T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

SINIRLI TERS OPERATÖRLÜ OPERATÖR DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ali ÜNAL

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

SINIRLI TERS OPERATÖRLÜ OPERATÖR DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ali ÜNAL

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130009 numaralı öğrencisi Ali ÜNAL'ın hazırladığı "Sınırlı Ters Operatörlü Operatör Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Metodları Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 08/05/2012 salı günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd.Doç.Dr.Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof.Dr.Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd.Doç.Dr.Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/5/2012 tarih ve 5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/5/2012

Enstitü Müdürü
(Unvanı, Adı Soyadı)

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

SINIRLI TERS OPERATÖRLÜ OPERATÖR DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Ali ÜNAL

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 109

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad Mustafayev

ÖZET

Sürekli dönüştürülebilen operatörler hakkındaki teoremlerin uygulanması ile operatör denklemlerin yaklaşık çözüm metodları ele alındı, incelendi ve öğrenildi. Bunun için öncelikle gerekli olan temel kavramlar ve teoremler incelendi. Parametreye bağlı operatör denklemlerin çözümünde küçük parametreler metodu incelendi. Özel olarak parametreye göre devam metodu ele alındı ve bu metodun uygulanması ile operatör denklemlerin yaklaşık çözüm metodu incelendi.

Anahtar Kelimeler: Banach uzayı, sınırlı ters operatör, abstract fonksiyonlar, küçük parametreler metodu, parametreye göre devam metodu.

A STUDY ON APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF OPERATOR EQUATIONS WITH THE LIMITED INVERSE OPERATORS

Ali ÜNAL

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths
Master of Science Thesis

2012; Page: 109

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

Methods of approximate solution on operator equations with the application of theorems about continuously transformed operators were discussed, investigated and learned. Firstly, the basic concepts and theorems were examined. The method of small parameters was analyzed on the solution of operator equations depending on the parameter. Particularly, according to the parameter the continue method was discussed and approximate methods of solution of operator equations were examined with the application of this method.

Keywords: Banach space, limited inverse operator, abstract functions, the method of small parameters, the continue method according to the parameter.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad Mustafayev'e, bölüm başkanımız Yrd. Doç. Dr. Akın Osman Atagün'e, hocalarım Yrd. Doç. Dr Abdullah Sönmezoğlu ile Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali Tandoğan'a, ayrıca bana daima destek olan eşim Halide Ünal'a teşekkürü bir borç bilirim.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C[a,b]$	:	[a,b] aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonların uzayı
$C^k[a,b]$	:	[a,b] aralığında tanımlı, k. mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı
$\|x\|$	:	x elemanının normu
E^m	:	m boyutlu öklit uzayı
D(F)	:	F operatörünün tanım bölgesi
R(F)	:	F operatörünün değerler bölgesi
$\overline{S_1}(0)$	:	Kapalı birim yuvar
Sup	:	Supremum
K(x,s)	:	İntegral operatörün çekirdeği
L(X,Y)	:	Tüm normlu X uzayında tanımlanmış, değerleri normlu Y uzayında olan lineer sürekli operatörlerin normlu uzayı
A^{-1}	:	A operatörünün tersi

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın temel kavramlar kısmında, lineer uzay ve lineer operatörün tanımı, Banach uzayının tanımı, parametreye bağlı vektör değerli, operatör değerli abstract fonksiyonların kısaca tanımları, bazı özellikleri ve sonuçları verildi.

Özellikle normlu uzaylarda tanımlanmış, değerleri de normlu uzaylarda olan lineer operatörlerin tersinin var ve sınırlı olmaları hakkındaki önemli teoremler incelendi.

Ters operatörlerin tanımı ve ters operatörlere örnekler verildi. $(I\text{-}C)^{-1}$ ve $(A\text{-}C)^{-1}$ operatörlerinin varlıkları gösterildi.

Burada sınırlı ters operatörlü operatör denklemlerin yaklaşık çözüm metodları ele alınıp incelendi.

Sade halde küçük parametreler metodu, genel halde küçük parametreler metodu, parametreye göre devam metodu ve esas teoremi, bu esas teoremin özel hali için ispatı ve genel hali için ispatı incelendi ve bu metodun uygulanmasına ait örnekler verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Uzayın ve Lineer Operatörün Genel Tanımı

Tanım 2.1. $x, y, z,$ ... elemanlarının E kümesinde aşağıdaki iki işlemin tanımlandığını varsayalım.

I. Her elemanlarına karşı bu elemanların toplamı olarak adlandırılan tamamen belirli $x + y \in \mathrm{E}$ elemanı karşı getirilir.

II. Her bir $x \in \mathrm{E}$ elemanına ve her bir λ skaler sayısına, bu skaler λ sayısının x elemanı ile çarpımı olarak adlandırılan tamamen belli $\lambda x \in \mathrm{E}$ elemanı karşı getirilir.

E kümesinde elemanların burada tanımlanan toplamı ve elemanların skaler sayıyla çarpımı işlemlerinin aşağıdaki özellikleri (aksiyomları) her bir $x, y, z \in \mathrm{E}$ elemanları ve her bir λ, μ skalerleri için sağlandığını varsayalım.

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) Öyle "sıfır elemanı" olarak adlandırılan $0 \in \mathrm{E}$ elemanı bulunur ki, $x + 0 = x$ eşitliği sağlanır.

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

5) $1x = x$, $0x = 0$ (Soldaki 0 skaler, ama sağdaki 0, E kümesinin sıfır elemanıdır.)

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

$x, y, z,$ ... elemanlarının E kümesinde elemanların toplamı ve skaler sayıyla çarpım işlemleri 1, … , 7 özelliklerini sağladığında E kümesine *lineer uzay* denir.

Burada sayısal çarpanlar olarak ya reel ya da kompleks sayılar alınır. $\lambda, \mu, \gamma, \ldots$ sayıları reel sayılar alındığında lineer uzay *reel lineer uzay*, kompleks sayılar alındığında *kompleks lineer uzay* olarak adlandırılır.

Her bir lineer E uzayında her bir $x \in E$ elemanı için $(-1)x = -x$ eşitliği ile x elemanının aksi $-x$ elemanı tanımlanır ve böylece, keyfi alınmış $x, y \in E$ elemanlarının $x - y$ fark işlemi tanımlanır.

x ve $-x$ elemanları için,

$x - x = (1)x + (-1)x = (1-1)x = 0x = 0$ eşitliği sağlanır.

$x - y$ farkı $x - y = x + (-1)y$ eşitliği ile tanımlanır.

Burada 0 elemanının tekliğini gösterelim. Varsayalım ki 0_1 ve 0_2 iki tane sıfır elemanı olsun.

$$\left.\begin{array}{l} 0_1 + 0_2 = 0_1 \\ 0_2 + 0_1 = 0_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0_1 = 0_2$$

bulunur. Burada lineer uzaylara örnekler gösterelim.

Örnek 2.1. Derecesi n doğal sayısını aşmayan tüm

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ şeklindeki polinomların P_n kümesini ele alalım. Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ keyfi alınmış reel sayılar ve $t \in (-\infty, \infty)$ dir.

Polinomun reel sayıyla çarpımı ve iki polinomun toplamı polinom olduğundan ve bu işlemlerde polinomların derecesi artmadığından biz polinomların lineer P_n uzayını almış oluruz.

Örnek 2.2. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli, sürekli olan tüm $x(t), y(t), z(t), \ldots$ fonksiyonların kümesini $C[a,b]$ ile gösterelim. $x(t) + y(t)$ toplamı sürekli fonksiyonların toplamı gibi $[a,b]$ aralığında süreklidir. $\lambda x(t)$ çarpımı da $[a,b]$ aralığında süreklidir. Bu yüzden de $C[a,b]$ kümesi lineer uzaydır.

Örnek 2.3. k doğal sayı olmak üzere $[a,b]$ aralığında tanımlanmış, k kez sürekli diferansiyellenen $x(t), y(t), z(t), \ldots$ fonksiyonlarının tüm mümkün kümesini $C^k[a,b]$ ile gösterelim. Burada $x(t) \in C^k[a,b]$ olduğunda $\lambda x(t) \in C^k[a,b]$ olduğundan ve $x(t), y(t) \in C^k[a,b]$ için $x(t)+y(t) \in C^k[a,b]$ olduğundan $C^k[a,b]$ lineer uzaydır.

