T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN HALKALARIN KUVVETLİ ASAL İDEALLERİ

Selma ÖZDEMİR

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN HALKALARIN KUVVETLİ ASAL İDEALLERİ

Selma ÖZDEMİR

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130002 numaralı öğrencisi Selma ÖZDEMİR'in hazırladığı "**Yakın Halkaların Kuvvetli Asal İdealleri**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 15/05/2012 Salı günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına ~~OY ÇOKLUĞU~~ / OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN(Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/5/2012 tarih ve 5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/5/2012

Enstitü Müdürü
Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **iii**

ABSTRACT .... **iv**

TEŞEKKÜR .... **v**

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ….. **vi**

1. GİRİŞ.. **1**

2. TEMEL BİLGİLER…………………………….. **3**

2.1. Temel Tanım ve Özellikler ………………………..................................... 3

2.2. N-Gruplar ………………………………………….............................. 7

2.3. Alt Yapılar……………………………………………………………… 9

2.4. Homomorfizm ve İdealler……………………………………………… 10

3. YAKIN HALKALARIN ASAL İDEALLERİ... **19**

3.1. 0-Asal İdealler……………………………………………………….... 19

3.2. 1-Asal İdealler……………………………………………………….... 22

3.3. 2-Asal İdealler……………………………………………………….... 23

3.4. 3-Asal İdealler……………………………………………………….... 24

3.5. Tam Asal İdealler……………………………………………………….. 25

3.6. E-Asal İdealler……………………………………………………….. 26

4. KUVVETLİ ASAL YAKIN HALKALAR………………………………….. **31**

4.1. Kuvvetli E-Asal Yakın Halka………………………………………….... 41

4.2. Uniformly Kuvvetli Asal Yakın Halka……………………………… 43

SONUÇ **46**

KAYNAKLAR.. **47**

ÖZGEÇMİŞ.. **49**

YAKIN HALKALARIN KUVVETLİ ASAL İDEALLERİ

Selma ÖZDEMİR

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 49

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde e-asal yakın-halkaların, diğer yakın halka türleriyle ilişkisine bakıldı.

Dördüncü bölümde, yakın-halkaların kuvvetli asal idealleri üzerinde duruldu. Burada kuvvetli asal yakın halka, kuvvetli asal ideal, kuvvetli e-asal yakın halka, kuvvetli e-asal ideal, uniformly kuvvetli asal ideal tanımları verildi. Kuvvetli asal yakın halka ve kuvvetli asal ideallerin; 3-asal yakın halka, tam asal yakın halka, e-asal yakın halka, uniformly asal yakın halka ve idealleri arasındaki ilişkiler incelendi.

Anahtar Kelimeler: Yakın-halka, asal ideal, 3-asal, Tam asal, e-asal, Kuvvetli asal, Kuvvetli e-asal.

STRONGLY PRIME IDEALS OF NEAR-RINGS

Selma ÖZDEMİR

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2012; Page: 49

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Akın Osman ATAGÜN

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the first and second chapters. In the third chapter, the relations between the equiprime near-rings and other kinds of near-rings have been investegated.

In the fourth chapter, strongly prime ideals of near-rings have been considered. In this section, the definitions of strongly prime near-ring, strongly prime ideal, strongly equiprime near-ring, strongly equiprime ideal, uniformly strongly prime near-ring, uniformly strongly prime ideal have been given. The relations between the strongly prime near-ring and strongly prime ideal; 3-prime near-ring, c-prime near-ring, e-prime near-ring, uniformly prime near-ring and their ideals have been examined.

Keywords: Near-ring, Prime ideal, 3-prime, c-prime, equiprime, Strongly prime, Strongly equiprime.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bilgi ve tecrübeleriyle daima destek olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e, maddi ve manevi desteklerini bir an olsun esirgemeyen değerli aileme teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	:	Yakın-halka
N_o	:	N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı
N_c	:	N yakın-halkasının sabit kısmı
Γ	:	N-grup
$M(\Gamma)$	:	Γ'dan Γ'ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_o(\Gamma)$	:	Γ'da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_c(\Gamma)$	:	Γ'da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
N_d	:	N yakın-halkasının dağılmalı kısmı
R	:	Halka
$Hom(N,M)$	:	N'den M'ye tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi
0_Γ	:	Γ'nın sıfır elemanı
$(0:\Gamma)$	:	Γ'nın sıfırlayanı
(X)	:	X cümlesi tarafından üretilen ideal
$(X)_l$	:	X cümlesi tarafından üretilen sol ideal
$(X)_N$	:	X cümlesi tarafından üretilen N-alt grup
N/I	:	Bölüm yakın-halkası
$D(N)$	:	Dağıtıcı cümle

1. GİRİŞ

Halkaların bir genellemesi olan yakın halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson [8] tarafından atılmıştır. O, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır, bugün bu cisimler yakın-cisim olarak isimlendirilmektedir.

Yakın halkaların asal idealleri üzerine ilk çalışmalar, Van der Walt [21], Laxton [16], Ramakotaiah [18], Beidleman [1] ve Ramakotaiah ve Rao [19] tarafından yapılmıştır.

N bir yakın halka ve I, N' nin bir ideali olsun.

(a) Eğer A ve B N' nin $AB \subseteq I$ olacak şekildeki idealleri ise, $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ dır.

(b) Eğer $x, y \in N$ için $xNy \subseteq I$ ise, $x \in I$ veya $y \in I$ olur.

Halkalar veya yarı grupların asal idealleri üzerine yapılan çalışmalarda, (a) ve (b) koşullarının denk olması, kolaylaştırıcı bir rol oynamaktadır. Ancak bu koşullar, yakın halkalar üzerinde denk değillerdir. Ramakotaiah ve Rao [19], (a) koşulunu sağlayan I idealine N yakın-halkasının 0-tipinde asal ideali, (b) koşulunu sağlayan ideale ise 1-tipinde asal ideal adını vermişlerdir. Günümüzde bunlar, sırasıyla 0-asal ve 3-asal ideal olarak literatürde geçmektedir. Holcombe [15], 1-asal ve 2-asal ideal tanımlarını vermiştir. Booth, Groenewald ve Veldsman [3], halkalardaki asallığın yeni bir genelleştirmesi olan e-asal (equiprime) ideal kavramını tanımlamıştır. Reddy ve Murty [20], yakın halkaların tam asal ideallerini çalışmışlardır.

Bu çeşitli asal ideal tanımları arasındaki ilişkiler, birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve halen bu araştırmalar süregelmektedir. N bir yakın halka ve I, N' nin bir ideali olsun. Bu durumda I, e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal ve 1-asal ise 0-asaldır. N sıfır-simetrik iken, 2-asal ise 1-asaldır. Ayrıca I tam asal ise 3-asaldır. Bunların tersleri, N yakın-halkasının sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru değildir [2]. Bu yüksek lisans tezinde, ilk olarak 0-asal, 1-asal, 2-asal, 3-asal, e-asal ve tam-asal yakın halkalar ve idealleri üzerinde durulmuştur. Son bölümde kuvvetli asal yakın halka ve kuvvetli asal ideal tanımlanarak bunların diğer ideallikler ile ilişkisi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve diğer bölümlerde ortak olarak kullanılan yapılar verilecektir. Yakın-halka teorisi üzerine çalışan neredeyse tüm matematikçiler için temel kaynak kabul edilen, ilk baskısı 1977 ve yenilenmiş baskısı 1983 yıllarında yapılan Günter Pilz'e ait "Near-rings" [17] kitabı, bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Yakın-halkalar, genelleştirilmiş halkalardır. Halkalardan farklı olarak, bir yakın-halkada ilk işlem değişmeli olmak zorunda değildir ve ikinci işlemin birinci işlem üzerine tek yönlü dağılma özelliği olması yeterlidir. Bu tanım açık olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.1. [17] Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N,.)$ bir yarı grup,

c) $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer c) şıkkı yerine,

$$\forall x,y,z \in N \text{ için } x.(y+z) = x.y + x.z$$

alınırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir.

Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler. Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir. Bazı yakın-halka örnekleri aşağıdadır.

Örnek 2.1.2. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma) = \{\, f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3. $(N,+)$ bir grup ve $\forall x, y \in N$ için çarpma işlemi;

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu işlemler altında N bir yakın-halkadır. Bu yakın-halka literatürde, bazen, aşikar yakın-halka adıyla karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 2.1.4. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnekler 2.1.5. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun etkisiz elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

a) $M_0(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma \}$

b) $M_c(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ sabit} \}$

c) $M_c^0(\Gamma) = \{ f_\gamma : \Gamma \to \Gamma \mid \gamma \in \Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta) = \begin{cases} 0_\Gamma & , \delta = 0 \\ \gamma & , \delta \neq 0 \end{cases} \}$

Özellikler 2.1.6. [17] N bir yakın-halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

a) $\forall x \in N$ için, $0x = 0$ dır.

b) $\forall x, y \in N$ için, $(-x)y = -xy$ dir.

İspat : a) $\forall x \in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x$$

ve dolayısıyla $0x = 0$ bulunur.

b) $\forall x, y \in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılarak,

$$(-x)y = (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not : Bir N yakın-halkasında, her zaman, $\forall x, y \in N$ için $x0=0$ ve $x(-y)=-xy$ sağlanmayabilir. Mesela, Örnek 2.1.2'de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında, $f, g \in M(\Gamma)$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f 'nin orjinden geçmesiyle ve

$$f \circ (-g) = -(f \circ g)$$

olması ise f 'nin bir tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. [17] N bir yakın-halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı,

b) $N_c = \{n \in N \mid n0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n' \in N \text{ için } nn' = n\}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c 'de birer yakın-halkadır.

Örnek 2.1.8. [17] $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0 &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = 0\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f(0) = 0\} \\ &= M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = f\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

$N = N_0$ ise N yakın-halkasına 0-simetrik ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına sabit yakın-halka denir. Örnek 2.1.8'den görüleceği gibi, $M_0(\Gamma)$ bir 0-simetrik ve $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Teorem 2.1.9. [7] Bir N yakın-halkası için $N = N_0 + N_c$ dir.

