BN) * B$$

dir. Dolayısıyla N 'nin sıfır-simetrik yakın-halka olması durumunda bi-ideal kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Bu bölümde tüm yakın-halkalar sıfır-simetrik yakın-halka olarak alınacaktır.

Tanım 4.1. [11] N bir yakın-halka olsun. N 'nin bir B alt grubu için,

$$BNB \subseteq B \tag{4.1.}$$

oluyorsa B 'ye N 'nin bir bi-idealidir denir. Eğer $m, n \in Z^+$ olmak üzere,

$$B^m N B^n \subseteq B \tag{4.2.}$$

oluyorsa B 'ye genelleştirilmiş (m, n) bi-ideal denir.

Tanım 4.2. [11] N bir yakın-halka, A N 'nin bir alt grubu olsun.

$$NA \subseteq A\,(\,AN \subseteq A) \tag{4.3.}$$

oluyorsa A 'ya N 'nin bir sol (sağ) N -alt grubu denir.

Tanım 4.3. [6] N bir yakın-halka olmak üzere $a \in N$ tarafından üretilen N 'nin bi-ideali (invaryant N -alt grubu) $(a)_b$ ($(a)_n$) şeklinde gösterilir.

Tanım 4.4. [6] N bir yakın-halka olmak üzere $a \in N$ tarafından üretilen sağ (sol) N -alt grubu $(a)_r$ ($(a)_l$) şeklinde gösterilir.

Tanım 4.5. [6] N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için,

$$a \in (a)_b N (a)_b \tag{4.4.}$$

oluyorsa N 'ye bir bi-regüler yakın-halka denir.

Önerme 4.6. [6] Her regüler yakın-halka bi-regülerdir. Fakat tersi genelde doğru olmak zorunda değildir.

İspat: N bir regüler yakın-halka olsun. Dolayısıyla $\forall a \in N$ için,

$$a = axa$$

olacak şekilde $x \in N$ vardır. Buradan,

$$a = axa \in (a)_b N (a)_b$$

olduğundan N bi-regülerdir. Tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.7. $(Z_4, +)$ grubu aşağıda verilen tablodaki işleme göre $(Z_4, +, .)$ bir bi-regüler yakın-halkadır.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0

Burada,

$$3 \notin 3N3 = \{0\}$$

olduğundan N yakın-halkası regüler yakın-halka değildir.

Önerme 4.8. [6] N bir yakın-halka olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

a) N bi-regülerdir.

b) A, N 'nin bir bi-ideali ve B bir invaryant N -alt grup olmak üzere,

$$ABA = A \cap B$$

dir.

c) $\forall a,b \in N$ için,

$$(a)_b \cap (b)_n = (a)_b (b)_n (a)_b$$

dir.

d) $\forall a \in N$ için,

$$(a)_b \cap (a)_n = (a)_b (a)_n (a)_b$$

dir.

İspat a)$\Rightarrow$b) : N bi-regüler yakın-halka olsun. Aynı zamanda, A N 'nin bir bi-ideali ve B invaryant N -alt grup olsun. A bir bi-ideal olduğundan,

$$ANA \subseteq A$$

dır. Buradan,

$$ABA \subseteq A$$

olur. Aynı zamanda B bir invaryant N -alt grup olduğundan,

$$ABA \subseteq B$$

olup,

$$ABA \subseteq A \cap B$$

dir. $x \in A \cap B$ olsun. N bi-regüler yakın-halka olduğundan,

$$x \in (x)_b N (x)_b$$

dir. Buradan $x = ynz$ olacak şekilde $y,z \in (x)_b$, $n \in N$ vardır. $y,z \in (x)_b \subseteq A \cap B$ olduğu açıktır. Yine N bi-regüler yakın-halka olduğundan,

$$y \in (y)_b N (y)_b \subseteq ANB$$

dir.

Bu taktirde,

$$x \in A(NBN)z \subseteq ABA$$

olup,

$$A \cap B \subseteq ABA$$

dir. Dolayısıyla $A \cap B = ABA$ dır.

b)$\Rightarrow$c) : A, N 'nin bir bi-ideali ve B bir invaryant N -alt grup olmak üzere,

$$ABA = A \cap B$$

olsun. Burada, $A = (a)_b$ ve $B = (b)_n$ olarak alınırsa ispat elde edilir.

c) $\Rightarrow$ **d) :** $\forall a, b \in N$ için,

$$(a)_b \cap (b)_n = (a)_b (b)_n (a)_b$$

olsun. Burada, $a = b$ olarak alınırsa ispat elde edilir.

d) $\Rightarrow$ **a) :** $\forall a \in N$ için,

$$(a)_b \cap (a)_n = (a)_b (a)_n (a)_b$$

olsun.

$$a \in (a)_b \cap (a)_n$$

olduğundan,

$$a \in (a)_b (a)_n (a)_b \subseteq (a)_b N (a)_b$$

olup N bir bi-regüler yakın-halkadır.