2.2. Elemanların Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

E herhangi bir lineer uzay olsun. $x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_n \in \mathrm{E}$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ \ldots \ , \alpha_n$ ise skaler sayılar olsun. O zaman $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ \ldots \ + \alpha_n x_n$ toplamına $x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_n$ elemanlarının *lineer kombinasyonu* denir.

Tümü sıfıra eşit olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ \ldots \ , \alpha_n$ sayıları için ,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ \ldots \ + \alpha_n x_n = 0 \tag{2.1}$$

eşitliği sağlandığında $x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_n$ elemanlarına *lineer bağımlıdır* denir. (2.1) eşitliği yalnız ve yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ \ldots \ = \alpha_n = 0$ halinde sağlanırsa o zaman $x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_n$ elemanlarına *lineer bağımsızdır* denir. Lineer E uzayında n tane lineer bağımsız eleman olduğunda ve bu uzayda her bir $n+1$ tane eleman lineer bağımlı olduğunda lineer E uzayı *n-boyutludur* denir.

Tanım 2.2. n boyutlu lineer E uzayında n tane lineer bağımsız olan her bir vektörler sistemine bu uzayda bir *baz* denir.

Tanım 2.3. Lineer E uzayında her bir doğal n sayısı için bu uzayda n sayıda lineer bağımsız elemanlar sistemi bulunduğunda lineer E uzayına *sonsuz boyutlu lineer uzay* denir.

Sonlu n sayısı için n-boyutlu lineer uzaylara *sonlu boyutlu lineer uzaylar* denir.

$C[a,b]$ ve $C^k[a,b]$ uzayları sonsuz boyutlu lineer uzaylardır. Bu uzaylarda $1, t, t^2, \ \ldots \ , t^n, \ \ldots$ fonksiyonlar dizisini ele alalım. Her bir n doğal sayısı için $1, t, t^2, \ \ldots \ , t^n, \ \ldots$ sisteminin lineer bağımsız olduğu kolaylıkla gösterilir.

E lineer uzay $\widetilde{\mathrm{E}}$ ise lineer E uzayının bir alt kümesi olsun. Her bir $x, y \in \widetilde{\mathrm{E}}$ elemanları ve her bir α, β skaler sayıları için $\alpha x + \beta y \in \widetilde{\mathrm{E}}$ şartı sağlandığında $\widetilde{\mathrm{E}}$ kümesine lineer E uzayında *lineer manifold* veya *alt uzay* denir.

$C^k[a,b]$, $k \geq 1$ uzayı $C[a,b]$ uzayında lineer manifolddur. Gerçekten de, $[a,b]$ aralığında k kez sürekli diferansiyellenen her bir fonksiyon $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyondur. $C^k[a,b]$ lineer uzayından alınmış fonksiyonların lineer kombinasyonu da $C^k[a,b]$ uzayının elemanı olur.

2.3. $C[a,b]$ Uzayı

$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların lineer $C[a,b]$ uzayında $x(t) \in C[a,b]$ fonksiyonunun normunu,

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

ile tanımlayalım.

1) $|x(t)| \geq 0$, $|x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$ dır. Buradan,

$\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$ olur.

2) $|\lambda x(t)| = |\lambda||x(t)|$ buradan $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ olur.

3) $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$ buradan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir.

Böylece lineer $C[a,b]$uzayı bu normla, normlu uzay olur. Bu uzay da $C[a,b]$ ile gösterilir.

Şimdi gösterelim ki $C[a,b]$ uzayında yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

$\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$ fonksiyonel dizisinin $x_0(t) \in C[a,b]$ fonksiyonuna yakınsak olduğunu varsayalım. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$, $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ sağlanır.

Böylece $\max_{a \leq t \leq b} |x_n - x_0| < \varepsilon$ olur. Buradan,

$\forall t \in [a,b]$ için $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ olur. Böylece $C[a,b]$ uzayında dizilerin yakınsaklığı düzgün yakınsaklıktır.

2.4. $C^k[a,b]$ Uzayı

Bu lineer uzayda x elemanının normunu,

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le t \le b} \left| x^{(i)}(t) \right|$$

ile tanımlayalım.

2.5. $\widetilde{L}_p[a,b]$ Uzayı

Bu uzayda $x(t)$ fonksiyonunun normunu,

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad p \ge 1$$

ile tanımlayalım. Bu formülde integral, Riemann integralidir.

Bu normun, norm aksiyomlarından 1 ve 2'yi sağladığı açıktır. Bu normun üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermek için integral için Minkowski eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Bunu ispatlamak için ise integral için Hölder eşitsizliğinin ispatını verelim. Hölder eşitsizliği şu şekilde yazılır.

$$\int_a^b |x(t)y(t)| \, dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \qquad p > 1 \, , \, q > 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Bu eşitsizliği ispatlamak için,

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

eşitsizliğini kullanalım. Buradan,

$$u = \frac{|x(t)|}{\|x\|_p} \quad , \quad v = \frac{|y(t)|}{\|y\|_q} \quad \text{alalım.} \quad \|y\|_q = \left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{dir.}$$

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x(t)|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y(t)|^q}{q\|y\|_q^q}$$

her yanı a dan b ye integrallersek,

$$\frac{\int_a^b |x(t)y(t)|dt}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\int_a^b |x(t)|^p dt}{p\|x\|_p^p} + \frac{\int_a^b |y(t)|^q}{q\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Minkowski eşitsizliğini gösterelim.

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

bunu ispatlamak için aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt \leq \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)+y(t)|dt$$

$$\leq \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)|dt + \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |y(t)|dt$$

$$\leq \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Bu eşitsizlikten,

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

olduğunu buluruz.

Böylece $\widetilde{L}_p[a,b]$ uzayı normlu uzaydır. Bu uzaydaki yakınsaklığa p. mertebeden ortalama yakınsaklık veya kısaca *ortalama yakınsaklık* denir.

Tanım 2.4. E lineer uzayında iki farklı $\|x\|_1$ ve $\|x\|_2$ normlarını tanımlayalım. Öyle $\beta > 0$ ve $\forall x \in$ E için $\|x\|_1 \le \beta \|x\|_2$ sağlanırsa $\|.\|_1$ normu $\|.\|_2$ normuna tâbidir denir.

$$\left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le (b-a)^{\frac{1}{p}} \|x\|_{C[a,b]} = \beta \|x\|_{C[a,b]}$$

olduğundan $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ normu $\|x\|_{C[a,b]}$ normuna tâbidir.

Buradan da $\|x\|_p \le \beta \|x\|_{C[a,b]}$ olduğundan $\|x_n - x_0\|_p \le \beta \|x_n - x_0\|_{C[a,b]}$ dır. Bu eşitsizlikten düzgün yakınsaklıktan ortalama yakınsaklık alınır.

2.6. Banach Uzaylarının Tanımı

Normlu X uzayında her bir fundamental Cauchy dizi yakınsak olduğunda bu uzaya *tam uzay* denir. Her bir normlu tam uzaya *Banach uzayı* denir.

2.7. Banach Uzaylara Örnekler

Örnek 2.4. Reel sayılar kümesi E, Banach uzayıdır. Burada sayısal dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin cauchy dizisi (fundamental dizi) olmasıdır.

Örnek 2.5. E^m Öklit uzayı, Banach uzaydır. Bu uzayda da dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek 2.6. $C[a,b]$ uzayı Banach uzaydır.

Gerçektende bu uzayda yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

$\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$ dizisinin $x(t) \in C[a,b]$ ye yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{x_n(t)\}$ dizisinin fundamental dizi olmasıdır. Yani,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $\forall p = 1,2,...$ $\forall t \in [a,b]$ için $\left| x_{n+p}(t) - x_n(t) \right| < \varepsilon$ sağlanmasıdır.
Maksimumu için de sağlar. $\|x_{n+p} - x_n\| = \max_{t \in [a,b]} \left| x_{n+p}(t) - x_n(t) \right| \le \varepsilon$

$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisi bu aralıkta $x(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda $x(t)$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Yani, $x(t)\in C[a,b]$ olur. Bununla $C[a,b]$ uzayının Banach uzayı olduğunu göstermiş oluruz.