İspat: $n \in N$ için,

$$[n-(n0)]0 = [n+((-n)0)]0 = n0 + ((-n)0)0 = n0 + (-n)0 = 0$$

Dolayısıyla,

$$n-(n0) \in N_0$$

dır. Aynı zamanda,

$$n0 \in N_c$$

olduğu görülebilir. O halde,

$$n = [n-(n0)] + (n0)$$

olduğundan ispat tamamdır.

$(G,+)$ bir grup, $(N,+)$ ve $(K,+)$'da iki alt grubu olsun. Eğer, $N \cap K = \{0\}$, $N + K = G$ ve $(N,+)$ alt grubu $(G,+)$'da normal ise, $(G,+)$ grubuna $(N,+)$ alt grubunun $(K,+)$ alt grubuyla bir yarı-direkt çarpımı adı verilir.

Sonuç 2.1.10. [7] Bir $(N,+,.)$ yakın-halkası için, $(N,+)$ grubu, $(N_0,+)$'nın $(N_c,+)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: $x \in N_0 \cap N_c$ olsun. Bu durumda,

$$x = n0$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır ve

$$x0 = 0$$

dır. O halde,

$$0 = x0 = (n0)0 = n(00) = n0 = x$$

yani, $N_0 \cap N_c = \{0\}$ dır. Teorem 2.1.9'dan $N = N_0 + N_c$ dir. Son olarak, $(N_0,+)$'nın $(N,+)$'da normal olduğunu gösterelim. Eğer $m \in N_0$ ve $y \in N$ ise, bu durumda,

$$(y+m-y)0 = (y0) + (m0) + (-y)0 \tag{2.1}$$

burada,

$$m0 = 0$$

olduğundan, (1) ifadesi,

$$= (y0) + (-y)0 = 0$$

halini alır. Bu ise, $(N_0,+)$ 'nın $(N,+)$ 'da normal olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.11 [17] $d \in N$ ve $\forall x, y \in N$ için, $(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer,

$$d(x+y) = dx + dy \tag{2.2}$$

oluyorsa, $d \in N$ 'ye bir dağılmalı eleman denir. N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir.

b) Eğer $(N,+)$ değişmeli ise N 'ye bir abelyen yakın-halka, $(N,.)$ değişmeli ise, N 'ye bir komutatif yakın-halka, $(N,.)$ birimli ise N 'ye birimli bir yakın-halka denir. Eğer $N = N_d$ ise, N 'ye bir dağılmalı yakın-halka adı verilir.

c) Eğer $(N-\{0\},.)$ bir grup ise, N 'ye bir yakın-cisim denir.

2.2. N-Gruplar

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara taşınmasıyla elde edilmiş olan N-grup, yani N üzerinde yakın-modül kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.1. [17] $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{aligned} \mu : N \times \Gamma &\to \Gamma \\ (n,\gamma) &\to n\gamma \end{aligned}$$

alalım. Eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartları sağlanıyorsa, (Γ, μ) ikilisine bir N-grup, yani N üzerinde yakın-modül denir. Kısaca, N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Örnekler 2.2.2. a) N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times N & \to & N \\ (x, y) & \to & xy \end{array}$$

altında $(N,+)$ bir N-gruptur. Bu N-grup, kısaca N^N ile gösterilir.

b) Γ bir grup olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} \mu : M(\Gamma) \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (f, \gamma) & \to & f(\gamma) \end{array}$$

altında, Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur. Gerçekten, $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(f+g)\gamma = (f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

ve

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(g\gamma)$$

sağlanır.

N-grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $0\gamma = 0_{\Gamma}$,

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için, $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için, $x0_{\Gamma} = 0_{\Gamma}$,

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için, $n\gamma = n0_{\Gamma}$ dır.

İspat: a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

ve dolayısıyla $0\gamma = 0_{\Gamma}$ dır.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için,

$$(-x)\gamma = (0-x)\gamma = 0\gamma - x\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -x\gamma$$

dır.

c) $\forall x \in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$n\gamma = (n0)\gamma = n(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

elde edilir.

2.3. Alt Yapılar

Tanım 2.3.1. N bir yakın-halka ve $(M,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M'ye N'nin bir alt yakın-halkası denir.

Örnek 2.3.2. N_0 ve N_c, N yakın-halkasının alt yakın-halkalarıdır. Gerçekten, $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

yani, $(N_0,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubudur. $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

dır. O halde $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur. Şimdi, $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = x - y$$

yani, $x - y \in N_c$ olur. Bu ise, $(N_c,+)$ grubunun $(N,+)$'nın bir alt grubu olduğunu gösterir. $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = xy$$

dır. O halde $N_c N_c \subseteq N_c$ elde edilir.

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ'nın

$$N\Delta \subseteq \Delta$$

şartını sağlayan, bir Δ alt grubuna, Γ'nın bir N-alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

2.4. Homomorfizm ve İdealler

Tanım 2.4.1. N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \tag{2.3}$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y) \tag{2.4}$$

şartları sağlanıyorsa, h dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir.

Tanım 2.4.2. N bir yakın-halka, Γ ve Ψ iki N-grup olsun. Bu durumda, eğer $h: \Gamma \to \Psi$ dönüşümü, $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$h(\gamma + \delta) = h(\gamma) + h(\delta)$$

ve

$$h(n\gamma) = nh(\gamma)$$

şartlarını sağlıyorsa, h dönüşümüne bir N-homomorfizm denir.

Bu tanımlarla beraber, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm kavramları için, yakın-halka teorisinde farklı bir tanım yoktur. Eğer N yakın-halkasından M yakın-halkasına bir monomorfizm, yani birebir homomorfizm, varsa N yakın-halkası M'ye gömülebilirdir denir. Aynı tanımlar, N-gruplar için de geçerlidir.

Önerme 2.4.3. [7] N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ yakın-halka homomorfizmi olsun. Bu durumda,

a) $h(N)$ görüntüsü, M'nin bir alt yakın-halkasıdır.

b) Eğer T, M 'nin bir alt yakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$ 'de N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_c) \subseteq M_c$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1}'de bir izomorfizmdir.

İspat: **a)** $h(N)$'nin M'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Şimdi, $a = h(x), b = h(y) \in h(N)$ alalım. O halde,

$$ab = h(x)h(y) = h(xy) \in h(N)$$

olur. Bu ise, $h(N)$'nin, M 'nin bir alt yakın-halkası olduğunu gösterir.

b) T M 'nin bir alt yakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$'nin N 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Eğer, $h(x), h(y) \in T$ ise,

$$h(xy) = h(x)h(y) \in T$$

yani,

$$xy \in h^{-1}(T)$$

olur. Dolayısıyla $h^{-1}(T)$ N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

olur. Bu ise, $h(N_0) \subseteq M_0$ olduğu anlamına gelir.

d) $\forall n_c \in N_c$ için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)h(0_N) = h(n_c 0_N) = h(n_c)$$

elde edilir. Buradan, $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucuna ulaşılır.

e) $h: N \to M$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda, $h^{-1}: M \to N$ bir grup izomorfizmidir. Şimdi, $u, v \in M$ alalım. Bu durumda, $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak şekilde tek $x, y \in N$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} h^{-1}(uv) &= h^{-1}(h(x)h(y)) \\ &= h^{-1}(h(xy)) \\ &= xy \\ &= h^{-1}(h(x))h^{-1}(h(y)) \\ &= h^{-1}(u)h^{-1}(v) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, ispatı tamamlar.

Örnek 2.4.4. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} h_\gamma : N &\to \Gamma \\ n &\to n\gamma \end{aligned}$$

dönüşümü, bir N-homomorfizmdir.

Tanım 2.4.5. [17] N bir yakın-halka ve I N'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I'ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I < N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I N'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I N'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I <_r N$ ve $I <_l N$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer Γ'nın bir Δ normal alt grubu, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall \delta \in \Delta$ ve $\forall n \in N$ için,

$$n(\gamma + \delta) - n\gamma \in \Delta$$

şartını sağlıyorsa, Δ'ya Γ'nın bir ideali denir ve $\Delta <_N \Gamma$ ile gösterilir.

Not: a) Bir N yakın-halkasının sol idealleri ile N^N 'nin idealleri çakışıktır.

b) N bir yakın-halka ve $I < N$ ise, N/I bölüm yakın-halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak, Γ bir N -grup ve $\Delta <_N \Gamma$ için, Γ/Δ bölüm N -grubu tanımı verilebilir.

c) $\{0\}$ ve N , N yakın-halkasının idealleridir. Bunlara N 'nin aşikar idealleri denir. Benzer şekilde, $\{0_\Gamma\}$ ve Γ, N yakın-halkasının Γ N -grubunun aşikar idealleridir.

d) N ve M iki yakın-halka ve $h \in Hom(N, M)$ ise,

$$\text{çek}h = \{n \in N \mid h(n) = 0_M\}$$

cümlesine h homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 2.4.7. [17] Eğer N yakın-halkasının, bir M alt yakın-halkası için, $MN \subseteq M$ ve $NM \subseteq M$ şartları sağlanıyorsa, M N yakın-halkasının bir invaryant alt yakın-halkasıdır denir. Burada N 'nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır.

Örnek 2.4.8. [17] N bir yakın-halka olsun. Bu durumda,

a) $N_0 <_l N$ dir, fakat $N_0 < N$ olmak zorunda değildir.

b) N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır, fakat ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir.