Tanım 4.9. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$xN \leq N \tag{4.5.}$$

oluyorsa N 'ye (α) özelliğine sahiptir denir.

Tanım 4.10. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$x \in Nx \tag{4.6.}$$

oluyorsa N 'ye bir S -yakın-halka denir.

Tanım 4.11. [11] N bir S -yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$x \in xN \tag{4.7.}$$

oluyorsa N 'ye bir $\overline{S}$ -yakın-halka denir.

Önerme 4.12. [6] N (α) özelliği ile bir $\overline{S}$ -yakın-halka olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

a) N bi-regülerdir.

b) N regülerdir.

c) N 'nin her B bi-ideali için $BNB = B$ dir.

İspat a) $\Rightarrow$ **b) :** N bi-regüler yakın-halka ve $x \in N$ olsun. Her sağ ve sol N alt-grup bir bi-ideal olduğundan,

$$x \in (x)_b N (x)_b \subseteq (x)_r N (x)_l$$

dir. A, x 'i içeren herhangi bir sağ N -alt grup olsun. Dolayısıyla,

$$x \in A \text{ ve } AN \subseteq A$$

olup,

$$xN \subseteq AN \subseteq A$$

dır. Buradan, N (α) özelliği ile bir $\overline{S}$ yakın-halka olduğundan xN, x'i içeren en küçük sağ N-alt gruptur. Buradan, $xN = (x)_r$ dir. Benzer şekilde, $Nx = (x)_l$ dir.

$$x \in (x)_b N (x)_b \subseteq (x)_r N (x)_l = (xN) N (Nx) \subseteq xNx$$

olup N regülerdir.

b) $\Rightarrow$ **c) :** N regüler yakın-halka ve B, N'nin bi-ideali olsun. N regüler olduğundan,

$$B \subseteq BNB$$

dir. Aynı zamanda B bi-ideal olduğundan,

$$BNB \subseteq B$$

dir. Dolayısıyla,

$$BNB = B$$

dir.

c) $\Rightarrow$ **a) :** N'nin her B bi-ideali için $BNB = B$ olsun. $\forall x \in N$ için $(x)_b$ bi-ideal olduğundan,

$$x \in (x)_b = (x)_b N (x)_b$$

dir. Dolayısıyla, N bir bi-regüler yakın-halkadır.

Tanım 4.13. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için,

$$a = ba^2 \qquad (4.8.)$$

olacak şekilde $\exists b \in N$ varsa N'ye bir kuvvetli regüler yakın-halka denir.

Not: Her kuvvetli regüler yakın-halka regüler yakın-halkadır [11].

Tanım 4.14. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$ab = 0 \text{ iken } axb = 0$$

oluyorsa N yakın-halkasına bir IFP yakın-halka denir.

Tanım 4.15. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için,

$$Na = Na^2 \qquad (4.9.)$$

oluyorsa N 'ye bir sol bi-potent yakın-halka denir.

Tanım 4.16. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$x \in Nx^k \ (x \in x^k N) \tag{4.10.}$$

oluyorsa N 'ye bir S_k (S'_k) yakın-halka denir.

Not: N bir S_k yakın-halka ise $\forall j \le k$ için N bir S_j yakın-halkadır [11].

Tanım 4.17. [11] N bir yakın-halka olsun. $r, m \in Z^+$ olmak üzere $\forall a \in N$ için,

$$a^r N = Na^m \tag{4.11.}$$

oluyorsa N 'ye bir $P(r,m)$ yakın-halka denir.

Tanım 4.18. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$x^k N = xNx \ (Nx^k = xNx) \tag{4.12.}$$

oluyorsa N 'ye bir P_k (P'_k) yakın-halka denir.

Tanım 4.19. [11] N bir yakın-halka olsun. $\forall x \in N$ için,

$$x^k N = x^r Nx^m \ (Nx^k = x^r Nx^m) \tag{4.13.}$$

oluyorsa N 'ye bir $P_k(r,m)$ ($P'_k(r,m)$) yakın-halka denir.

Lemma 4.20. [11] N bir yakın-halka ve E idempotentlerin kümesi olsun. Eğer $\forall e \in E$ için,

$$eN = eNe = Ne$$

ise $E \subseteq C(N)$ dir.

İspat: $\forall e \in E$ için,

$$eN = eNe = Ne$$

olsun. Dolayısıyla $\forall n \in N$ için,

$$ne = eue \text{ ve } en = eve$$

olacak şekilde $u, v \in N$ vardır. Buradan,

$$ene = e(ne) = e(eue) = eue = ne$$

$$ene = (en)e = (eve)e = eve = en$$

olup,

$$en = ne$$

elde edilir. Dolayısıyla $E \subseteq C(N)$ dir.