2.8. Operatörün Genel Tanımı

Keyfi X,Y kümelerini ele alalım. $\mathrm{D}\subseteq \mathrm{X}$ olsun. Her bir $x\in \mathrm{D}$ elemanıyla Y den tek bir $y\in \mathrm{Y}$ elemanını eşleyelim. Bu duruma $y=\mathrm{F}(x)$ operatörü verilmiştir denir ve buradaki D kümesine F operatörünün *tanım kümesi* denir ve D(F) şeklinde gösterilir. Buradaki $\mathrm{R(F)}=\{y\in \mathrm{Y}: y=\mathrm{F}(x), x\in \mathrm{D(F)}\}$ kümesine F operatörünün *değer kümesi* denir. Bu durumu şematik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\mathrm{X}\supseteq \mathrm{D(F)}\xrightarrow{F}\mathrm{R(F)}\subseteq \mathrm{Y}$$

Bunun kısaca gösterilişi,

$$\mathrm{F{:}X}\to \mathrm{Y}$$

dir. Bu gösterilişte F'nin tanım kümesinin X'e , değer kümesinin de Y'ye eşit olduğu kastedilmiyor. Bu sadece bir gösteriliştir.

Operatör sözcüğünden başka fonksiyon, dönüşüm sözcükleri de kullanılır. X ve Y kümeleri sonlu boyutlu olduklarında *fonksiyon* sözü kullanılır. Problem, geometrik anlamlı olduğunda ise operatör yerine *dönüşüm* sözcüğü kullanılır.

Şimdi bize iki $\mathrm{F{:}X}\to \mathrm{Y}$ ve $\phi:\mathrm{X}\to \mathrm{Y}$ operatörlerinin verildiğini varsayalım. Bu operatörler için,

$$\mathrm{D(F)}=\mathrm{D}(\phi)=\mathrm{D}$$

ve her bir $x\in \mathrm{D}$ için,

$$\mathrm{F}(x)=\phi(x)$$

eşitliği sağlandığında F ve ϕ operatörleri *eşittir* denir.

Ama $\mathrm{D(F)} \subset \mathrm{D}(\phi)$ ve her bir $x \in \mathrm{D(F)}$ için $\mathrm{F}(x) = \phi(x)$ şartları sağlandığında F operatörüne ϕ operatörünün D(F) kümesine kısıtlanması, ϕ operatörüne ise F operatörünün $\mathrm{D}(\phi)$ kümesine *devamı* veya *genişlendirilmesi* denir.

Şimdi X ve Y kümelerinin her ikisinin de reel veya her ikisinin de kompleks lineer uzaylar olduklarını varsayalım.

Tanım 2.5. $\mathrm{A:X} \to \mathrm{Y}$ operatörü için,

1) $\mathrm{D(A)} \subseteq \mathrm{X}$ tanım bölgesi lineer manifolddur.

2) Her bir $x_1, x_2 \in \mathrm{D(A)}$ elemanları ve her bir skaler λ_1, λ_2 sayıları için,

$$\mathrm{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathrm{A}\left(x_1\right) + \lambda_2 \mathrm{A}\left(x_2\right)$$

şartları sağlandığında A operatörü $\mathrm{D(A)} \subset \mathrm{X}$ kümesinde tanımlanmış *lineer operatördür* denir.

Teorem 2.1. Her bir lineer operatörün değerler bölgesi lineer manifolddur.

İspat: $y_1, y_2 \in \mathrm{R(A)}$ ve λ_1, λ_2 skaler sayılar olduklarını varsayalım. $\mathrm{A}x_1 = y_1$ ve $\mathrm{A}x_2 = y_2$ eşitliklerini sağlayan $x_1, x_2 \in \mathrm{D(A)}$ alalım. O zaman A operatörünün lineer olduğunu kullanarak,

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathrm{A}x_1 + \lambda_2 \mathrm{A}x_2 = \mathrm{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

yazılır. Bu eşitlikten $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathrm{D(A)}$ elemanının $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ elemanına dönüştüğü görülür. Böylece,

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathrm{R(A)}$$

olur. Bununla da R(A) bölgesinin lineer manifold olduğu ispatlanmış olur.

2.9. Sürekli Lineer Operatörler

Tanım 2.6. X ve Y normlu uzay olsun. A tüm X'i Y'ye dönüştüren bir operatör olsun. $x_0 \in \mathrm{X}$ alalım. $x \to x_0$ yaklaştığında $\mathrm{A}x \to \mathrm{A}x_0$ yaklaşırsa A operatörü x_0 noktasında süreklidir denir.

Teorem 2.2. Lineer A operatörü X uzayının $x = 0$ noktasında sürekli olduğunda bu operatör X uzayının her bir noktasında sürekli olur.

İspat: A lineer olduğundan $\mathrm{A}x - \mathrm{A}x_0 = \mathrm{A}(x - x_0)$ yazabiliriz. Buradan da $x - x_0 = z$ alırsak o zaman $x \to x_0$ yaklaştığında $z \to 0$ yakınsar. 0 noktasında A sürekli olduğundan $\mathrm{A}z \to 0$ yakınsar. Dolayısıyla,

$x \to x_0$ için $\mathrm{A}x - \mathrm{A}x_0 = \mathrm{A}(x - x_0) = \mathrm{Az} \to 0$ yani $\mathrm{A}x \to \mathrm{A}x_0$ olur.

Tanım 2.7. Tüm normlu X uzayında tanımlanmış değerleri Y normlu uzayında olan A operatörü $x = 0$ da sürekli olduğunda A operatörüne *sürekli operatör* denir.

2.10. Sınırlı Lineer Operatörler

Tanım 2.8. $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{A}x = 0$ olduğunda A operatörüne *sıfır operatörü* denir ve $\mathrm{A} = 0$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.9. $\mathrm{A} \neq 0$ olsun. Lineer A operatörü X Banach uzayının $\overline{S_1}(0) = \{x \in \mathrm{X} : \|x\| \leq 1\}$ birim yuvarını sınırlı kümeye dönüştürdüğünde A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Böylece A operatörü için $\{\|\mathrm{A}x\| : \|x\| \leq 1\}$ kümesi sınırlı olduğunda lineer A operatörü, X Banach uzayında sınırlıdır denir.

Bu kümenin sınırlı olması için $\exists\, c > 0$ sayısı vardır ki, $\|x\| \leq 1$ şartını sağlayan her bir x için $\|\mathrm{A}x\| \leq c$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3. X Banach uzayında tanımlanmış, değerleri Y Banach uzayında olan lineer A operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\|\mathrm{A}x\| \le c\|x\|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Bu eşitsizlikteki c sabiti Tanım 2.9. daki c sabitidir.

İspat : Gerekliliğin ispatı. Eşitsizliğin $x = 0$ için sağlandığı açıktır.

$x \ne 0$, $x \in \mathrm{X}$ alalım ve $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ olsun. $x' \in \overline{S_1}(0)$ dır. Demek ki, x' için $\|\mathrm{A}x'\| \le c$ dır.

O zaman $\left\|\mathrm{A}\dfrac{x}{\|x\|}\right\| \le c$ olur. Böylece $\dfrac{1}{\|x\|}\|\mathrm{A}x\| \le c$ bulunur. Buradan da $\|\mathrm{A}x\| \le c\|x\|$ olarak bulunur.

Yeterlilik. $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\|\mathrm{A}x\| \le c\|x\|$ eşitsizliği sağlansın. $x \in \overline{S_1}(0)$ için $\|x\| \le 1$ dir.

$\|\mathrm{A}x\| \le c\|x\|$ eşitsizliğinden $\|\mathrm{A}x\| \le c$ bulunur.

Teorem 2.4. Lineer A operatörü tüm X normlu uzayını Y normlu uzayına dönüştürsün. Yani ; $\mathrm{D(A)} = \mathrm{X}$, $\mathrm{R(A)} \subseteq \mathrm{Y}$ ve lineer A operatörü sınırlı operatördür.