Bunların doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

a) $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$(x + n - x)0 = x0 + n0 - x0 = x0 - x0 = 0$$

yani, N_0 N 'nin bir normal alt grubudur. Şimdi, $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$[x(y + n) - xy]0 = x(y0 + n0) - xy0 = xy0 - xy0 = 0$$

olur. Bunun anlamı $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$x(y+n) - xy \in N_0$$

olmasıdır. Bu ise $N_0 <_l N$ olduğunu gösterir. Şimdi, $N_0 < N$ olmak zorunda olmadığını göstermek için, bir örnek yeterlidir. R reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$ olsun. $1 \in M(R)$ ile birim dönüşüm gösterilirse, $1 \in N_0 = M_0(R)$ dir. $\phi \in M(R)$ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \phi : R &\rightarrow R \\ x &\rightarrow 1_R \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(1 \circ \phi)(0) = 1(1_R) = 1_R$$

yani,

$$1 \circ \phi \notin M_0(R) = N_0$$

olur. Bu ise, $M_0(R)$ 'nin $M(R)$ 'nin bir ideali olmadığını gösterir.

b) $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(xn)0 = x(n0) = xn$$

yani, $NN_c \subseteq N_c$ dir. Yine, $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(nx)0 = n0 = n = nx$$

olduğundan, $N_c N \subseteq N_c$ olur. O halde N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. N_c N 'nin genelde ne sağ ne de sol idealidir, çünkü $(N_c,+)$ $(N,+)$ 'nın genelde bir normal alt grubu değildir. Örneğin, $(\Gamma,+)$ abelyen olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları $\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$\begin{aligned} f_\gamma : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ x &\rightarrow \gamma \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşüm ise, bu durumda,

$$(1+f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur, fakat

$$(1+f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

dır. Bu ise,

$$1+f_\gamma - 1 \notin M_c(\Gamma)$$

olduğunu gösterir. Buradan, $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$'nın bir normal alt grubu değildir. O halde, $M_c(\Gamma)$'nın $M(\Gamma)$'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ'nın bir abel grubu olmasıdır.

Özellikler 2.4.9. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda;

a) $L <_l N$ ise $N_0 L \subseteq L$ dir.

b) $N = N_0$ olması için gerek ve yeter şart N yakın-halkasının her bir sol idealinin N^N'nin bir N-alt grubu olmasıdır.

c) $N = N_0$ ise, Γ N-grubunun her Δ ideali, Γ'nın bir N-alt grubudur.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma \leq_N \Gamma$ dır. Yani, $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ N-grubunun bir N-alt grubudur.

e) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için, $N0_\Gamma = N_c 0_\Gamma \subseteq \Delta$ dır. Dolayısıyla, $N0_\Gamma = N_c 0_\Gamma$ Γ N-grubunun tüm N-alt grupları içerisinde en küçük olanıdır.

Tanım 2.4.10. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. N'nin (Γ'nın) aşikar olmayan ideali yoksa, N'ye (Γ'ya) basittir denir. Eğer Γ'nın $N0_\Gamma$ ve Γ dışında N-alt grubu yoksa, Γ'ya N-basittir denir.

$\{0\}$ ideali, bir N yakın-halkasının tüm ideallerinin cümlesinde daima minimal olduğundan, aşağıdaki tanımlar halka teorisinde olduğu gibidir.

Tanım 2.4.11. [17] N bir yakın-halka olsun. N'nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin cümlesinde minimal olan ideale N'nin minimal ideali denir.

Benzer olarak, minimal sağ ve sol ideal tanımları verilebilir. Bu tanımların dualleri maksimal ideal tanımlarıdır.

Tanım 2.4.12. [17] N bir yakın-halka, Γ bir N-grup, Δ_1 ve Δ_2 Γ'nın herhangi iki alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$(\Delta_1 : \Delta_2)_N = \{n \in N \mid n\Delta_2 \subseteq \Delta_1\}$$

ile verilir. $\gamma \in \Gamma$ için, kısalık açısından, $(\{\gamma\} : \Delta) = (\gamma : \Delta)$ alınacaktır.

$$(0_\Gamma : \Delta)_N = \{n \in N \mid n\Delta \subseteq \{0_\Gamma\}\}$$

cümlesine $\Delta \subseteq \Gamma$'nın sıfırlayanı denir. Herhangi bir karışıklık içermeyen durumlarda, bu cümle $(0 : \Delta)$ ile gösterilecektir.

Özellikler 2.4.13. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda;

a) Eğer Δ_1 Γ'nın herhangi bir alt grubu (normal alt grubu, N-alt grubu, ideali) ise, $(\Delta_1 : \Delta_2)$ cümlesi de, N^N'nin bir alt grubu (normal alt grubu, N-alt grubu, ideali) olur. Burada Δ_2 Γ'nın herhangi bir alt cümlesidir.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(0 : \gamma) <_l N$$

dir.

c) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için,

$$(0 : \Delta) < N$$

dir.

d) Δ, Δ_i $(i \in I)$ Γ'nın alt cümleleri olsunlar. Bu durumda,

$$\bigcap_{i \in I} (\Delta_i : \Delta) = (\bigcap_{i \in I} \Delta_i : \Delta)$$

ve

$$\bigcup_{i \in I} (\Delta_i : \Delta) \subseteq (\bigcup_{i \in I} \Delta_i : \Delta)$$

dır.

e) $\Delta \subseteq \Gamma$ ise,

$$(0 : \Delta) = \bigcap_{\delta \in \Delta} (0 : \delta) \text{ dır.}$$

f) N yakın-halkasının, herhangi iki Γ ve Γ' N-grupları N-izomorfik ise, bu durumda,

$$(0_{\Gamma} : \Gamma) = (0_{\Gamma'} : \Gamma')$$

dır.

Tanım 2.4.14. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, eğer $(0_{\Gamma} : \Gamma) = 0$ ise, Γ 'ya bir faithful N-grup denir.

Özellikler 2.4.15. [17] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer, Γ N 'nin bir faithful N-grubu ise, bu durumda;

a) Eğer Γ abelyen bir grup ise, N yakın-halkası da abelyendir.

b) Eğer $\forall n \in N$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$n(\gamma + \delta) = n\gamma + n\delta \tag{2.5}$$

oluyorsa, bu taktirde $N = N_d$ dir.

Teorem 2.4.16. [14] Her N yakın-halkası için, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde en az bir Γ grubu vardır.

İspat: Γ, $(N,+)$ grubunu ihtiva eden bir grup olsun. $x \in N$ için,

$$\begin{aligned} f_x : \Gamma &\to \Gamma \\ \gamma &\to \begin{cases} x\gamma & ,\gamma \in N \\ x & ,\gamma \notin N \end{cases} \end{aligned}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $\forall x, y \in N$ için,

$$f_x + f_y = f_{x+y}$$

ve

$$f_x \circ f_y = f_{xy}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde,

$$\begin{aligned} h : N &\to M(\Gamma) \\ x &\to f_x \end{aligned}$$

dönüşümü bir yakın-halka homomorfizmidir. Eğer

$$h(x) = h(y)$$

ise,

$$f_x = f_y$$

dir. Özel olarak, $\forall \gamma \in \Gamma - N$ için,

$$x = f_x(\gamma) = f_y(\gamma) = y$$

elde edilir. Buradan, h dönüşümü bir yakın-halka monomorfizmi, yani N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilirdir.

Bu teoremin bir çok kullanışlı sonucu vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.4.17. [17] N bir yakın-halka olsun.

a) Eğer N abelyen ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ abel grubu vardır.

b) Eğer N sonlu ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ sonlu grubu vardır.

c) Eğer N sıfır-simetrik ise, N yakın-halkası $M_0(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

d) Eğer N sabit bir yakın-halka ise, N yakın-halkası $M_c(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

Tanım 2.4.18. [17] $(A,\leq)$ kısmi sıralı bir cümle olsun. Eğer A cümlesinin boştan farklı her alt cümlesi en az bir minimal elemana sahip ise, A cümlesi minimum şartını sağlar denir. Eğer A cümlesinin elemanlarının her $a_1 \geq a_2 \geq ...$ zinciri sonlu adımdan sonra sonlanıyorsa, yani her bir $a_1 \geq a_2 \geq ...$ zinciri için, $a_n = a_{n+1} = ...$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı varsa, A cümlesine azalan zincir şartını (D.C.C) sağlar denir. Bu tanımda "$\leq$" yerine "$\geq$" alınırsa, minimum şartı yerine maksimum şartı ve azalan zincir şartı yerine artan zincir şartı (A.C.C) tanımı verilmiş olur.

3. YAKIN-HALKALARIN ASAL İDEALLERİ

N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \} \tag{3.1}$$

ile tanımlanmıştır. Buradan bir n doğal sayısı için, A^n tanımı açıktır. N bir yakın-halka ve $A, B < N$ olsun. Bu taktirde, AB çarpımı bir ideal olmayabilir. Hatta bu çarpım, $(N,+)$ grubunun bir alt yarı grubu dahi olmak zorunda değildir.

3.1. 0-Asal İdealler

Tanım 3.1.1. [21] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer $\forall I, J < N$ için, $IJ \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda P'ye N yakın-halkasının bir 0-asal ideali denir.

N bir yakın-halka ve $A \subseteq N$ olsun. (A) ile N'nin A cümlesi tarafından üretilen ideali gösterilmiştir. Kısalık açısından, bir $n \in N$ için, $(\{n\})$ yerine (n) gösterimi kullanılmıştır.

Aşağıdaki önerme 0-asal ideal kavramının bazı denkliklerini vermektedir.

Önerme 3.1.2. [21] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- **a)** P bir asal idealdir.
- **b)** $\forall I, J < N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektirir.
- **c)** $\forall i, j \in N$ için, $i \notin P$ ve $j \notin P$ ise, $(i)(j) \not\subset P$ dir.
- **d)** $\forall I, J < N$ için, $I \supset P$ ve $J \supset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir.
- **e)** $\forall I, J < N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir

İspat a)$\Rightarrow$b) : $P < N$ asal ve $\forall I, J < N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olsun.

$IJ \subseteq (IJ) \subseteq P$

ve P asal olduğundan, Tanım 3.1.1'den $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. Dolayısıyla b) $\Rightarrow$a) durumu da elde edilmiş olur. a) $\Leftrightarrow$e)'nin ispatı da yine Tanım 3.1.1'den açıktır.

a)$\Rightarrow$c) : $P < N$ asal ve $(i)(j) \subseteq P$ olsun. Bu durumda, P asal olduğundan $(i) \subseteq P$ veya $(j) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla $i \in P$ veya $j \in P$ elde edilir.

c) $\Rightarrow$ **d) :** Kabul edelim ki c) sağlansın ve $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $I, J < N$ bulunsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i)(j) \not\subset P$$

ve dolayısıyla

$$IJ \not\subset P$$

elde edilir.

d) $\Rightarrow$ **e) :** Kabul edelim ki (d) sağlansın ve $\forall I, J < N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ olsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i) + P \supset P$$

ve

$$(j) + P \supset P$$

dir. O halde (d)'den,

$$((i) + P)((j) + P) \not\subset P$$

dir. Dolayısıyla,

$$(i' + p)(j' + p') \notin P$$

olacak şekilde $\exists i' \in (i), \exists j' \in (j)$ ve $\exists p, p' \in P$ vardır. Buradan,

$$i'(j' + p') - i'j' + i'j' + p(j' + p') \notin P$$

olur. Fakat $P < N$ olduğundan,

$$i'(j' + p') - i'j' \in P$$

ve

$$p(j' + p') \in P$$

dir. Bu durumda,

$$i'j' \notin P$$

olmalıdır. Bu ise,

$$IJ \not\subset P$$

olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.3. [12] N bir yakın-halka olsun. Eğer N'nin sıfır ideali asal ise N'ye bir asal yakın-halka denir.