Önerme 4.21. [11] N bir $\overline{S}$ yakın-halka olsun. Bu taktirde, N 'nin $P(1,2)$ yakın-halka olması için gerek ve yeter şart N 'nin alt değişmeli ve N 'nin her B bi-ideali için $B = BNB$ olmasıdır.

İspat: N bir $P(1,2)$ yakın-halka olsun. $\forall e \in E$ için,

$$eN = Ne^2 = Ne$$

dir. Buradan,

$$eNe = e(Ne) = e(eN) = eN$$

Dolayısıyla Lemma 4.20. 'den,

$$E \subseteq C(N)$$

dir. N bir $\overline{S}$ yakın-halka olduğundan $\forall a \in N$ için,

$$a \in aN = Na^2$$

olup, N kuvvetli regüler, dolayısıyla regüler yakın-halkadır. Dolayısıyla, $a = aba$ olacak şekilde $b \in N$ vardır. Burada ab ve ba idempotent elemanlar olduğundan,

$$aN = (aba)N = aN(ba) \subseteq Na$$

ve

$$Na = N(aba) = (ab)Na \subseteq aN$$

olup,

$$aN = Na$$

dır. Yani, N alt değişmelidir. N 'nin her B bi-ideali için,

$$BNB \subseteq B$$

dir. N kuvvetli regüler olduğundan $\forall b \in B$ için,

$$b \in Nb^2 = Nbb = bNb \subseteq BNB$$

olup,

$$B \subseteq BNB$$

dir. Buradan,

$$B = BNB$$

elde edilir.

Tersine N alt değişmeli ve N 'nin her B bi-ideali için $B = BNB$ olsun. Nx ve xN bi-ideal olduğundan,

$$Nx = (Nx)N(Nx)$$

olup,

$$Nx^2 = (Nx)x = (Nx)N(Nx)x \subseteq Nx$$

$$Nx = N(xN)Nx = N(Nx)Nx = NN(xN)x = NN(Nx)x \subseteq Nx^2$$

olduğundan,

$$Nx = Nx^2 = xN$$

elde edilir. Dolayısıyla N bir $P(1,2)$ yakın-halkadır.

Önerme 4.22. [11] N, (α) özelliği ile bir $\overline{S}$ yakın-halka olsun. Eğer, N değişmeli yakın-halka ve N 'nin her B bi-ideali için $B = BNB$ ise, N bir $P(1,2)$ yakın-halkadır.

İspat: N değişmeli yakın-halka ve N 'nin her B bi-ideali için $B = BNB$ olsun. $\forall a \in N$ için aN, N 'nin bir bi-ideali olduğundan,

$$aN = aNNaN \subseteq aNaN = aNNa$$

dir. Yani,

$$a \in aNNa \subseteq aNa$$

dir. Dolayısıyla,

$$a = aba$$

olacak şekilde $b \in N$ vardır. Buradan, N regülerdir. N değişmeli olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$an = (aba)n = (baa)n = ba^2n = bna^2 \in Na^2$$

olup,

$$aN \subseteq Na^2$$

dir. Bunun yanında,

$$na^2 = n(aba)a = (nab)a^2 = (anb)a^2 \in aN$$

olup,

$$Na^2 \subseteq aN$$

dir. Dolayısıyla,

$$Na^2 = aN$$

dir. Buradan, N bir $P(1,2)$ yakın-halkadır.

Teorem 4.23. [11] N bir alt değişmeli $\overline{S}$ yakın-halka olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir;

a) N 'nin genelleştirilmiş (m,n) bi-ideali B için, $B = B^m N B^n$ dir.

b) N , regüler yakın-halkadır.

c) N , kuvvetli regüler yakın-halkadır.

d) N , sol bi-potent yakın-halkadır.

e) $\forall a \in N$ için, $aNa = Na = Na^2$ dir.

f) N 'nin her B bi-ideali için, $B = BNB$ dir.