$\mathrm{M} \subset \mathrm{X}$ kümesi sınırlı olduğunda $\left\{ \|\mathrm{A}x\|,\ x \in \mathrm{M} \right\}$ kümesi de sınırlı olur.

İspat: M kümesi sınırlı küme olduğundan $\exists \mathrm{R} > 0$ sayısı var ki, $\forall x \in \mathrm{M}$ aldığımızda $\|x\| \le \mathrm{R}$ olur.

Lineer A operatörü sınırlı olduğundan Teorem 2.3.' e göre $\|\mathrm{A}x\| \le c\|x\|$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $\forall x \in \mathrm{M}$ aldığımızda $\|x\| \le \mathrm{R}$ olduğundan $\|\mathrm{A}x\| \le c\mathrm{R}$ olur. Bu da $\mathrm{A}x$ in sınırlı olduğunu gösterir.

Sonuç 2.1. A operatörü sınırlı lineer operatör olduğunda $x_0 \in \mathrm{X}$ ve $R > 0$ olmak üzere bu operatör $\forall S_{\mathrm{R}}(x_0)$ yuvarını sınırlı kümeye dönüştürür.

Başka bir deyişle; A operatörü $S_R(x_0)$ kümesinde sınırlı olur.

İspat: $x \in S_R(x_0)$ olduğundan $\|x - x_0\| < R$ dir. Ters üçgen eşitsizliğinden

$\left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\| < R$ olur. Buradan $\|x\| - \|x_0\| < R$, $\forall x \in S_R(x_0)$ bulunur.

$\|x\| < R + \|x_0\| = K$ olur ki, bu da sınırlı olması demektir.

2.11. Lineer Sınırlı, Lineer Sürekli Operatörler Sözcüklerinin Equivalent (Eşdeğer) olması

Teorem 2.5. X ve Y Banach uzayları, A operatörü ise tüm X de tanımlanmış ve değerleri Y'ye dâhil olan lineer operatör olsun. Yani $D(A) = X$ ve $R(A) \subseteq Y$

A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart A operatörünün sınırlı olmasıdır.

İspat: Gereklilik için, A operatörü sürekli operatör olsun. Bu operatörün sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için A operatörünün kapalı birim yuvarında sınırlı olduğunu göstermemiz gerekir.

Varsayalım ki A operatörü $\overline{S_1}(0)$ yuvarında sınırlı olmasın. O zaman $\forall n$ için,

$\exists\, x_n \in \overline{S_1}(0)$ elemanı var ki, $\|Ax_n\| \geq n$ olur. Buradan $\left\| \frac{Ax_n}{n} \right\| \geq 1$ dir. $x_n' = \frac{x_n}{n}$ olsun.

$\|x_n'\| = \frac{\|x_n\|}{n} \leq \frac{1}{n}$ olur. $n \to \infty$ için $x_n' \to 0$ olur. A sürekli olduğundan $Ax_n' \to 0$ olur. Ancak $\left\| \frac{Ax_n}{n} \right\| \geq 1$ eşitsizliğinden görüyoruz ki bu olamaz. Bu durum A operatörünün kapalı birim yuvarında sınırlı olmaması varsayımına uymuyor. Bu çelişki teoremin birinci kısmını ispatlar.

Yeterlilik için, A operatörü sınırlı olsun. Teorem 2.3.'e göre $\forall x \in X$ için $\|Ax\| \leq c\|x\|$ sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki yanından $x \to 0$ için limit alsak, $Ax \to 0$ olur. Bu ise A operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

2.12. Sonlu Boyutlu Uzaylarda Lineer Operatörlere Örnekler

$\mathbb{R}^m$ lineer uzayını ele alalım. Bu uzay,

$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix}$ $z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_m \end{pmatrix}$ $\ldots$ reel koordinatlı, m boyutlu sütun vektörlerin uzayıdır. A, *mxm* boyutlu reel elemanlı matris olsun. Yani; $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ O zaman $y = \mathrm{A}x$ eşitliği $\mathbb{R}^m$ uzayını $\mathbb{R}^m$ uzayına dönüştüren bir operatör tanımlar. $\mathrm{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Bu operatör lineer operatör olur. $y = \mathrm{A}x$ eşitliğinin açık olarak yazılışı $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ şeklindedir. Burada dikkat edelim ki, bu iki eşitliğin tanımladığı A operatörünün tanım bölgesinde bir norm, değerler bölgesinde başka bir norm tanımladığımızda biz başka başka operatörler almış oluruz. Bunu ayrı ayrı örneklerde gösterelim.

Örnek 2.7. $\mathrm{A} : C^m \to C^m$ bir operatördür. C^m uzayında norm

$$\|x\|_{\mathrm{K}} = \max_{1 \le i \le m} |\xi_i|$$

(Kübik norm) dur. Bunu göstermek için $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ eşitliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$|\eta_i| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j\right| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||\xi_j| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\|x\|_{\mathrm{K}} \le \max_{1 \le i \le m}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right)\|x\|_{\mathrm{K}}$$

bulunur. Buradan

$\max_{1 \le i \le m}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right) = \gamma_{\mathrm{m}}$ dersek $|\eta_i| \le \gamma_{\mathrm{m}}\|x\|_{\mathrm{K}}$ ve $\|y\|_{\mathrm{K}} \le \gamma_{\mathrm{m}}\|x\|_{\mathrm{K}}$ bulunur. $y = \mathrm{A}x$ yazarsak $\|\mathrm{A}x\|_{\mathrm{K}} \le \gamma_{\mathrm{m}}\|x\|_{\mathrm{K}}$ buluruz.

Böylece $y = \mathrm{A}x$ ve $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ eşitlikleri ile tanımlanmış A operatörünün C^m den C^m 'e sınırlı operatör olduğunu gösterdik.

Örnek 2.8. $\mathrm{A}: \ell_p^{(m)} \to \ell_q^{(m)}$ sınırlı operatör olduğunu gösterelim. Bunun için $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ eşitliğini alalım. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alırsak,

$|\eta_i| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j\right| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||\xi_j|$ olur. Buraya Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$|\eta_i| \le \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|\eta_i| \le \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$$

$$|\eta_i|^q \le \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right) \|x\|^q_{\ell_p^{(m)}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\eta_i|^q \le \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right) \|x\|^q_{\ell_p^{(m)}}$$

$$\|y\|_{\ell_q^{(m)}} \le \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$$

$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \beta_m$ dersek, $\|y\|_{\ell_q^{(m)}} \le \beta_m \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$ buluruz.

Böylece biz $y = \mathrm{A}x$ ile verilen A operatörünün $\ell_p^{(m)}$ den $\ell_q^{(m)}$ ye sınırlı olduğunu gösterdik.

Örnek 2.9. Şimdi biz $y = \mathrm{A}x$ ve $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ eşitlikleri ile tanımlanan lineer A operatörünün $\ell_p^{(m)}$ den $\ell_p^{(m)}$ ye bir sınırlı operatör tanımlandığını ispatlayalım. Bunun için $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j$ eşitliğini kullanalım. Her iki tarafın mutlak değerini alıp Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$|\eta_i| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j\right| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||\xi_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$$

buluruz. Burada her iki tarafın p.kuvvetini alırsak,

$$|\eta_i|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}} \|x\|^p_{\ell_p^{(m)}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\eta_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}} \|x\|^p_{\ell_p^{(m)}}$$

$$\|y\|_{\ell_p^{(m)}} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_m$$

alırsak,

$$\|\mathrm{A}x\|_{\ell_p^{(m)}} \leq \alpha_m \|x\|_{\ell_p^{(m)}}$$

Böylece A operatörünün $\ell_p^{(m)}$ den $\ell_p^{(m)}$ ye sınırlı operatör olduğunu gösterdik.

2.13. Sonsuz Diziler Uzayında Lineer Sınırlı Operatörler

Şimdi biz $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_m \\ \dots \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \\ \dots \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_m \\ \dots \end{pmatrix} \dots$ sonsuz boyutlu vektörlerin lineer uzayını ele alalım. Tüm vektörler sonsuz boyutludur ve A matrisi de sonsuz satırlı, sonsuz sütunlu matristir.

$$y = \mathrm{A}x \tag{2.2}$$

in açık yazılışı

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \tag{2.3}$$

şeklindedir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin formal (gerçekçi) olmayan eşitlik olması için sonsuz A matrisinin elemanları için ek şartların sağlanması gerekir. Biz bu şartlardan bazılarını yazalım ve bu şartlarda (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin tanımladığı lineer operatörlerin lineer sınırlı operatör olduklarını gösterelim.