Örnek 3.1.4. [17] Eğer N bir sabit yakın-halka ($N = N_c$) ise, bu taktirde $(N,+)$ 'nın her normal alt grubu bir asal idealdir. O halde her bir sabit yakın-halka, bir asal yakın-halkadır.

Önerme 3.1.5. [17] N bir yakın-halka olsun. Eğer N bir basit yakın-halka ise, bu durumda N ya bir asal yakın-halka ya da bir sıfır-yakın-halkadır.

İspat: Eğer N bir basit yakın-halka ise, sıfır ve kendisinden başka ideali yoktur. O halde, asal ideallik tanımından,

$$\{0\}N = \{0\},\ \{0\}\{0\} = \{0\},\ N\{0\} = \{0\} \tag{3.2}$$

veya

$$NN = \{0\} \tag{3.3}$$

durumları olabilir. Buradan ya $\{0\}$ bir asal ideal ya da $N = \{0\}$ olduğu görülür.

3.1.1. Yarı-asal İdealler

Tanım 3.1.1.1. [16] N bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. Eğer $\forall J < N$ için, $J^2 \subseteq I$ olması $J \subseteq I$ olmasını gerektiriyorsa, I 'ya N yakın-halkasının bir yarı-asal ideali denir.

Asal ideal ve yarı-asal ideal tanımlarından da görüleceği gibi, her asal ideal aynı zamanda yarı-asaldır. Aşağıdaki önerme ile yarı-asal tanımına denk kavramlar Önerme 3.1.2'ye benzer şekilde verilmiştir.

Önerme 3.1.1.2. [16] N bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) I bir yarı-asal idealdir.

b) $\forall J < N$ için, $(J^2) \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.

c) $\forall n \in N$ için, $(n)^2 \subseteq I$ ise $n \in I$ dır.

d) $\forall J < N$ için, $J \supset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

e) $\forall J < N$ için, $J \not\subset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

Bu önermenin ispatı, Önerme 3.1.2'nin ispatıyla benzer olduğundan ihmal edilmiştir

Tanım 3.1.1.3. [16] N bir yakın-halka olsun. Eğer N 'nin sıfır ideali yarı-asal ise N 'ye bir yarı-asal yakın-halka denir.

3.2. 1-Asal İdealler

Tanım 3.2.1. [15] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer N yakın-halkasının A ve B sol idealleri için, $AB \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, P 'ye N 'nin bir 1-asal ideali denir.

Lemma 3.2.2. N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda P 1-asal ise, 0-asaldır.

İspat: $P < N$ 1-asal ve $A, B < N$ için, $AB \subseteq P$ olsun. A ve B aynı zamanda N yakın-halkasının sol idealleri ve P 1-asal olduğundan, Tanım 3.2.1'den $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$, yani P 0-asaldır.

Tanım 3.2.3. [12] N bir yakın-halka olsun. Eğer N 'nin sıfır-ideali 1-asal ise N 'ye 1-asal yakın-halka denir.

Lemma 3.2.2 ile 1-asallığın 0-asallığı gerektirdiği verilmişti. Şimdi, bunun tersinin doğru olmadığı, yani 0-asallığın 1-asallığı gerektirmediği aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 3.2.4. [5] $(\Gamma,+)$ bir sonlu grup ve $\emptyset \neq \Delta$ Γ 'nın aşikar olmayan bir alt grubu olsun.

$$M_0(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0) = 0 \}$$

yakın-halkasını düşünelim.

$$K = \{ f \in M_0(\Gamma) \mid f(\Delta) \subseteq \Delta \}$$

alınırsa, K $M_0(\Gamma)$ 'nın bir alt yakın-halkasıdır. K 'nın kendisinden ve sıfırdan farklı tek ideali,

$$A = (0 : \Delta)_K = \{ k \in K \mid k\Delta = 0 \}$$

dır. $A^2 \neq 0$ olduğundan, K 0-asal yakın-halkadır. K 'nın kendisinden farklı tek 1-asal ideali A 'dır. Dolayısıyla, K 'nın sıfır-ideali 1-asal değil, yani K 1-asal bir yakın-halka değildir.

Aşağıda, 1-asal yakın-halkalar için bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.5. [5] N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. N 'nin tüm sol idealleri, $\{0\}$ ve N 'dir. $N^2 \neq 0$ olduğundan, $\{0\}$ N 'nin 1-asal ideali, yani N 1-asal bir yakın-halkadır.

3.3. 2-Asal İdealler

Tanım 3.3.1. [13] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer N'nin $AB \subseteq P$ olacak şekilde ki her A ve B N-alt grupları için, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P'ye N'nin bir 2-asal ideali denir. Eğer N'nin sıfır-ideali 2-asal ise, N'ye bir 2-asal yakın-halka adı verilir.

Aşağıdaki lemma, 0-simetrik bir yakın-halkanın 2-asal ideallerinin aynı zamanda 1-asal olduğunu verir.

Lemma 3.3.2. [5] N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer P 2-asal bir ideal ise, bu durumda P 1-asaldır.

İspat: N 0-simetrik, $P < N$ 2-asal ve $A, B <_l N$ için $AB \subseteq P$ olsun. N yakın-halkası 0-simetrik olduğunda, N'nin her sol idealinin, aynı zamanda N'nin bir N-alt grubu olduğunu gösterelim. $A <_l N$ için, sol ideallik tanımından, $(A,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubudur. Şimdi, $NA \subseteq A$ olduğunu göstermeliyiz. $A <_l N$ olduğundan, $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$na = n(a+0) - n0 \in A$$

dır. Dolayısıyla $A \leq_N N$ dir. O halde, $AB \subseteq P$ ve $A, B \leq_N N$ dir. P 2-asal olduğundan, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. O halde, P 1-asaldır.

Lemma 3.3.2'de N yakın-halkasının 0-simetrik olma şartı kaldırılamaz. Yani, $P < N$ 0-simetrik olmayan bir N yakın-halkasının, 2-asal bir ideali ise, P 1-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu kanıtlar.

Örnek 3.3.3. [5] N Klein-4-grup üzerinde, çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen bir yakın-halka olsun.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

Bu durumda N ’nin tüm N -alt grupları N ve $I=\{0,1\}$ dir. $I^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat, $J=\{0,2\} <_l N$ ve $J^2=\{0\}$, dolayısıyla N 1-asal bir yakın-halka değildir.

Bu durumun tersi genelde doğru değildir. Yani, 0-simetriklik durumu olsa dahi, bir yakın-halkada 1-asallık 2-asallığı gerektirmez.

Örnek 3.3.4. [5] N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y=3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Örnek 3.2.5’den N yakın-halkası 1-asaldır. $I=\{0,1\}$ N ’nin $I^2=\{0\}$ olan bir N -alt grubudur. Dolayısıyla, N 2-asal bir yakın-halka değildir.

Teorem 3.3.5. [12] N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda, P nin 2-asal olması için gerek ve yeter şart $a(b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

3.4. 3-Asal İdealler

Tanım 3.4.1. [12] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer, $aNb \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir 3-asal ideali denir. Eğer N nin sıfır-ideali 3-asal ise, N ye bir 3-asal yakın-halka denir.

Önerme 3.4.2. [5] N bir yakın-halka ve $P < N$ 3-asal olsun. Bu durumda P 2-asaldır.

İspat: $P < N$ 3-asal ve $a,b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. $\forall b \in N$ için $Nb \leq_N N$ dir. O halde,

$$(b)_N \subseteq Nb$$

dir. Buradan,

$$a(b)_N \subseteq aNb \subseteq P$$

olur. P 3-asal olduğundan,

$$a \in P \text{ veya } b \in P$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 3.3.5 gereğince P 2-asaldır.

Sonuç 3.4.3. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ 3-asal olsun. Bu durumda P 1-asal ve dolayısıyla 0-asaldır.

İspat: Sırasıyla Önerme 3.4.2, Lemma 3.3.2 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak ispat görülür.

Bir N yakın-halkasının bir 2-asal ideali, aynı zamanda 3-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar.

Örnek 3.4.4. [5] N $Z_3 = \{0,1,2\}$ grubu üzerinde çarpma işlemi $\forall x, y \in Z_3$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y = 2 \\ 0 & , y \neq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Bu durumda N nin tüm N -alt grupları sadece $\{0\}$ ve N dir. $N^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat,

$$1N1 = \{0\}$$

dolayısıyla N bir 3-asal yakın-halka değildir.

3.5. Tam-Asal İdealler

Tanım 3.5.1. [2] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer $ab \in P$ olacak şekildeki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir tam asal ideali denir. Eğer N yakın-halkasının sıfır-ideali tam asal ise, N ye bir tam asal yakın-halka denir.

Yakın-halkaların tam asal idealleri üzerine yapılan çalışmalar, 1979 yılına kadar uzanır. İlk olarak bu kavram "2-tipinde asal ideal" adıyla tanımlanmıştır [19].

Örnek 3.5.2. [5] $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, N yakın-halkasının sıfır-ideali düşünülür ve çarpma işleminin tanımı göz önüne alınırsa, $xy = 0$ olacak şekilde $\forall x, y \in N$ için, $x = 0$ veya $y = 0$ olduğu görülür. O halde N bir tam asal yakın-halkadır.

Önerme 3.5.3. N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer P tam asal ise 3-asaldır.

İspat: $a, b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. O halde

$$aab \in P$$

dir. Burada P tam asal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Dolayısıyla P 3-asaldır.

3.6. E-Asal İdealler

E-asal idealler ilk olarak 1990 yılında tanımlanmış olup bir halka üzerinde e-asallık ile asallık kavramı birbirine denktir [3].