İspat a)$\Rightarrow$b) : N 'nin genelleştirilmiş (m,n) bi-ideali B için, $B = B^m N B^n$ olsun. Buradan,

$$B = B^m N B^n \subseteq BNB$$

dir. Dolayısıyla, N 'nin her B bi-ideali için $B = BNB$ olur. $\forall a \in N$ için aN , N 'nin bir bi-ideali ve N alt değişmeli olduğundan,

$$aN = aNNaN \subseteq aNaN = aNNa$$

dır. Yani,

$$a \in aNNa \subseteq aNa$$

dır. Dolayısıyla N regülerdir.

b)$\Rightarrow$c) : N regüler olsun. Dolayısıyla $\forall a \in N$ için,

$$a = aba$$

olacak şekilde $b \in N$ vardır. N alt değişmeli olduğundan,

$$a = aba = caa = ca^2$$

olacak şekilde $c \in N$ vardır. Bu ise N 'nin kuvvetli regüler olduğunu gösterir.

c)$\Rightarrow$d) : N kuvvetli regüler olsun. Dolayısıyla $\forall a, n \in N$ için,

$$na = nba^2 \in Na^2$$

olacak şekilde $b \in N$ vardır. Buradan,

$$Na \subseteq Na^2$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$Na^2 \subseteq Na$$

olduğundan,

$$Na^2 = Na$$

elde edilir.

d) $\Rightarrow$ **e) :** N sol bi-potent olsun. N alt değişmeli ve $\overline{S}$ yakın-halka olduğundan $\forall a \in N$ için,

$$Na = Na^2 = (Na)a = aNa$$

dır. Dolayısıyla,

$$aNa = Na = Na^2$$

dir.

e) $\Rightarrow$ **f) :** $\forall a \in N$ için,

$$aNa = Na = Na^2$$

olsun. N bir $\overline{S}$ yakın-halka olduğundan,

$$a \in Na = aNa$$

olup N regülerdir. Dolayısıyla, N 'nin her B bi-ideali için,

$$B = BNB$$

dir.

f) $\Rightarrow$ **a) :** N 'nin her B bi-ideali için,

$$B = BNB$$

olsun. $\forall a \in N$ için aN , N 'nin bir bi-ideali ve N alt değişmeli olduğundan,

$$aN = aNNaN \subseteq aNaN = aNNa$$

dır. Yani,

$$a \in aNNa$$

dır. Dolayısıyla N regülerdir. B , N 'nin genelleştirilmiş bir (m,n) bi-ideali olsun. N regüler olduğundan, $\forall x \in B$ için,

$$x = xyx = (xyx)y(xyx) = xy(xyx)yx = ... = (xy)^m(xyx)(yx)^n$$

olacak şekilde $y \in N$ vardır. Aynı zamanda, N alt değişmeli, xy , yx idempotentler olduğundan Lemma 2.1.12. 'den idempotentler merkezil olup,

$$(xy)^m = x^m y^m$$

ve

$$(xy)^n = x^n y^n$$

dir. Dolayısıyla $m,n \in Z^+$ için,

$$x = x^m y^m (xyx) y^n x^n \in x^m N x^n \subseteq B^m N B^n$$

oduğundan,

$$B \subseteq B^m N B^n$$

dir. Buradan,

$$B = B^m N B^n$$

elde edilir.

5. α_1, α_2 ALT YAKIN-HALKALAR VE REGÜLERLİK

Tanım 5.1. N bir yakın-halka ve S, N 'nin alt yakın-halkası olsun. Eğer S bir α_1 yakın-halka ise S 'ye N ' nin bir α_1 alt yakın-halkası denir.

Tanım 5.2. [12] N bir yakın-halka ve S, N 'nin alt yakın-halkası olsun. Eğer S bir α_2 yakın-halka ise S 'ye N 'nin bir α_2 alt yakın-halkası denir.

Önerme 5.3. N bir yakın-halka ve S N 'nin α_1 alt yakın-halkası olsun. Eğer N sol değişmeli ve $NS = N$ ise N bir α_1 yakın-halkadır.

İspat: N alt değişmeli ve $NS = N$ olsun. $\forall n \in N$ için,

$$n = ma$$

olacak şekilde $m \in N, a \in S$ vardır. S bir α_1 alt yakın-halka olduğundan,

$$a = xax$$

olacak şekilde $x \in S$ vardır. N sol değişmeli olduğundan,

$$n = ma = mxax = x\max = xnx$$

dir. Dolayısıyla, N bir α_1 yakın-halkadır.

Önerme 5.4. [12] Bir α_2 yakın-halkanın tüm invaryant alt yakın-halkaları bir α_2 alt yakın-halkadır.

İspat: N bir α_2 yakın-halka, S N 'nin bir invaryant alt yakın-halkası olsun. $\forall a \in S - \{0\}$ için N bir α_2 yakın-halka olduğundan

$$x = xax$$

olacak şekilde $x \in N - \{0\}$ vardır. S invaryant alt yakın-halka olduğundan,

$$x = xax \in NSN \subseteq SN \subseteq S$$

olup $x \in S$ elde edilir. Dolayısıyla S bir α_2 yakın-halkadır.

Önerme 5.5. N bir yakın-halka olsun. N 'nin tüm α_1 alt yakın-halkalarının kesişimi yine bir α_1 alt yakın-halkadır.

İspat: N bir yakın-halka, $\{S_i\}_{i \in I}$ N ' nin α_1 alt yakın-halkalarının bir ailesi olsun.