Örnek 2.10. Örnek 2.7. de $\gamma_{\mathrm{m}} = \max\limits_{1\le i\le m}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right)$ gibi tanımlamıştık. Şimdi;

$\gamma = \sup\limits_{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|\right) < +\infty$ şartı sağlandığında (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin tanımladığı A operatörünün $\mathrm{A}: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ sınırlı operatör olduğunu gösterelim.

$$\|x\|_M = \sup_i |\xi_i|$$

$\|\mathrm{A}x\|_M \le \gamma\|x\|_M$ olduğunu göstermeliyiz.

$\max\limits_{1\le i\le m}|\eta_i| \le \max\limits_{1\le i\le m}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right)\max\limits_{1\le i\le m}|\xi_i|$ sağ yanda $m < n$ olmak üzere

$$\leq \gamma_n \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| \leq \gamma \|x\|_M \text{ olur. } \|\mathrm{A}x\|_M \leq \gamma \|x\|_M \text{ olur.}$$

Örnek 2.11. A matrisinin elemanları için $\beta = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$ (*sınırlı*) olursa, o zaman (2.2) ve (2.3) eşitlikleri ile tanımlanan A operatörü $A : \ell_p \to \ell_q$ sınırlı lineer operatör olur.

Örnek 2.12. Sonsuz A matrisinin elemanları için $\alpha = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$ olduğunda (2.2) ve (2.3) eşitlikleri ile tanımlanan A operatörü $A : \ell_p \to \ell_p$ sınırlı lineer operatör olur.

2.14. Fonksiyon Uzaylarında Tanımlanmış İntegral Operatörler

$$v(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)ds \qquad (2.4)$$

integralini ele alalım. Bu ifadeyi sembolik olarak

$$v = \mathrm{A}u \qquad (2.5)$$

şeklinde yazalım. (2.4) eşitliğindeki ifadeye *integral operatör* denir. Buradaki K(x,s) fonksiyonu iki değişkenli olarak verilmiştir. Bu fonksiyona integral operatörünün *çekirdeği* denir.

Varsayalım ki K(x,s) fonksiyonu $[a,b]\mathrm{x}[a,b]$ dikdörtgeninde sürekli fonksiyon olsun. Matematik analizde kolaylıkla ispatlanır ki, eşitliğin sol tarafındaki $v(x)$ de $[a,b]$ de süreklidir. Şimdi biz (2.4) ve (2.5) ile tanımlanan A operatörünün $\mathrm{A} : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer sınırlı operatör olduğunu gösterelim. Bunun için (2.4) eşitliğini kullanalım.

$$|v(x)| \le \int_a^b |K(x,s)||u(s)|\,ds \le \int_a^b |K(x,s)|ds\,\|u\|_{C[a,b]} \le \underbrace{\max_{a\le x\le b}\int_a^b |K(x,s)|ds}_{c}\,\|u\|_{C[a,b]}$$

$$|v(x)| \le c\|u\|_{C[a,b]}$$

bulduk. Buradan da

$$\|v(x)\|_{C[a,b]} \le c\|u\|_{C[a,b]} \text{ olur ve } \|\mathrm{A}u\|_{C[a,b]} \le c\|u\|_{C[a,b]}$$

olur. A'nın sınırlı olduğunu bulduk.

Şimdi biz (2.4) ve (2.5) ile tanımlanan lineer A operatörünün $\mathrm{A}:\tilde{L}_p[a,b] \to \tilde{L}_q[a,b]$ lineer sınırlı operatör olduğunu gösterelim. Bunun için (2.4) eşitliğini kullanalım.

$$|v(x)| \le \int_a^b |K(x,s)||u(s)|\,ds \le \left(\int_a^b |K(x,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Hölder eşitsizliği)}$$

$|v(x)| \le \left(\int_a^b |K(x,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\tilde{L}_p[a,b]}$ bulunur. Buradan da;

$|v(x)|^q \le \left(\int_a^b |K(x,s)|^q ds\right) \|u\|_{\tilde{L}_p[a,b]}$ olur. Bu eşitsizliğin iki yanının x'e göre integralini alıp q.mertebeden kökünü alsak;

$$\|\mathrm{A}u\|_{\tilde{L}_q[a,b]} \le \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^q ds dx\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\tilde{L}_p[a,b]}$$

buluruz. Bu eşitsizlikten görüyoruz ki $\{u_n\} \subset \tilde{L}_p[a,b]$ fundamental dizisini aldığımızda $\{\mathrm{A}u_n\}$ dizisi $\tilde{L}_p[a,b]$ uzayında fundamental dizi olur. Bu yüzden,

$\|\mathrm{A}u_n\|_{\tilde{L}_q[a,b]} \le \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^q ds dx\right)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_{\tilde{L}_p[a,b]}$ her yandan $n \to \infty$ için limit alsak;

$\|Au\|_{L_q[a,b]} \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^q ds dx \right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L_p[a,b]}$ eşitsizliğini buluruz. Bununla biz (2.4) ve (2.5) eşitlikleri ile tanımlanan A operatörünün $A: L_p[a,b] \to L_q[a,b]$ lineer sınırlı operatör olduğunu göstermiş oluruz.

2.15. Diferansiyel Operatörler

Diferansiyel ifadeyle tanımlanmış aşağıdaki A operatörünü ele alalım.

$$Au = a_0(x)u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)u \tag{2.6}$$

$A: C^{(n)}[a,b] \to C[a,b]$ nın sürekli sınırlı bir operatör olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki; $a_0(x), a_1(x), \ ... \ , a_n(x)$ $[a,b]$ de tanımlanmış sürekli fonksiyonlardır. $\|Au\|_{C[a,b]} \le c\|u\|_{C^{(n)}[a,b]}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$|Au| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k(x)| |u^{(n-k)}(x)| \le \max\left(\max_{a\le x\le b} |a_0(x)|, \ ... \ , \max_{a\le x\le b} |a_n(x)| \right) \sum_{k=0}^{n} |u^{(n-k)}(x)|$$

$\le c \sum_{k=0}^{n} \max_{a\le k\le b} |u^{(n-k)}(x)|$ Böylece $|Au| \le c\|u\|_{C^{(n)}[a,b]}$ olur ve $\|Au\|_{C[a,b]} \le c\|u\|_{C^{(n)}[a,b]}$

bulunur. Bu da aradığımız eşitsizliktir.

2.16. Lineer Operatörler Uzayı

L(X,Y) normlu uzayını ve lineer operatörün normunu inceleyelim.

2.16.1. L(X,Y) Normlu Uzayı, Lineer Operatörün Normu

A,B,C … tüm normlu X uzayında tanımlanmış, değerleri normlu Y uzayında olan lineer sürekli operatörlerin kümesi olsun. Bu kümede operatörlerin toplamını ve skaler sayıyla çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$(A+B)(x) = Ax + Bx \quad \text{ve} \quad (\lambda A)(x) = \lambda(Ax)$$

Lineer uzayda operatörün normunu,

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|\mathrm{A}x\| \tag{2.7}$$

ile tanımlayalım. Önce bu normun varlığını gösterelim.

Biz üstten sınırlı lineer operatörün tanımını verdiğimizde gösterdik ki;

$\{\,\|\mathrm{A}x\|\,,\ \|x\|\le 1\,\}$ kümesi sınırlıdır. Yani; $\|x\|\le 1$ için $\|\mathrm{A}x\|\le c$ dir.