Tanım 3.6.1. [3] N bir yakın-halka olsun. Aşağıdaki koşullar altında N ye bir e-asal yakın-halka adı verilir.

a) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$ ve

b) Eğer $x, y \in N$ ve $0 \neq A$ N nin bir invaryant alt grubu ise, $\forall a \in A$ için $ax = ay$ iken $x = y$.

Eğer $P < N$ ve N/P bir e-asal yakın-halka ise, P ye N nin bir e-asal ideali denir.

Aşağıdaki lemma ile, e-asallık için alternatif bir tanım verilmiştir.

Lemma 3.6.2. [3] N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) (i) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$

(ii) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

c) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

İspat a)$\Rightarrow$b): N bir e-asal yakın-halka ise, Tanım 3.6.1'den, $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \neq 0$ ve N e-asal olduğundan $aNa \neq 0$, dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi, tümevarım yöntemi kullanılarak, A_k şu şekilde tanımlansın: $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \,\middle|\, \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \,\middle|\, n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A = \bigcup A_k$, N nin bir invaryant alt grubudur ve $0 \neq aN \subseteq A$ dır. $\forall u \in A$ için, $ux = uy$ dir. N bir e-asal yakın-halka olduğundan Tanım 3.6.1'den $x = y$ dir.

b)$\Rightarrow$a): $0 \neq A$ N yakın-halkasının bir invaryant alt grubu ve kabul edelim ki $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için $ax = ay$ olsun. $a \neq 0$ seçelim. A invaryant olduğundan, $\forall n \in N$ için $an \in A$ ve dolayısıyla $anx = any$ dir. O halde $x = y$ elde edilir.

c) $\Rightarrow$ **b):** Öncelikle belirtelim ki c) şartı 0-simetrikliği gerektirir. Gerçekten, eğer $a \in N$ ve $a0 \neq 0$ ise, bu durumda,

$$(a0)n(a0) = (a0)n0$$

olması c) den $a0 = 0$ çelişkisini getirir. O halde N 0-simetriktir. Şimdi kabul edelim ki $x \neq 0$ için $xNy = 0$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ için,

$$xny = 0 = xn0$$

ve buradan $y = 0$ elde edilir.

Tanım 3.6.1 ve Lemma 3.6.2'den N yakın-halkasının e-asal idealleri için aşağıdaki karakterizasyon elde edilir.

Sonuç 3.6.3. [3] N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P N nin bir e-asal idealidir.

b) Eğer $a \in N - P$, $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx - any \in P$ ise $x - y \in P$ dir.

Lemma 3.6.4. [3] N bir e-asal yakın-halka ise, 0-asaldır.

İspat: N bir e-asal yakın-halka ve $0 \neq A, B < N$ olsun. Bu durumda, $0 \neq a \in A$ ve $0 \neq b \in B$ için $anb \neq 0$ olacak şekilde en az bir $n \in N$ vardır. $anb \in AB$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $AB \neq 0$ dır. O halde Önerme 3.1.2 d) den N bir 0-asal yakın-halkadır.

Lemma 3.6.2 c) $\Rightarrow$ b) ispatından, herhangi bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik olduğu görüldü. Aşağıdaki teorem e-asal yakın-halkaların diğer bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.6.5. [13] N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) N nin her $0 \neq A$ sağ invaryant $(AN \subseteq A)$ alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

c) N nin her A invaryant alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

İspat a) $\Rightarrow$ **b) :** N bir e-asal yakın-halka ve $0 \neq A$ N nin bir sağ invaryant alt grubu olsun. Kabul edelim ki, $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için $ax = ay$ olsun. $0 \neq b \in A$ alalım.

$bN \subseteq A$ olduğundan $\forall n \in N$ için $bnx = bny$ dir. O halde N e-asal olduğundan $x = y$ elde edilir.

b) $\Rightarrow$ **c) :** İnvaryantlık, sağ invaryantlığı gerektirdiğinden ispatın bu yönü açıktır.

c) $\Rightarrow$ **a) :** $0 \neq a \in N$, $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx = any$ olsun. Öncelikle $N_c = 0$ yani N nin 0-simetrik olduğunu gösterelim. Eğer $N_c \neq 0$ ise, N_c N nin bir invaryant alt grubudur ve $\forall r, s \in N$, $\forall c \in N_c$ için,

$$cr = c = cs$$

dir. Fakat c) den, bu durum $r = s$ olmasını gerektirir ki, bu elbette bir çelişkidir. Dolayısıyla $N_c = 0$ yani N 0-simetriktir. Şimdi $aN \neq 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $aN = 0$ ise, $(a)N = 0$ dır. N 0-simetrik olduğundan, (a) N nin bir invaryant alt grubudur. Üstelik $\forall b \in (a)$ ve $\forall k, l \in N$ için,

$$bk = 0 = bl$$

dır. O halde c) den $k = l$ olmalıdır ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi Lemma 3.6.2 a) $\Rightarrow$ b) nin ispatındaki gibi, $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \;\middle|\; \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \;\middle|\; n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A = \bigcup A_k$ N nin bir invaryant alt grubudur ve $0 \neq aN \subseteq A$ dır. $\forall u \in A$ için, $ux = uy$ dir. O halde c) den $x = y$ elde edilir.

Lemma 3.6.2'den biliyoruz ki, eğer N bir e-asal yakın-halka ise, $0 \neq x, y \in N$ için $xNy \neq 0$, dolayısıyla N 3-asaldır.

Bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik ve 3-asal olduğu belirtilmişti. Şimdi bunun aksinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekle verilebilir.

Örnek 3.6.6. [5] $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\forall x \in N$ için $x0 = 0$ olduğundan, N 0-simetrik bir yakın-halkadır. Eğer $x, y \neq 0$ ise,

$$xNy = \{0, x\}$$

olur. Buradan $xNy = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ elde edilir. O halde N bir 3-asal yakın-halkadır. Şimdi $0 \neq x, y \in N$ ve $x \neq y$ alalım. Bu durumda eğer $n \neq 0$ ise,

$$xnx = xny = x$$

ve eğer $n = 0$ ise,

$$xnx = xny = 0$$

o halde $\forall n \in N$ için,

$$xnx = xny$$

dir. Fakat $x \neq y$ olduğundan, N bir e-asal yakın-halka değildir.

Özetle, yakın-halkalar üzerinde e-asallık 3-asallığı, 3-asallık 2-asallığı, 1-asallık 0-asallığı ve yakın-halka 0-simetrik ise 2-asallık 1-asallığı gerektirir. Bunların tersleri, yakın-halka 0-simetrik olsa dahi genelde doğru değildir.

Herhangi bir N yakın halkasının sabit kısmı N_C,N nin e-asal I idealini içerir.Özellikle eğer N e-asal yakın halka ise $N_C = \{0\}$ yani N sıfır simetriktir.

Önerme 3.6.7. [22] Keyfi bir N yakın halkasının her e-asal I ideali 3-asaldır.

İspat: $a, b \in N$ için $aNb \subseteq I$ olsun. $a \in I$ ise açıktır. $a \notin I$ alalım.

$N_c \subseteq I$ dır. Çünkü $I > N$ olduğundan $IN \subseteq I$ ve . $N_c \subseteq N$ dır.

$N_C \subseteq I$ olduğundan $anb - an0 \in I$ dır. Böylece $b - 0 \in I$ yani $b \in I$.

Önerme 3.6.8. [22] Keyfi bir N yakın halkasının e-asal I ideali 1-asaldır.

İspat: A ve B N yakın halkasının $AB \subseteq I$ olacak şekildeki sol idealleri olsun. $A \not\subset I$ ve $a \in A \setminus I$ alalım. $n \in N$ alalım ve $n = n_c + n_0$ n nin sabit kısmı ve sıfır simetrik kısmının bir ayrışımı olsun.

$\forall b \in B$ için $anb - an0 = a(n_c + n_0 b) - an_0 b + an_0 b - an0 \in I$ dır.

Çünkü $A_C \subseteq N_C \subseteq I > N$ ve $AN_0 B \subseteq AB \subseteq I$ dır.

Böylece $b \in I$ ve $B \subseteq I$ dır.

Önerme 3.6.9. [22] N bir yakın halka, $I < N$ e-asal ideal ve A, N nin invaryant alt grubu olsun. Bu durumda $A \cap I$, A yakın-halkasının e-asal idealidir.

İspat: N bir yakın halka, $I < N$ e-asal ideal ve A, N nin invaryant alt grubu olsun. $u \in A \setminus (A \cap I)$ ve $\forall a \in A$ için $uax - uay \in A \cap I$ olacak şekilde $x, y \in A$ alalım. Farz edelim ki, $x - y \notin A \cap I$ olsun. $x, y \in A$ olduğundan $x - y \notin I$ dır. I, N nin e-asal ideali olduğundan, $unx - uny \notin I$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Aynı yöntemle $um(unx) - um(uny) \notin I$ olacak şekilde bir $m \in N$ bulabiliriz. Fakat A, N nin invaryant alt grubudur ve $u \in A$ dır. Böylece $u(mun)x - u(mun)y \in A \cap I$ istenen çelişkiyi verir.

0-simetrik yakın-halkalardaki idealler invaryant olduğundan aşağıdaki sonucu alırız:

Sonuç 3.6.10. [22] E-asal N yakın-halkasının invaryant alt grubu A olsun. Bu durumda A e-asal yakın-halkadır. Özellikle $A < N$ ise bu sağlanır.

4. KUVVETLİ ASAL YAKIN-HALKALAR

Tanım 4.1. [10] N bir yakın-halka, $S \subseteq N$ olmak üzere, S'nin sıfırlayanı $r(S)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$r(S) = \{n \in N | Sn = 0\}$$

Önerme 4.2. [6] N bir yakın-halka, X N'nin sol invaryant alt cümlesi olsun. $a \in N$ için $aX = 0$ ise $\langle a \rangle X = 0$ dır.

İspat: $aX = 0$ ise $a \in (0{:}X)$ dır.