Her alt yakın-halkanın kesişimi yine bir alt yakın-halka olduğundan $\bigcap_{i\in I} S_i$ bir alt yakın-halkadır. $\forall a \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ve $\forall i \in I$ için S_i'ler α_1 alt yakın-halka olduğundan $a = xax$ olacak şekilde $x \in S_i$ vardır. Dolayısıyla,

$$x \in \bigcap_{i\in I} S_i$$

olup $\bigcap_{i\in I} S_i$ bir α_1 alt yakın-halkadır.

Önerme 5.6. N bir yakın-halka olsun. $\{S_i\}_{i\in I}$ N'nin $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \{0\}$ olacak şekildeki α_2 alt yakın-halkalarının bir ailesi ise, $\bigcap_{i\in I} S_i$'de N'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

İspat: N bir yakın-halka, $\{S_i\}_{i\in I}$ N'nin $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \{0\}$ olacak şekildeki α_2 alt yakın-halkalarının bir ailesi olsun. Her alt yakın-halkanın kesişimi yine bir alt yakın-halka olduğundan $\bigcap_{i\in I} S_i$ bir alt yakın-halkadır. $\forall a \in \bigcap_{i\in I} S_i - \{0\}$ olsun. $\forall i \in I$ için S_i'ler α_2 alt yakın-halka olduğundan $x = xax$ olacak şekilde $x \in S_i - \{0\}$ vardır. Dolayısıyla,

$$x \in \bigcap_{i\in I} S_i - \{0\}$$

olup $\bigcap_{i\in I} S_i$ bir α_2 alt yakın-halkadır.

Önerme 5.7. N, M iki yakın-halka, S N'nin bir α_1 alt yakın-halkası ve $f : N \to M$ yakın-halka homomorfizması olsun. Bu taktirde $f(S)$, M'nin bir α_1 alt yakın-halkasıdır.

İspat: f bir yakın-halka homomorfizması olduğundan Önerme 2.4.2.'den $f(S)$, M'nin bir alt yakın-halkasıdır. Aynı zamanda, $\forall y \in f(S)$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. S bir α_1 alt yakın-halka olduğundan,

$$x = bxb$$

olacak şekilde $b \in S$ vardır. Buradan,

$$y = f(x) = f(bxb) = f(b)f(x)f(b),\ f(b) \in f(S)$$

olup, $f(S)$ M 'nin bir α_1 alt yakın-halkasıdır.

Önerme 5.8. N,M iki yakın-halka, S N 'nin bir α_2 alt yakın-halkası ve $f:N\rightarrow M$ yakın-halka monomorfizması olsun. Bu taktirde $f(S)$, M 'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

İspat: f bir yakın-halka monomorfizması olduğundan Önerme 2.4.2.'den $f(S)$, M 'nin bir alt yakın-halkasıdır. Aynı zamanda f monomorfizma olduğundan, $\forall y\in f(S)-\{0\}$ için, $y=f(x)$ olacak şekilde $x\in S-\{0\}$ vardır. S bir α_2 alt yakın-halka olduğundan,

$$b=bxb$$

olacak şekilde $b\in S-\{0\}$ vardır.

$$f(b)=f(bxb)=f(b)f(x)f(b),\ f(b)\in f(S)-\{0\}$$

olup $f(S)$, M 'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

Önerme 5.9. N,M iki yakın-halka, $f:N\rightarrow M$ bir yakın-halka izomorfizması ve K, M 'nin bir α_1 alt yakın-halkası olsun. Bu taktirde $f^{-1}(K)$, N ' nin bir α_1 alt yakın-halkasıdır.

İspat: f bir yakın-halka izomorfizması olduğundan Önerme 2.4.2.'den $f^{-1}(K)$ N 'nin bir alt yakın-halkasıdır. Aynı zamanda, $\forall y\in f^{-1}(K)$ için $f(y)\in K$ dır. K bir α_1 alt yakın-halka olduğundan,

$$f(y)=bf(y)b$$

olacak şekilde $b\in K$ vardır. Aynı zamanda f örten olduğundan $f(a)=b$ olacak şekilde $a\in f^{-1}(K)$ vardır. Buradan,

$$f(y)=f(a)f(y)f(a)=f(aya)$$

olup f bire-bir olduğundan,

$$y=aya$$

olacak şekilde $a\in f^{-1}(K)$ vardır. Dolayısıyla $f^{-1}(K)$, N 'nin bir α_1 alt yakın-halkasıdır.