Üstten sınırlı kümenin tek bir tane supremumu olduğundan (2.7) ile tanımlanan norm vardır ve tektir. Supremumun özelliğinden $\|x\|\le 1$ eşitsizliğini sağlayan her bir x için $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|$ eşitsizliği sağlanır. Buradan Teorem 2.4.'e göre,

$$\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\|x\| \quad , \ \forall x\in \mathrm{X} \tag{2.8}$$

eşitsizliği yazılır. Teorem 2.4. te

$$\|\mathrm{A}x\|\le c\|x\| \tag{2.9}$$

eşitsizliği ile (2.8) karşılaştırıldığında $\|\mathrm{A}\|\le c$ bulunur. Böylece (2.9) eşitsizliğini sağlayan c'lerin infimum olduğunu görürüz.

Şimdi (2.7) eşitliği ile verilen normun, norm aksiyomlarını sağladığını gösterelim. Yani;

1) $\|x\|\ge 0 \quad , \quad \|x\|=0 \ \Leftrightarrow\ x=0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

şartlarını gösterelim. (2.7) eşitliğinden $\|\mathrm{A}\|\ge 0$ olduğu açıktır. Varsayalım ki $\|\mathrm{A}\|=0$ olsun. $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\|x\|$ de yerine yazarsak, $\forall x\in\mathrm{X}$ için,

$\|\mathrm{A}x\| = 0$, $\mathrm{A}x = 0$, $\forall x \in \mathrm{X}$ olduğundan, $\mathrm{A} = 0$ olur.

$$\|\lambda \mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(\lambda \mathrm{A})x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\lambda(\mathrm{A}x)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|\mathrm{A}x\| = |\lambda| \|\mathrm{A}\|$$

$\|(\mathrm{A+B})x\| = \|\mathrm{A}x+\mathrm{B}x\| \le \|\mathrm{A}x\| + \|\mathrm{B}x\|$ her taraftan supremum alırsak,

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|(\mathrm{A+B})x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\mathrm{A}x+\mathrm{B}x\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|\mathrm{A}x\| + \sup_{\|x\|\le 1} \|\mathrm{B}x\|$$

buradan da

$$\|\mathrm{A+B}\| \le \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|$$

bulunur.

Böylece biz tüm normlu X uzayında tanımlanmış, değerleri normlu Y uzayında olan lineer sürekli operatörlerin normlu uzayını tanımladık. Bu uzayı biz L(X,Y) şeklinde gösteririz.

2.16.2. Lineer Operatörlerin Düzgün Yakınsaklığı

$\mathrm{L(X,Y)}$ uzayından $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisini alalım. $\mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$ olsun. $n \to \infty$ yaklaştığında,

$\|\mathrm{A}_n - \mathrm{A}\| \to 0$ yakınsıyorsa $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisi A'ya düzgün yakınsaktır denir.

Böylece buradan görüyoruz ki lineer operatörlerin düzgün yakınsaklığı L(X,Y) uzayında norma göre yakınsaklıktır.

Teorem 2.6. $\mathrm{A}_n, \mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$ olsun. $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisinin A'ya düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart; $\{\mathrm{A}_n x\}$ dizisinin $\mathrm{A}x$ 'e $\overline{S}_1(0)$ kapalı yuvarında x 'e göre düzgün yakınsak olmasıdır.

İspat: Gereklilik için, varsayalım ki $\mathrm{A}_n \to \mathrm{A}$ 'ya düzgün yakınsaktır. Gösterelim ki $\{\mathrm{A}_n x\}$ dizisi $\mathrm{A}x$ 'e $\overline{S}_1(0)$ kapalı yuvarında x 'e göre düzgün yakınsaktır.

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\|\underbrace{\|x\|}_{\le 1} \le \|A_n - A\| \to 0$$ olduğundan $A_n x \to Ax$ olur.

Teoremin birinci kısmı ispatlandı.

Yeterlilik için, varsayalım ki $\{A_n x\}$ dizisi Ax 'e $\overline{S}_1(0)$ kapalı yuvarında x 'e göre düzgün yakınsaktır. Gösterelim ki $\{A_n\}$ dizisi A 'ya düzgün yakınsaktır.

$\|x\| \le 1$ olsun. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$ için $\|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}$ 'dir. Şimdi x'e bağlı olmadan sağlandığını gösterelim.

$\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|A_n x - Ax\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ eşitsizliğini buluruz. $\|A_n - A\| < \varepsilon$ olur. Bu da $\{A_n\}$ dizisinin A 'ya düzgün yakınsaklığının tanımıdır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılır.

Sonuç 2.2. $A_n, A \in L(X,Y)$ ve $A_n \to A$ düzgün yakınsak dizi olsun. O zaman $M \subset X$ keyfi sınırlı küme olduğunda $\{A_n x\}$ dizisi Ax 'e M kümesinde x 'e göre düzgün yakınsaktır.

İspat: M kümesi sınırlı küme olduğundan $\exists R$ için $\forall x \in M, \|x\| \le R$ sağlanır. Şimdi gösterelim ki $\{A_n x\}$ dizisi Ax 'e M kümesinde düzgün yakınsaktır.

$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\|\|x\| \le R\|A_n - A\| \to 0$ ispat tamam.

Teorem 2.7. L(X,Y) uzayında X normlu uzay, Y Banach uzayı olduğunda L(X,Y) uzayı Banach uzayı olur.

İspat: Bunu göstermek için keyfi fundamental $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ dizisini alalım ve bu dizinin L de yakınsak olduğunu gösterelim.

$\{A_n\}$ fundamental dizi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N, \forall n > N$, $p = 1,2,3, \ldots$

$\left\| A_{n+p} - A_n \right\| < \varepsilon$ sağlanır. Şimdi gösterelim ki, $\forall x \in X$ için $\{A_n x\}$ dizisi de fundamentaldir.

$\left\| A_{n+p}x - A_n x \right\| = \left\| \left(A_{n+p} - A_n \right) x \right\| \le \left\| A_{n+p} - A_n \right\| \left\| x \right\| \to 0$ Gösterdik ki $\{A_n x\}$ dizisi fundamentaldir.

Y, Banach uzayı olduğundan, $\exists y \in Y$ var ki, $n \to \infty$ gittiğinde $\lim\limits_{x\to\infty} A_n x = y$ olur. Biz bu yöntemle X uzayında bir operatör tanımlamış oluruz. Bu operatörü A ile gösterelim. $\{A_n\}$ operatörler dizisi lineer olduğundan ve limit işlemi de lineer olduğundan, bu yöntemle tanımladığımız A operatörü lineer operatördür.

A_n operatörleri L den olduğunda sınırlı operatör olurlar. Yani;

$$\left\| A_n x \right\| \le \left\| A_n \right\| \left\| x \right\| \quad , \ \forall x \in X \ \text{ için} \tag{2.10}$$

sağlanır. Aşağıdaki ters üçgen eşitsizliğinden,

$\left| \left\| A_{n+p} \right\| - \left\| A_n \right\| \right| \le \left\| A_{n+p} - A_n \right\| \to 0$ olur. Buradan da buluruz ki, $\{\left\| A_n \right\|\}$ dizisi sınırlıdır. Fundamental her dizi sınırlı olduğundan $\left\| A_n \right\| \le c$ sağlanır. Bu eşitsizliği (2.10) da dikkate alsak $\left\| A_n x \right\| \le c \left\| x \right\|$ olur. Bu eşitsizliğin her yanından $n \to \infty$ için limit alsak $\left\| Ax \right\| \le c \left\| x \right\|$, $\forall x \in X$ buluruz. Bu da A operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

Yani; L(X,Y) 'nin Banach uzayı olduğunu gösterdik.

2.16.3. L(X,Y) Uzayında Seriler, L(X) Uzayı

L(X,Y) uzayında keyfi $\{A_k\} \subset L(X,Y)$ dizisini ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \tag{2.11}$$

serisini alalım. Bu serinin kısmı toplamlar dizisi $S_n = A_1 + A_2 + \ ... \ + A_n$ düzgün yakınsak olduğunda, yani L(X,Y) uzayındaki norma göre yakınsak olduğunda bu seri düzgün yakınsaktır denir. Ama,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| \tag{2.12}$$

sayısal serisi yakınsak olduğunda (2.11) serisine *mutlak(absolute) yakınsak seri* denir.

Teorem 2.8. L(X,Y) uzayı Banach uzayı olsun. O zaman $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ serisi mutlak yakınsak olduğunda bu seri düzgün yakınsak olur.