$(0{:}X) = \{n \in N | nX = 0\}$ N'nin bir idealidir. Gerçekten;

i. $\forall\, n_1, n_2 \in (0{:}X)$ için

$$(n_1 - n_2)X = n_1X - n_2X = 0$$

olur. Buradan $(n_1 - n_2) \in (0{:}X)$ dır.

ii. $\forall\, n \in N, u \in (0{:}X)$ için,

$$(n + u - n)X = nX + uX - nX = nX + 0 - nX = 0$$

olur. Buradan $(n + u - n) \in (0{:}X)$ dır.

iii. Sağ ideallik şartını gösterelim. Kabulden X sol invaryant olduğundan

$\forall\, u \in (0{:}X), \forall\, n \in N$ için

$$(un)X = u(nX) \subseteq uX = 0$$

$$\Rightarrow (un)X = 0$$

$$\Rightarrow un \in (0{:}X)$$

$$\Rightarrow (0{:}X)N \subseteq (0{:}X) \quad \text{olur.}$$

iv. Sol ideallik şartını gösterelim.

$\forall\, n_1, n_2 \in N, \forall\, u \in (0{:}X)$ için,

$$[n_1(n_2 + u) - n_1n_2]X = n_1(n_2X + uX) - (n_1n_2)X$$

$$= n_1(n_2X) - (n_1n_2)X = 0$$

dır. Buradan $(0:X) \lhd N$ olur. Buradan da $\langle a \rangle \subset (0:X)$ ve dolayısıyla $\langle a \rangle X = 0$ elde edilir.

Sonuç 4.3. [9] $0 \neq a \in N$ ve $aN = 0$ ise $< a > N = 0$ dır.

Sonuç 4.4. [10] N bir yakın-halka olsun. Eğer N'nin her ideali $r(F) = 0$ olacak şekilde bir F alt cümlesi içeriyorsa, bu durumda her bir $0 \neq a \in N$ için $ay \neq 0$ olacak şekilde en az bir $y \in N$ vardır.

İspat: $0 \neq a \in N$ için ve F, $r(F) = 0$ olacak şekilde $< a >$ nın bir alt cümlesi olsun. Buradan $\forall\, 0 \neq a \in N$ için $Fn \neq 0$ dır. Dolayısıyla $F \subseteq < a >$ olduğundan $< a > N \neq 0$ dır. Önerme 4.2.'den $aN \neq 0$ yani $ay \neq 0$ olacak şekilde en az bir $y \in N$ vardır.

Teorem 4.5. [10] $N = N_0$ bir yakın-halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

i. $a \in N$, $a \neq 0$ ise N nin sonlu bir F alt cümlesi vardır $\ni r(aF) = 0$

ii. N nin sıfırdan farklı her ideali sonlu bir F alt cümlesi içerir $\ni r(F) = 0$

iii. N kuvvetli asal yakın-halkadır.

İspat: i.⇒ii. $0 \neq I \lhd N$ ve $0 \neq a \in I$ olsun. N kuvvetli asal olduğundan $aFx = 0$ ise $x = 0$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq N$ vardır. $F_1 = aF$ olsun. Bu durumda $F_1 \subseteq I$ ve F_1 sonludur. Üstelik,

$$r(F_1) = \{n \in N \mid F_1 n = 0\} = \{n \in N \mid aFn = 0\} = 0 \text{ dır.}$$

ii.⇒iii. Kabulden, $N \neq 0$ bir ideal olduğundan $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq N$ vardır. Dolayısıyla $Fx = 0$ ise $\forall\, 0 \neq a \in N$ için $N = N_0$ olduğundan $aFx = 0$ olduğundan $x = 0$ dır. Bu durumda N kuvvetli asal yakın-halkadır.

iii.⇒i. Kabulden, her bir $0 \neq a \in N$, $\forall\, 0 = x \in N$ için $aFx = 0$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq N$ vardır. Buradan

$$r(aF) = \{x \in N \mid aFx = 0\} = 0$$

olduğu görülür.

Tanım 4.6. [6] N bir yakın-halka olmak üzere; her bir $0 \neq a \in N$ ve $\forall\ 0 \neq x \in N$ için $aFx \neq 0$ olacak şekilde N'nin bir F sonlu alt cümlesi varsa, N' ye **kuvvetli asal yakın-halka** denir.

Bir yakın-halkanın kuvvetli asal ideali aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.7. [6] $P \lhd N \; ve \; {}^{N}/_{P}$ kuvvetli asal yakın-halka ise N'nin P ideali kuvvetli asal ideal olarak adlandırılır. Yani;

Her bir $a \in N - P$ için öyle bir $x \in N - P$ var ve N nin her sonlu F alt cümlesi için $aFx \not\subset P$ ise P' ye N'nin kuvvetli asal ideali denir.

Örnek 4.8. $(\mathbb{Z}_6 \, ,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem aşağıdaki tablo ile verilen $N = (\mathbb{Z}_6 \, ,+,\cdot)$ yakın-halkasını alalım.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

$\mathbb{Z}_6$ 'nın $P = \{0,3\}$ ideali için bölüm yakın-halkası $\mathbb{Z}_6/P = \{P, 1+P, 2+P\}$ için ikinci işleme göre işlem tablosu aşağıda gösterilmiştir.

.	P	1+P	2+P
P	P	P	P
1+P	P	1+P	2+P
2+P	P	2+P	1+P

Buna göre, $r(F) = \{n \in N/P \mid F.n = P\} \;\; = P$ bulunur. Buradan $\{0,3\}$ ideali kuvvetli asaldır.

Üçüncü bölümde tanımı verilen 3-asal yakın-halka ile kuvvetli asal yakın-halka arasında aşağıdaki ilişki söz konusudur.

Önerme 4.9. N bir yakın-halka olsun. N kuvvetli asal ise N 3- asaldır.

İspat: N kuvvetli asal-yakın-halka olsun. Bu durumda;

Her bir $0 \neq a \in N, \forall\, 0 \neq x \in N$ için $aFx \neq 0$ olur. $aFx \neq 0 \Rightarrow aNx \neq 0$ olduğundan N 3-asaldır.

Öyleyse, tek yönlü olan bu gerektirme için, 3-asal olmayan bir yakın-halka kuvvetli asal değildir diyebiliriz.

Örnek 4.10. $N = (\mathbb{Z}_6, +)$ grubu üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen yakın-halka olsun.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

Burada $\{0, 2, 4\}$ 3-asal ideal ve aynı zamanda kuvvetli asal idealdir. N'nin kendisi 3-asal ideal değildir. Çünkü, $2N3 = \{0\}$ olmasına rağmen $2 \notin \{0\}, 3 \notin \{0\}$ olduğundan $\{0\}$ ideali 3-asal ideal değildir. Dolayısıyla kuvvetli asal ideal değildir. N'nin sıfır ideali kuvvetli asal olmadığından N kuvvetli asal yakın-halka değildir.

Üçüncü bölümde e-asallığın 3-asallığı gerektirdiğini belirtmiştik. Buna dayanarak yukarıdaki örnekte N e-asal yakın-halka değildir.

Önerme 4.11. [6] $N = N_0$ bir yakın-halka olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i. N kuvvetli asal yakın-halkadır.

ii. N'nin sıfırdan farklı her sağ invaryant alt grubu $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir F alt cümlesi içerir.

iii. N'nin sıfırdan farklı her sağ ideali $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir F alt cümlesi içerir.

iv. N'nin sıfırdan farklı her ideali $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir F alt cümlesi içerir öyle ki $r(F) = 0$.

İspat: Her sağ ideal aynı zamanda sağ invaryant alt grup, her ideal aynı zamanda sağ ideal olduğundan $i. \Rightarrow ii. \Rightarrow iii. \Rightarrow iv.$ olduğu aşikardır. $iv. \Rightarrow i.$ Önerme 4.5.'te verilmiştir.

Dolayısıyla, $N = N_0$ olmak üzere; N kuvvetli asal yakın-halkadır $\Leftrightarrow$ N'nin sıfırdan farklı her invaryant alt grubu $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir F alt cümlesi içerir.

Aşağıdaki örnek bunu destekler.

Örnek 4.12. $(\mathbb{Z}_4, +)$ grubu üzerinde çarpma işlemi

$x * y = \begin{cases} x & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y = 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{Z}_4, +, *)$ bir sağ yakın-halkadır. '$*$' işleminin işlem tablosu verilmiştir.

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	2	2	2
3	0	3	3	3

Yukarıdaki tabloya göre $\mathbb{Z}_4$ yakın-halkasının kuvvetli asal olup olmadığını inceleyelim. $(\mathbb{Z}_4, +, *)$ yakın-halkasının tüm invaryant alt grupları $\{0\}$ ve N dir. Sonuçtan $r(F) = 0$ olacak şekilde $\exists\, F$ olup olmadığına bakmak yeterli olacaktır. $F = \{1\}$ alınırsa

$$r(F) = \{n \in N \mid F.n = 0\} = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\mathbb{Z}_4$ kuvvetli asaldır deriz.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.11. 'i destekler.

Örnek 4.13. [6] $S_3 = \{0,1,2,3,4,5\}$ cümlesi aşağıdaki tablolarla verilen '+' ve '·' işlemleri altında bir sağ yakın-halkadır.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	5	4	3	2
2	2	4	0	5	1	3
3	3	5	4	0	2	1
4	4	2	3	1	5	0
5	5	3	1	2	0	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	1
3	1	1	3	3	3	1
4	0	0	4	4	4	0
5	0	0	5	5	5	0

$N = (S_3, +,\cdot)$ yakın-halkasında $5 \in N$ için $5N5 = \{0\}$ olduğundan N 3-asal değil dolayısıyla kuvvetli asal yakın-halka değildir.

Bu yakın-halkanın kuvvetli asal olmadığı, Önerme 4.11. kullanılarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

N yakın-halkasının invaryant alt grupları $I = \{0,1\}$ ve N dir. Bu invaryant alt gruplar için;

$$r(I) = \{ n \in N \mid In = 0 \} = \{n \in N \mid \{0,1\}n = 0\} = \emptyset$$

$$r(N) = \{n \in N \mid Nn = 0\} = \{n \in N \mid \{0,1,2,3,4,5\}n = 0\} = \emptyset$$

olur. Fakat N'nin invaryant alt gruplarının tüm sonlu alt cümleleri için $r(F) = 0$ olmalıydı. Buradan yine N'nin kuvvetli asal yakın-halka olmadığı elde edilir.