Önerme 5.10. N,M iki yakın-halka, $f:N\rightarrow M$ bir yakın-halka izomorfizması ve

K, M 'nin bir α_2 alt yakın-halkası olsun. Bu taktirde $f^{-1}(K)$, N 'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

İspat: f bir yakın-halka izomorfizması olduğundan Önerme 2.4.2.'den $f^{-1}(K)$ N 'nin bir alt yakın-halkasıdır. Aynı zamanda f izomorfizma olduğundan, $\forall y \in f^{-1}(K)-\{0\}$ için $f(y) \in K-\{0\}$ dır. K bir α_2 alt yakın-halka olduğundan,

$$b = bf(y)b$$

olacak şekilde $b \in K-\{0\}$ vardır. Aynı zamanda f bire-bir ve örten olduğundan $f(a) = b$ olacak şekilde $a \in f^{-1}(K)-\{0\}$ vardır. Buradan,

$$f(a) = f(a)f(y)f(a) = f(aya)$$

olup f bire-bir olduğundan,

$$a = aya$$

olacak şekilde $a \in f^{-1}(K)-\{0\}$ vardır. Dolayısıyla $f^{-1}(K)$, N 'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

Önerme 5.11. Bir sağ değişmeli α_1 yakın-halkanın sıfır-simetrik kısmı, bir α_1 alt yakın-halkadır.

İspat: N bir sağ değişmeli α_1 yakın-halka olsun. Örnek 2.3.2. 'den N_0, N 'nin bir alt yakın-halkasıdır. N bir α_1 yakın-halka olduğundan $\forall a \in N_0$ için,

$$a = xax$$

olacak şekilde $x \in N$ vardır. N sağ değişmeli olduğundan,

$$a0 = (xax)0 = x(ax0) = x(a0x) = x0x = x0 = 0$$

olup $x \in N_0$ bulunur. Dolayısıyla N_0, N 'nin bir α_1 alt yakın-halkasıdır.

Önerme 5.12. Sabit kısmı sıfırdan farklı olan bir sağ değişmeli α_2 yakın-halkanın sabit kısmı, bir α_2 alt yakın-halkadır.

İspat: N sabit kısmı sıfırdan farklı olan bir sağ değişmeli α_2 yakın-halka olsun. Örnek 2.3.2. 'den N_c, N 'nin alt yakın-halkasıdır. N bir α_2 yakın-halka olduğundan $\forall a \in N_c-\{0\}$ için,

$$x = xax$$

olacak şekilde $x \in N - \{0\}$ vardır. N sağ değişmeli olduğundan,

$$x0 = (xax)0 = x(ax0) = x(a0x) = xax = x$$

olup $x \in N_c$ bulunur. Dolayısıyla N_c, N 'nin bir α_2 alt yakın-halkasıdır.

Teorem 5.13. N bir sol (sağ) değişmeli α_1 yakın-halka olsun. Bu taktirde;

a) Eğer N P_1 (P'_1) yakın-halka ise N regülerdir.

b) Eğer N $P(1,2)$ ($P(2,1)$) yakın-halka ise N regülerdir.

c) Eğer N $P(1,m)$, $m \geq 2$ ($P(r,1)$, $r \geq 2$) yakın-halka ise N regülerdir.

İspat: N bir α_1 yakın-halka olduğundan $\forall a \in N$ için,

$$a = xax$$

olacak şekilde $x \in N$ vardır.

a) N bir sol (sağ) değişmeli P_1 (P'_1) yakın-halka olduğundan,

$$a = xax = ax^2 \in aN = aNa \ \ (a = xax = x^2a \in Na = aNa)$$

olup,

$$a = ax^2 = aya \ \ (a = x^2a = aya)$$

olacak şekilde $y \in N$ vardır. Dolayısıyla N regülerdir.

b) N bir sol (sağ) değişmeli $P(1,2)$ ($P(2,1)$) yakın-halka olduğundan,

$$a = xax = ax^2 \in aN = Na^2 \ \ (a = xax = x^2a \in Na = a^2N)$$

olup,

$$a = ax^2 = ya^2 = yaa = aya \ \ (a = x^2a = a^2y = aay = aya)$$

olacak şekilde $y \in N$ vardır. Dolayısıyla N regülerdir.

c) N bir sol (sağ) değişmeli $P(1,m)$, $m \geq 2$ ($P(r,1)$, $r \geq 2$) yakın-halka olduğundan,

$$a = xax = ax^2 \in aN = Na^m \subseteq Na^2 \ \ (a = xax = x^2a \in Na = a^rN \subseteq a^2N)$$

olup,

$$a \in Na^2 \ \ (a \in a^2N)$$

dır. Buradan,

$$a = na^2 = naa = ana \ \ (a = a^2n = aan = ana)$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır. Dolayısıyla N regülerdir.

Teorem 5.14. N bir regüler yakın-halka olsun. Eğer N değişmeli ise bir $P(r,m)$, $(r,m \in Z^{+})$ yakın-halkadır.