İspat: Bu teoremin ispatı aşağıdaki eşitsizlikten bulunur.

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A_k\| < \varepsilon$$

Burada önemli bir özel hali ele alalım.

L(X,X) uzayını ele alalım. Biz bunu kısaca L(X) olarak gösteririz. Bu L(X) uzayın önemi, bu uzayda ikinci bir cebirsel işlem tanımlanmış olmasındadır. Yani $A \in L(X)$ ve $B \in L(X)$ aldığımızda A.B işlemi de tanımlanır. Elemanların çarpımı işlemi $(AB)x = A(Bx)$ eşitliği ile tanımlanır. Elemanların çarpımı işlemi tanımlandığından, A^k , $k = 1, 2, 3, \ ...$ kuvvet işlemi de tanımlanır.

$A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, ... şeklinde operatörlerin kuvveti tanımlanır.

Şimdi $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ve $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$ eşitsizliklerin doğru olduğunu gösterelim.

$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$ buradan $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ bulunur.

$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|$ buradan $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$ bulunur.

Lemma 2.1. Varsayalım ki $\{A_n\} \subset L(X)$, $\{B_n\} \subset L(X)$, $A \in L(X)$, $B \subset L(X)$ olsun. Eğer $A_n \to A$, $B_n \to B$ yakınsak ise o zaman $A_n B_n \to AB$ olur.

İspat: $\|A_n B_n - AB\| \le \|A_n B_n - AB_n\| + \|AB_n - AB\| = \|(A_n - A)B_n\| + \|A(B_n - B)\|$

$$\le \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0}\|B_n\| + \|A\|\underbrace{\|B_n - B\|}_{\to 0}$$

o halde $\|A_n B_n - AB\| \to 0$ olur. Lemma ispatlandı.

L(X) uzayında elemanların çarpımı işlemi tanımlandığından operatörlere bağlı fonksiyon tanımlanabilir.

$$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ ... \ + a_n$$

$$P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ ... \ + a_n A^0 \qquad \left(A^0 = I\right)$$

Böylece, $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ olur.

2.16.4. L(X,Y) Uzayında Güçlü Yakınsaklık

Tanım 2.10. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ve $A \in L(X,Y)$ olsun. $\forall x \in X$ için $n \to \infty$ yaklaştığında $A_n x \to Ax$ yaklaşırsa $\{A_n\}$ dizisi A'ya güçlü yakınsaktır denir.

Not 2.1. Bu yakınsaklığa bazen noktasal yakınsaklık ta denir.

Şimdi gösterelim ki her bir düzgün yakınsak dizi aynı zamanda güçlü yakınsaktır. Gerçekten de;

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0}\|x\|$$

Bu eşitsizlikten her düzgün yakınsak dizinin güçlü yakınsak olduğu görülür. Ama bunun tersi her zaman doğru değildir. Buna bir örnek verelim.

ℓ_2 uzayını ele alalım. $x \in \ell_2$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ ... \ )$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < +\infty$

Aşağıdaki operatörü tanımlayalım.

$$P_n \in \mathrm{L}(\ell_2) \quad , \quad P_n x \to x \quad (\mathrm{X} = \ell_2) \quad , \quad P_n x = y \quad , \quad y = \begin{cases} \xi_i & , \ i = 1, 2, \ ... \ , n \\ 0 & , \ i \geq n+1 \end{cases}$$

Gösterelim ki P_n , I operatörüne güçlü yakınsaktır. $\|P_n x - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2 \to 0$

Şimdi gösterelim ki P_n , I operatörüne düzgün yakınsak değildir. Bunun için $x \in \ell_2$, $\|x\| = 1$, $P_n x = 0$ olsun. Bunlar için $\|P_n x - x\| = 1$ olur. Buradan $\|P_n - \mathrm{I}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_n x - x\| \geq 1$ olur. Buradan da görülür ki P_n , I operatörüne düzgün yakınsak değildir ama güçlü yakınsaktır.

2.16.5. Düzgün Sınırlılık Prensibi

Düzgün sınırlılık prensibini yazmadan önce bu prensiple yakından ilgili olan aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.2. L(X,Y) uzayından $\{\mathrm{A}_n\}$ operatörler dizisini alalım. Varsayalım ki bu operatör dizileri için $\exists c > 0$, $\exists \overline{S}_r(x_0)$ vardır ki $\forall x \in \overline{S}_r(x_0)$ için $\|\mathrm{A}_n x\| \leq c$ eşitsizliği sağlanır. Yani, $\{\|\mathrm{A}_n x\|\}$ dizisi $\overline{S}_r(x_0)$ yuvarında düzgün sınırlıdır. O zaman $\{\|\mathrm{A}_n\|\}$ dizisi sınırlıdır.

İspat: $x \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{X}$ elemanını alalım. O zaman , $x_0 + \dfrac{x}{\|x\|} r \in \overline{S}_r(x_0)$ olur.

$$c \geq \left\| \mathrm{A}_n \left(x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \right) \right\| = \left\| \frac{r}{\|x\|} \mathrm{A}_n x + \mathrm{A}_n x_0 \right\| \geq \frac{r}{\|x\|} \|\mathrm{A}_n x\| - c$$

$2c \geq \frac{r}{\|x\|}\|A_n x\|$ olur. Buradan da $\|A_n x\| \leq \frac{2c}{r}\|x\|$ ve $\|A_n x\| \leq k\|x\|$ bulunur. Böylece $\{\|A_n\|\}$ sınırlıdır.

Teorem 2.9 (Düzgün Sınırlılık Prensibi).

$\{A_n\} \subset L(X,Y)$ olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $\{\|A_n x\|\}$ dizisi sınırlı olursa, o zaman $\{\|A_n\|\}$ dizisi sınırlıdır.

İspat: Bunu ispatlamak için aksini farz edelim. Varsayalım ki, $\forall x \in X$ aldığımızda $\{\|A_n x\|\}$ in sınırlı olmasına bakmayarak $\{\|A_n\|\}$ sınırlı değildir. O zaman, $\{\|A_n x\|\}$ Lemma 2.2.'ye göre hiçbir kapalı yuvarda sınırlı olamaz. Keyfi S_0 yuvarını alalım. S_0 yuvarında $\{\|A_n x\|\}$ sınırlı olamaz. Bu $\exists n_1, x_1$ için $\left\|A_{n_1} x_1\right\| > 1$ demektir. A_{n_1} sürekli olduğundan x_1 noktasının $\exists S_{r_1}(x_1)$ komşuluğu bulunur ki $\left\|A_{n_1} x\right\| \geq 1$, $\forall x \in S_{r_1}(x_1)$ dir.

$S_{r_1}(x_1) \subset S_0$, $r_1 < 1$ $\|A_n x\|$, $S_{r_1}(x_1)$ de sınırlı olamaz. O zaman $\exists n_2 > n_1$ $\exists x_2 \in S_{r_1}(x_1)$ için $\left\|A_{n_2} x_2\right\| > 2$ olur. A_{n_2} sürekli olduğundan merkezi x_2 de olan yarıçapı $r_2 < \frac{1}{2}$ olan $\overline{S}_{r_2}(x_2) \subset \overline{S}_{r_1}(x_1)$ $\left\|A_{n_2} x\right\| > 2$, $\forall x \in \overline{S}_{r_2}(x_2)$ olur.

Bu işlemleri böyle devam ettirirsek o zaman biz,

$$S_0 \supset S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \ \ldots \ \supset S_{r_k}(x_k) \supset \ \ldots$$

yuvarlar dizisini elde ederiz. Burada $S_{r_k}(x_k)$, $\left\|A_{n_k} x\right\| > k$ sağlanır. Böylece biz biri diğerine dâhil olan, yarıçapı 0'a yakın olan yuvarlar dizisini elde ettik. Biri diğerine dâhil olan yuvarlar prensibine göre $\exists \overline{x}$ var ki bu yuvarların her birisine dâhildir. Buradan biz $\left\|A_{n_k} \overline{x}\right\| > k$, $\left\|A_n \overline{x}\right\| > k$ elde ederiz. Bu çelişki düzgün yakınsaklık teoremini ispatlar.

Teorem 2.10 (Banach-Steinhaus Teoremi).