Teorem 4.14. [9] $N = N_0$ olmak üzere, N kuvvetli asal yakın-halka ise, N asal yakın-halkadır.

İspat: N kuvvetli asal yakın-halka ve $0 \neq A, B \lhd N$ alalım.

$A \neq 0$ olduğundan Önerme 4.5.'ten A nın $r(F) = 0$ olacak şekilde sonlu bir F cümlesi vardır. Buradan her bir $0 \neq b \in B$ için $F.b \neq 0$ dır. Dolayısıyla $AB \neq 0$ elde edilir. Bu ise N'nin asal yakın-halka olduğunu ispatlar.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu destekler.

Örnek 4.15. [9] Aşağıda tablosu verilen '+' ve '·' işlemlerine göre $N = (D_4, +, \cdot)$ bir sağ yakın-halkadır.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
2	0	2	0	2	0	2	2	0
3	0	3	0	3	0	3	3	0
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	4	5	5	4
6	4	6	4	6	4	6	6	4
7	4	7	4	7	4	7	7	4

Burada N asal yakın-halkadır. $I = \{0,1,2,3\} \lhd N$ ve $\{0,2\} \lhd I$ dır. Üstelik $\{0,2\} \lhd N$ dir. I idealini göz önüne alalım. $I \neq 0$ olduğundan tablodan I nın her sonlu F alt cümlesi için $F.4 = 0$ dır. Dolayısıyla $r(F) \neq 0$ yani N kuvvetli asal yakın-halka değildir.

Aşağıdaki teorem, N'nin herhangi bir ideali ile kuvvetli asal idealinin arakesitinin, kuvvetli asal ideal olduğunu kanıtlar.

Teorem 4.16. [9] $N = N_0$, $A \lhd N$ ve P, N'nin kuvvetli asal ideali ise $P \cap A$, A'nın kuvvetli asal idealidir.

İspat: $A \lhd N$ ve $P \lhd N$ olduğundan $P \cap A \lhd A$ olduğu aşikardır.

$a, b \in A \backslash P$ ve $r \in A \backslash P$ olsun. P, N'nin kuvvetli asal ideali olduğundan, $r(F) = 0$ olacak şekilde bir F cümlesi ve $f_1 \in F$ vardır $\ni$ $af_1r \in A \setminus (P \cap A)$ olur. $b \in A \setminus (P \cap A)$ olduğundan, $af_2rf_1b \in A \setminus (P \cap A)$ olacak şekilde bir $f_2 \in F$ vardır.

$$F_1 = \{f_i r f_j | f_i, f_j \in F\}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$F_1 \subseteq A \text{ ve } aF_1r \subseteq A \setminus (P \cap A)$$

olur. Tanım 4.1.2 den ispat tamamlanır.

Sonuç 4.17. [10] N bir yakın-halka, $0 \neq X \subseteq N$ için $XN = 0$ ise $\langle X \rangle N = 0$ dır.

İspat: $XN = 0$ ise $X \subset N$ dir. $(0{:}N) = \{n \in N \mid nN = 0\}$ N'nin bir idealidir. Gerçekten;

i. $\forall\, n_1, n_2 \in (0{:}N)$ için

$$(n_1 - n_2)N = n_1N - n_2N = 0$$

olur. Buradan

$(n_1 - n_2) \in (0{:}N)$

elde edilir.

ii. $\forall\, n \in N, m \in (0{:}N)$ için

$$(n + m - n)N = nN + mN - nN = nN + 0 - nN = 0$$

olur. Buradan

$$(n + m - n) \in (0{:}N)$$

elde edilir.

iii. Sağ ideallik şartını gösterelim. Kabulden X sol invaryant olduğundan

$\forall\, m \in (0{:}N), \forall\, n \in N$ için

$(mn)N = m(nN) \subseteq mN = 0$

$$\Rightarrow (mn)N = 0$$

$$\Rightarrow (mn) \in (0{:}N)$$

Buradan da

$$(0{:}N)N \subseteq (0{:}N) \text{ olur.}$$

iv. Sol ideallik şartını gösterelim.

$\forall\, n_1, n_2 \in N, \forall\, m \in (0{:}N)$ için,

$$[n_1(n_2 + m) - n_1n_2]N = n_1(n_2N + mN) - (n_1n_2)N$$

$$= n_1(n_2N) - (n_1n_2)N$$

$$= 0$$

Buradan $(0:N) \lhd N$ dir. $\langle X \rangle \subset (0:N)$ ve dolayısıyla $\langle X \rangle N = 0$ elde edilir.

Not: $N = N_0$ ve $I \lhd N$ ise $NI \subseteq I$ olur. Yani $N = N_0$ ise N'nin her ideali invaryant alt grubudur.

Önerme 4.18. $N = N_0$, N 3 asal ve sağ değişmeli ise N kuvvetli asaldır.

İspat: A , N nin sıfırdan farklı alt grubu ve $A \neq 0$, $0 \neq b \in A, F = \{b\}$ olsun.

$$r(F) = \{n \in N | F.n = 0\} \neq 0$$

olduğunu kabul edelim. 3-asal ve sağ değişmeli yakın-halka tam asal olduğundan N tam asaldır.

$n \neq 0$ için $bn = 0$, olduğunda b=0 çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $n = 0$ ve dolayısıyla $r(F) = 0$ olur.

Sonuç 4.19. Sıfır simetrik ve tam asal bir yakın-halka, kuvvetli asaldır.

Önerme 4.20. $N = N_0$ sonlu 3-asal bir yakın-halka olsun. Bu durumda N kuvvetli asaldır.

İspat: $0 \neq N = N_0$ sonlu ve 3-asal bir yakın-halka ve $0 \neq n \in N$ için $Nn = 0$ olsun. Bu durumda $0 \neq a \in N$ için $aNn = 0$ olur.

N 3-asal olduğundan $a = 0 \vee n = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir Dolayısıyla $r(N) = 0$ olur. Buradan, N kuvvetli asaldır.

Sonuç 4.21. $N = N_0$ ve N nin sıfırdan farklı her invaryant alt grubunun

$\{n \in N \mid F.n \subseteq P\} = \{P\}$ olacak şekilde sonlu bir F alt cümlesi vardır $\Leftrightarrow$ P N nin kuvvetli asal idealidir.

İspat: P N'nin kuvvetli asal idealidir $\Leftrightarrow$ N/P kuvvetli asal yakın-halkadır. Dolayısıyla ispat, Önerme 4.11.'den elde edilir.

Önerme 4.22. $N = N_0$, $P \lhd N$ 3-asal ve N sağ değişmeli ise P kuvvetli asaldır.

İspat: $N = N_0$, N/P nin P den farklı bir invaryant alt grubu, $b \in A - P$

$$P \neq b + P \in N/P, \ F = \{b + P\}$$

olmak üzere F cümlesini içerir.

$$r(F) = \{n + P \in N/P \,|F(n + P) = P\}$$

Burada, $r(F) \neq P$ ise $n \in N \setminus P$ için $bn \in P$ olur. Tam asallıktan

$b \in P \vee n \in P$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $r(F) = P$ dir.

Önerme 4.23. $N = N_0$ sonlu olduğunda, $P \lhd N$ 3-asal iken P kuvvetli asaldır.

İspat: $N = N_0$ sonlu ve $P \lhd N$ 3-asal ise N/P 3-asal yakın-halkadır. Dolayısıyla Önerme 4.20. ’den N/P kuvvetli asal ve buradan P kuvvetli asal idealdir.

4.1. Kuvvetli E-Asal Yakın-halka

Tanım 4.1.1. [4] Her bir $0 \neq a \in N$, $\forall x, y \in N$ için $afx = afy$, $\forall f \in F$ iken $x = y$ olacak şekilde N yakın-halkasının bir sonlu F alt cümlesi varsa N’ye bir **kuvvetli e-asal yakın-halka** denir.

Önerme 4.1.2. [6] $N = N_0$ olmak üzere, aşağıdakiler denktir.

i. N kuvvetli e-asal yakın-halkadır.

ii. N nin her sağ invaryant alt grubu sonlu bir F alt cümlesi içerir $\ni x, y \in N$, $\forall f \in F$ için $fx = fy$ ise $x = y$ dir.

iii. N nin her invaryant alt grubu sonlu bir F alt cümlesi içerir $\ni x, y \in N$, $\forall f \in F$ için $fx = fy$ ise $x = y$ dir.

İspat: **i.⇒ii.** N’nin, kuvvetli e-asal yakın-halka olduğunu kabul edelim. I, N’nin sıfırdan farklı sağ invaryant alt grubu ve $0 \neq a \in I$ için F, N’nin sonlu alt cümlesi olmak üzere $G = aF$, I’nın sonlu alt cümlesi olur ve $gx = gy$ dir. Buradan $afx = afy$ ve kabulden $x = y$ elde edilir.

ii.⇒iii. N nin her invaryant alt grubunun sağ invaryant olduğu açıktır. Buradan $\forall f \in F$ için $fx = fy$ olacak şekilde N’nin sonlu bir F alt cümlesi vardır, $fx = fy \Rightarrow x = y$ olur.

iii.⇒i. $N_c \neq \{0\}$ olduğunda, $\forall\, a \in N_c$ için $ax = ay = a$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $N_c \neq \{0\}$ ise N’nin hipotezi sağlayan sonlu bir alt cümlesi yoktur. Burada $N_c = \{0\}$ yani $N = N_0$ olur.

$aN = 0$ olduğunu kabul edelim. Sonuç 4.3’ten $< a > N = 0$ olur. $N = N_0$ olduğundan $< a >$, N’nin sıfırdan farklı invaryant alt grubudur. Ayrıca,

$\forall\, b \in < a >$ ve $\forall\, x, y \in N$ için $bx = by = 0$ dır. Buradan, $x, y \in N$ ve $\forall f \in F$ için, $fx = fy$ iken $x = y$ olacak şekilde $< a >$'nın sonlu bir F alt cümlesi yoktur. Buradan $aN \neq 0$ dır.