İspat: N bir regüler ve değişmeli yakın-halka olsun. Öncelikle $r=m$ durumu kabul edildiğinde $\forall a \in N$ için $Na^{r}=a^{r}N$ eşitliği için tümevarım yöntemi kullanılırsa, $r=1$ olsun. N regüler olduğundan $a=aba$ olacak şekilde $b \in N$ vardır. Buradan, $\forall n \in N$ için,

$$an=(aba)n=a(ban)=abna \in Na$$

olup,

$$aN \subseteq Na$$

dır. Aynı zamanda,

$$na=n(aba)=(nab)a=anba \in aN$$

olup,

$$Na \subseteq aN$$

dır. Dolayısıyla,

$$Na=aN$$

elde edilir. $r=k$ için $Na^{k}=a^{k}N$ eşitliği sağlansın. $\forall x \in a^{k+1}N$ için, $x=a^{k+1}n_1$ olacak şekilde $n_1 \in N$ vardır. N değişmeli olduğundan,

$$x=a^{k+1}n_1=a^{k}an_1=a^{k}n_1a=n_2a^{k}a=n_2a^{k+1} \in Na^{k+1}$$

olup,

$$a^{k+1}N \subseteq Na^{k+1}$$

dir. Aynı zamanda, $\forall x \in Na^{k+1}$ için, $x=n_1a^{k+1}$ olacak şekilde $n_1 \in N$ vardır. Buradan,

$$x=n_1a^{k+1}=n_1a^{k}a=a^{k}n_1a=a^{k}an_1=a^{k+1}n_1 \in a^{k+1}N$$

olup,

$$Na^{k+1} \subseteq a^{k+1}N$$

dir. Dolayısıyla,

$$Na^{k+1}=a^{k+1}N$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$Na^{r}=a^{r}N$$

olur ki $r=m$ için N bir $P(r,m)$ yakın-halkadır. Şimdi $m>r$ olarak alınsın. Buradan $m-r=k$, $k\in Z^+$ vardır. $\forall x\in a^r N$ olsun. Bu taktirde $x=a^r n$ olacak şekilde $n\in N$ vardır.

$$x=a^r n=a^{r-1}an=a^{r-1}na=na^{r-1}a=na^{r-1}(an_1a)=na^{r-1}n_1aa=nn_1a^{r+1}$$

$$=nn_1a^r a=nn_1aa^r=nn_1(an_1a)a^r=nn_1(n_1aa)a^r=nn_1{}^2a^{r+2}$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$x=nn_1{}^k a^{r+k}=n^{'}a^m\in Na^m$$

olup,

$$a^r N\subseteq Na^m$$

elde edilir. Aynı zamanda, $\forall x\in Na^m$ olsun. Bu taktirde $x=na^m$ olacak şekilde $n\in N$ vardır.

$$x=na^m=na^{r+k}=na^r a^k=na^k a^r=n^{'}a^r\in Na^r$$

olup,

$$Na^r\subseteq a^m N$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$Na^r=a^m N$$

olur ki $m>r$ için N bir $P(r,m)$ yakın-halkadır. Şimdi $r>m$ olarak alınsın. Buradan $r-m=k$, $k\in Z^+$ vardır. $\forall x\in Na^m$ olsun. Bu taktirde $x=na^m$ olacak şekilde $n\in N$ vardır.

$$x=na^m=na^{m-1}a=na^{m-1}a=a^{m-1}na=a^{m-1}n(an_1a)=a^{m-1}n(n_1aa)$$

$$=a^{m-1}(nn_1a^2)=a^{m-1}na^2n_1=a^{m-1}a^2nn_1=a^m ann_1=a^m(an_1a)nn_1$$

$$=a^m a^2 n_1nn_1=a^{m+2}nn_1n_1=a^{m+2}nn_1n_1=a^{m+2}nn_1{}^2$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$x=a^{m+k}nn_1{}^k=a^r nn_1{}^k\in a^r N$$

olup,

$$Na^m\subseteq a^r N$$

elde edilir. Diğer yandan $\forall x\in a^r N$ için $x=a^r n$ olacak şekilde $n\in N$ vardır.

$$x=a^r n=a^{k+m}n=a^k a^m n=a^k na^m\in Na^m$$

olup,

$$a^r N \subseteq Na^m$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$a^r N = Na^m$$

olur ki $r > m$ için N bir $P(r,m)$ yakın-halkadır.

Sonuç 5.15. N bir sol (sağ) değişmeli α_1 yakın-halka olsun. Bu taktirde;

a) Eğer N sağ (sol) değişmeli P_1 (P'_1) yakın-halka ise N bir $P(r,m)$ yakın-halkadır.

b) Eğer N sağ (sol) değişmeli $P(1,2)$ ($P(2,1)$) yakın-halka ise N bir $P(r,m)$ yakın-halkadır.

c) Eğer N sağ (sol) değişmeli $P(1,m), m \geq 2$ ($P(r,1), r \geq 2$) yakın-halka ise N $P(r,m)$ yakın-halkadır.

Önerme 5.16. N değişmeli bir yakın-halka olsun. Bu taktirde N bir $P(r,r)$, $(r > 1)$ yakın-halkadır.

İspat: $\forall a \in N$ elemanı alınsın. $\forall x \in a^r N$, $(r > 1)$ için,

$$x = a^r n$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır. N değişmeli olduğundan,

$$x = a^r n = a^{r-1} an = a^{r-1} na = na^{r-1} a = na^r \in Na^r$$

olup,

$$a^r N \subseteq Na^r$$

dir. $\forall x \in Na^r$, $(r > 1)$ olsun. Bu taktirde,

$$x = na^r$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır. N değişmeli olduğundan,

$$x = na^r = na^{r-1} a = a^{r-1} na = a^{r-1} an = a^r n \in a^r N$$

olup,

$$Na^r \subseteq a^r N$$

dir. Buradan, $a^r N = Na^r$ elde edilir. Dolayısıyla, N bir $P(r,r)$, $(r > 1)$ yakın-halkadır.

Önerme 5.17. N sağ değişmeli bir α_1 yakın-halka olsun. Bu taktirde N bir S

yakın-halkadır.

İspat: N bir α_1 yakın-halka olduğundan $\forall a \in N$ için,

$$a = xax$$

olacak şekilde $x \in N$ vardır. N sağ değişmeli olduğundan,

$$a = xax = x^2 a \in Na$$

dır. Buradan, $a \in Na$ olup N bir S yakın-halkadır.

SONUÇ

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkalarda regülerlik kavramına alternatif olarak verilen α_1 ve α_2 yakın-halka kavramları çalışılmıştır. N bir regüler yakın-halka olsun. Bu durumda N bir α_2 yakın-halkadır fakat α_1 yakın-halka olması için sağ değişmeli olma şartı vardır.

Orijinal olan beşinci bölümde ilk olarak α_1 alt yakın-halka kavramı tanıtıldı. Ayrıca α_1 ve α_2 alt yakın-halkaların homomorfizm altında çeşitli özellikleri elde edildi. Aynı zamanda bir α_1 yakın-halkanın sıfır-simetrik kısmının bir α_1 alt yakın-halka, sabit kısmı sıfırdan farklı bir α_2 yakın-halkanın sabit kısmının bir α_2 alt yakın-halka olduğu gösterildi. Ayrıca bir α_1 yakın-halkanın diğer yakın-halka çeşitleri ile ilişkileri hakkında çeşitli sonuçlar elde edildi.

KAYNAKLAR

1. Beidleman, J., Strictly Prime Distributively Generated Near-rings, Math. Z., 100, 97-105, 1967.

2. Clay, J. R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1992.

3. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.

4. Lajos, S., Szasz, F., Bi-ideals in Associative rings, Acta Sci. Math., 32, 185-193, 1971.

5. Le Roux, H. J., A Note on Prime and Semiprime Bi-ideals, Kyungpook Math. J., 35, 243-247, 1995.

6. Nandakumar, P., Bi-regular Near-rings, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33, 491-496, 2009.

7. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.

8. Szasz, F., On Minimal Bi-ideals of rings, Acta Sci. Math.,32, 333-336, 1971.

9. Tamizh Chelvam, T., Ganesan, N., On Bi-ideals of Near-rings, Indian J. Pure and Appl. Math., 18(11), 1002-1005, 1987.

10. Tamizh Chelvam, T., Ganesan, N., On minimal Bi-ideals of Near-rings, Journal of Indian Math. Soc., 53, 161-166, 1988.

11. Tamizh Chelvam, T., Jayalakshmi, S., Generalized (m,n) Bi-ideals of a Near-ring, Proc. Indian Acad. Sci., 112(4), 479-483, 2002.

12. Uma, S., Balakrishnan, R., Tamizh Chelvam, T., $\alpha_{1,}$ α_2 Near-rings, International Journal of Algebra, 4(2), 71-79, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Ankara'da doğan Esra Pınar Akkaymak ilk öğrenimini Çorum Albayrak İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Çorum Atatürk Lisesi'nde tamamlamıştır.

2005 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanmıştır. Temmuz 2009'da buradan mezun olmuştur.

Şubat 2010'da Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans yapmaya başlamıştır.Halen tez aşamasında olup çalışmalarına devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Kırkkonaklar Mah. 338. Sok. Altın Apt. 5/6

Çankaya / ANKARA

Telefon : (542) 411 04 06

E-posta : epakkaymak@gmail.com