$an \neq 0$ olacak şekilde $n \in N$ olsun. $I = < a >_N$, N'nin invaryant alt grubudur. Herhangi bir $x \in I$ için, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $x_n = x$ olacak şekilde aşağıdaki şartlardan birisini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ vardır.

i. x_i=ma, $\exists\, m \in Z$

ii. $x_i = x_j \pm x_k, \exists\, j, k < i$

iii. $x_i = rx_j, \exists\, r \in N, j < i$

iv. $x_i = x_j r, \exists\, r \in N, j < i$

$x_1, x_2, , \dots, x_n$ dizisine x için bir üreteç dizisi denir.

$1 \leq i \leq n$, $f_i x = f_i y$ ise $x = y$ olacak şekilde $f_i, \dots, f_n \in I$, $\forall\, x, y \in N$ olsun. $1 \leq i \leq n$ için $f_{i1}, \dots, f_{in(i)}$ f_i için bir üreteç dizisi olsun. $\exists\, r \in N$ için, f_{ij} elemanları ya an ya da anr formunda çarpan içerir.

$$G = \{n\} \cup \left\{nr \middle| anr\ bazı\ f_{ij}\ de\ vardır\right\}$$

cümlesini alalım.

$\forall g \in G$ için $agx = agy$, $x, y \in N$ olsun. Yukarıda tanımlanan diziye göre, $\forall\, 1 \leq i \leq n$ için $f_{ij}x = f_{ij}y$ ve özel olarak $1 \leq i \leq n$ için $f_i x = f_i y$ olur. Burada G sonlu olduğundan $x = y$ olur. Dolayısıyla N kuvvetli e-asaldır.

Önerme 4.1.3. $N = N_0$ olmak üzere, N kuvvetli e-asal ise N kuvvetli asaldır.

İspat: N kuvvetli asal yakın-halka olduğundan her bir $0 \neq a \in N$, $\forall x, y \in N$ için, $afx = afy, \forall\, f \in F$ ise $x = y$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq N$ vardır.

$x \neq 0$ ise $afx \neq af0 = 0$ dır. $\forall f \in F\ için\ afx \neq 0$ olduğundan $aFx \neq 0$ olur. Dolayısıyla N kuvvetli asaldır.

Aşağıda örnek Önerme 4.1.3'ü destekler.

Örnek 4.1.4. Örnek 4.8.'de verilen N yakın-halkasını alalım. Bu yakın-halkanın kuvvetli asal olmadığı aynı örnekte gösterildi. Önerme 4.1.3'ten bu yakın-halka kuvvetli e-asal değildir. Gerçekten;

$N = (\mathbb{Z}_6 ,+,.)$; $N = N_0$ olduğundan N'den alınan her ideal aynı zamanda N'nin invaryant alt grubudur. $\{0,2,4\} \lhd N$ alalım. $F = \{0,2,4\}$ için $2.2 = 2.5$ olmasına rağmen, $2 \neq 5$ olduğundan $\exists f = 2$ için N kuvvetli e-asal değildir.

Önerme 4.1.3.'ün tersi genelde doğru değildir. Yani, kuvvetli asal yakın-halka kuvvetli e-asal olmak zorunda değildir. Gerçekten;

Örnek 4.1.5. Örnek 4.12.'de verilen $N = (\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ yakın-halkası kuvvetli asaldır. $\{0\}$ ve N yakın-halkasının invaryant alt gruplarıdır. $F = N$ alalım. $f = 3 \in F$ için;

$3.1 = 3.2$ olmasına rağmen $1 \neq 2$ olduğundan N kuvvetli e-asal yakın-halka değildir.

4.2. Uniformly Kuvvetli Asal Yakın-halka

Tanım 4.2.1. [11] N bir yakın-halka olsun. $0 \neq x, y \in N$ için sonlu bir $F \subseteq N$ ve her bir x,y ikilisi için $xfy \neq 0$ olacak şekilde $f \in F$ mevcutsa N ye uniformly kuvvetli asal yakın-halka denir.

Örnek 4.2.2. [11] $N = \{0, a, b, c, x, y\}$, aşağıdaki tablolar ile verilen '+' ve '·' işlemleri altında birimli, basit yakın-halkadır fakat uniformly kuvvetli asal yakın-halka değildir.

+	0	a	b	c	x	y
0	0	a	b	c	x	y
a	a	0	x	y	c	b
b	b	x	0	y	a	c
c	c	y	x	0	b	a
x	x	b	c	a	y	0
y	y	c	a	b	0	x

.	0	a	b	c	x	y
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	a	0	0
b	0	0	c	b	0	0
c	0	0	b	c	0	0
x	0	0	y	x	0	0
y	0	0	x	y	0	0

Burada N nin her F alt cümlesinde , N nin sıfırdan farklı x ve y elemanları için $xFy = 0$ dır. Bu ise N'nin uniformly kuvvetli asal olmadığını gösterir.

Örneğin; $F = \{b, c\}$ alınırsa $xFy = 0$ olur.

Aşağıdaki önerme kuvvetli asal yakın-halka ile uniformly kuvvetli asal yakın-halka arasındaki ilişkiyi belirtir.

Önerme 4.2.3. [11] N kuvvetli asal ise uniformly kuvvetli asaldır.

İspat: N kuvvetli asal yakın-halka olsun. Bu durumda her bir $0 \neq x \in N$ ve $0 \neq y \in N$ için $xFy \neq 0$ olacak şekilde N'nin sonlu bir F alt cümlesi vardır. Dolayısıyla $0 \neq x, y \in N$ için $xfy \neq 0$ olacak şekilde $f \in F$ mevcuttur. Buradan N uniformly kuvvetli asal yakın-halkadır.

Uniformly kuvvetli asal ideal tanımı aşağıda verildiği gibidir.

Tanım 4.2.4. [11] N uniformly kuvvetli asal, $P \lhd N$ olsun. ${}^{N}/_{P}$ uniformly kuvvetli asal ise P' ye uniformly kuvvetli asal ideal denir.

Aşağıdaki önerme N'nin herhangi bir ideali ile uniformly kuvvetli asal idealinin arakesitinin de uniformly asal olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.5. [11] $N = N_0$, A, N'nin bir ideali, $P,$ N nin uniformly kuvvetli asal ideali ise $P \cap A$,A'nın uniformly kuvvetli asal idealidir.

İspat: $a, b \in A \backslash P$ ve $r \in A \backslash P$ olsun. P, N'nin uniformly kuvvetli asal ideali olduğundan $r(PF) = 0$ olacak şekilde P'nin bir F sıfırlayanı vardır. Buradan

$af_1r \in A\backslash P$ olacak şekilde bir $f_1 \in F$ ve $af_1rf_2b \in A\backslash P$ olacak şekilde bir $f_2 \in F$ bulunabilir. $F_1 = \{f_irf_j | f_i, f_j \in F\}$ şeklinde tanımlansın. $N = N_0$, $P \neq a, b \in A$ için $af_1rf_2b \neq 0$ olacak şekilde $F_1 \subseteq A$ sonlu alt cümlesi olduğundan $P \cap A, A'$nın uniformly kuvvetli asal idealidir.

SONUÇ

Yakın-halkaların asal idealleri üzerinde yapılan bu çalışmada, 0-asal, 1-asal, 2-asal, 3-asal, e-asal, tam asal yakın-halkalar, temel özellikleri ve ilişkileri ile verilmiş; son bölümde de kuvvetli asal yakın-halka ve kuvvetli asal ideal kavramları çalışılmıştır. Kuvvetli asal yakın-halka ve kuvvetli asal ideal kavramlarının diğer asallık çeşitleriyle ilişkileri gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Beidleman, J., Strictly Prime Distributively Generated Near-rings, Math. Z., 100, 97-105, 1967.

2. Birkenmeier, G., Heatherly, H., and Lee, E., Prime Ideals and Prime Radicals in Near-rings, Mh. Math., 117, 179-197, 1994.

3. Booth, G. L., Groenewald, N. J., and Veldsman, S., A Kurosh-Amitsur Prime Radical for Near-rings, Comm. Algebra, 18, 3111-3122, 1990.

4. Booth, G.L., Groenewald, N.J., Equiprime Left Ideals and Equiprime N-groups of a Near-ring, Contributions to General Algebra, 8, 25-38, 1992.

5. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res. Notes Math., 346, 131-139, 1996.

6. Booth, G.L., Groenewald, N.J., On Strongly Prime Near-rings, Indian Journal of Mathematics, 40(2), 113-121, 1998.

7. Clay, J. R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1992.

8. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.

9. Groenewald, N.J., Strongly Prime Near-rings, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 31, 337-343, 1988.

10. Groenewald, N.J., Strongly Prime Near-rings 2, Communication In Algebra, 17(3), 735-749, 1989.

11. Groenewald, N.J., Potgieter, P.C., On Uniformly Strongly Prime Near-rings, Math. Japonica, 35(4), 667-673, 1990.

12. Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 19(10), 2667-2675, 1991.

13. Groenewald, N. J., Prime Near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., 3(2), 147-162, 2001.

14. Heatherly, H. E., Malone, J. J., Some Near-ring Embeddings, Quart. J. Math., Oxford Ser. 20, 81-85, 1969.

15. Holcombe, W. L. M., Primitive Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.

16. Laxton, R. R., Prime Ideals and The Ideal Radical of a Distributively Generated Near-ring, Math. Z., 83, 8-17, 1964.

17. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.

18. Ramakotaiah, D., Radicals for Near-rings, Math. Z., 97, 45-56, 1967.

19. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., On IFP Near-rings, J. Austral. Math. Soc., 27, 365-370, 1979.

20. Reddy, Y. V., Murty, C. V. L. N., Semi-symmetric Ideals in Near-rings, Indian J. Pure and Appl. Math., 16, 17-21, 1985.

21. Van der Walt, A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, Arch. Math., 15, 408-414, 1964.

22. Veldsman, S., On Equiprime Near-Rings, Communications In Algebra, 20(9), 2569-2587, 1992.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Samsun’da doğdu. İlköğrenimini Samsun Atatürk İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Samsun Namık Kemal Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. Haziran 2009'da lisans öğrenimini tamamladı. Eylül 2009'da Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi'nde yüksek lisans yapmaya başladı. Tez aşamasında olup çalışmalarına devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres : Melikgazi M. Ünal S. Kadı Mahmut Vakfı 6. Blok

KAYSERİ

Tel: (546) 7225646

E-posta: selmaozdemir@msn.com