$\{\mathrm{A}_n\} \subset \mathrm{L(X,Y)}$ ve $\mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$ olsun. $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisinin A'ya güçlü yakınsak olması için gerek ve yeter şart;

1) $\{\|\mathrm{A}_n\|\}$ dizisinin sınırlı olması

2) Normlu X uzayında her yerde yoğun olan bir X' lineer manifoldunda $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisinin A'ya güçlü yakınsak olmasıdır.

İspat: Gereklilik için, varsayalım ki A_n, A'ya X de güçlü yakınsak olsun. Böylece $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{A}_n x$, $\mathrm{A}x$ 'e yakınsaktır. Buradan da $\|\mathrm{A}_n x\|$ de $\|\mathrm{A}x\|$ 'e $\forall x \in \mathrm{X}$ için yakınsak olur. Gerçekten de,

$\big|\,\|\mathrm{A}_n x\| - \|\mathrm{A}x\|\,\big| \le \|\mathrm{A}_n x - \mathrm{A}x\| \to 0$ olur. Bu demektir ki $\{\|\mathrm{A}_n x\|\}$ dizisi sınırlıdır. Buradan da $\{\|\mathrm{A}_n\|\}$ dizisi sınırlıdır.

2.sini göstermek için $\mathrm{X}' = \mathrm{X}$ almak yeterlidir. (Kendi kendinin lineer manifoldu olur.)

Yeterlilik için, 1 ve 2 sağlansın. Gösterelim ki A_n, A'ya güçlü yakınsaktır.

Bunun için $x \neq x'$, $x \notin \mathrm{X}'$ olan $\forall x \in \mathrm{X}$ alalım. O zaman X', X e her yerde yoğun olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in \mathrm{X}$ bulunur ki, $\|x - x'\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi gösterelim ki keyfi aldığımız x noktasında $\mathrm{A}_n x \to \mathrm{A}x$ olur.

$$\|\mathrm{A}_n x - \mathrm{A}x\| \le \|\mathrm{A}_n x - \mathrm{A}_n x'\| + \|\mathrm{A}_n x' - \mathrm{A}x'\| + \|\mathrm{A}x' - \mathrm{A}x\|$$

Burada $\sup\limits_{k=0,1,..} \|\mathrm{A}_n\| = c$ ve $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ alalım.

$$\|\mathrm{A}_n x - \mathrm{A}x\| \le \underbrace{\|\mathrm{A}_n\|}_{\le c}\underbrace{\|x - x'\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\mathrm{A}_n x' - \mathrm{A}x'\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\mathrm{A}\|}_{\le c}\underbrace{\|x - x'\|}_{<\varepsilon} < (2c+1)\,\varepsilon$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

2.16.6. Lineer Operatörlerin Sürekliliğe Göre Devamı

Varsayalım ki X ve Y normlu uzaylar ve $A:X \to Y$ lineer operatördür. $D(A) \subseteq X$, $R(A) \subseteq Y$ ve $\overline{D(A)} = X$ ($D(A)$, X de her yerde yoğun) olsun.

Eğer $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\| \le 1}} \|Ax\| < +\infty$ ise A operatörü D(A) bölgesinde sınırlıdır denir ve burada tanımladığımız $\|A\|$, A operatörünün normu olarak adlandırılır.

Teorem 2.11. Varsayalım ki lineer A operatörü X uzayını Y uzayına dönüştüren lineer operatör olsun. X normlu uzay, Y Banach uzayı , $D(A) \subseteq X$, $R(A) \subseteq Y$, $\overline{D(A)} = X$ ve A operatörü D(A) da sınırlıdır. O zaman tüm X de tanımlanmış $\exists \widehat{A}$ operatörü vardır ki;

1) $\forall x \in D(A)$ için $\widehat{A}x = Ax$

2) $\|\widehat{A}\| = \|A\|$ eşitliği doğrudur.

Bu teoreme lineer operatörün sürekliliğe göre devamı teoremi denir. Bu teoremin bir özelliği de; A operatörünü tüm X de devam ettirdiğimizde A operatörünün normu büyütülmeden devam ettirilir.

İspat: $x \in D(A)$ olduğunda $\widehat{A}x = Ax$ alalım. Böylece 1. şart tamamlanmış olur.

$x \notin D(A)$ için $\forall x \in X$ alalım. O zaman $D(A)$, X de her yerde yoğun olduğundan $\exists \{x_n\} \in D(A)$ dizisi var ki $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = x$ dir. $\widehat{A}$ operatörünü $\widehat{A}x = \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu tanımın doğru olduğunu gösterelim.

Bu tanımın doğru olduğunu göstermek için önce $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n$ limitinin varlığını gösterelim. Bunun için $\{Ax_n\} \subset Y$ dizisinin fundamental olduğunu gösterelim.

$$\|Ax_{n+p} - Ax_n\| \le \|A\| \underbrace{\|x_{n+p} - x_n\|}_{\to 0}$$

böylece $\mathrm{A}x_n$ fundamentaldir. Y Banach uzayı olduğundan $\exists y \in \mathrm{Y}$ vardır ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{A}x_n = y$ olur. Böylece limitin varlığını gösterdik.

Şimdi gösterelim ki, bu eşitlik x 'e yakınsak olan x_n ' in seçimine bağlı değildir. $\{x'_n\} \subset \mathrm{D(A)}$, $x'_n \to x$ dir. Varsayalım ki $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{A}x'_n = z$ olsun. (Aksini varsaydık)

$$\|y-z\| \le \underbrace{\|y-\mathrm{A}x_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|\mathrm{A}x_n - \mathrm{A}x'_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|\mathrm{A}x'_n - z\|}_{\to 0}$$

olur. Şimdi $\|\widehat{\mathrm{A}}\| = \|\mathrm{A}\|$ olduğunu gösterelim.

$\|\mathrm{A}x_n\| \le \|\mathrm{A}\|\|x_n\|$ yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her yanından $n \to \infty$ için limit alırsak $\|\widehat{\mathrm{A}}x\| \le \|\mathrm{A}\|\|x\|$ bulunur. Bu ise $\|\widehat{\mathrm{A}}\| \le \|\mathrm{A}\|$ olmasını gerektirir. Diğer yandan $\|\widehat{\mathrm{A}}\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|\widehat{\mathrm{A}}x\| \ge \sup\limits_{\substack{x\in \mathrm{D(A)} \\ \|x\|\le 1}} \|\widehat{\mathrm{A}}x\| = \|\mathrm{A}\|$ ve $\|\widehat{\mathrm{A}}\| \ge \|\mathrm{A}\|$ olur. Bu iki eşitsizlikten $\|\widehat{\mathrm{A}}\| = \|\mathrm{A}\|$ bulunur.

2.17. Normlu ve Banach Uzaylarında Seriler

Tanım 2.11. X herhangi bir normlu uzay ve $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_k, \ldots$ X in elemanları olsun. Bu durumda,

$$x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

toplamına X uzayında bir seri denir.

$$S_n = x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n$$

toplamına serinin kısmi toplamı denir.

$$
\begin{aligned}
&S_1 = x_1 \\
&S_2 = x_1 + x_2 \\
&\text{........................} \\
&S_n = x_1 + x_2 + \ \dots\ + x_n \\
&\text{.....................................}
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. Eğer $n \to \infty$ iken $\{S_n\}$ dizisinin limiti varsa o zaman seri yakınsaktır denir. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

ise s elemanına serinin toplamı denir ve

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

şeklinde yazılır.

Not 2.2. Buradaki yakınsaklık norma göredir. Aşağıdaki özelliği verelim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x_k} = \tilde{s}$$

olduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k + \widetilde{x_k} \right) = s + \tilde{s}$$

dir. Gerçekten,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = s \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} \widetilde{S_k} = \tilde{s}$$

olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} S_k + \lim_{k\to\infty} \widetilde{S_k} = \lim_{k\to\infty} \left(S_k + \widetilde{S_k} \right) = s + \tilde{s}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k+\widetilde{x_k}\right)=s+\tilde{s}$$

bulunur.

Teorem 2.12 (Cauchy Kriteri). X normlu uzayında $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin yakınsak olması için gerekli, X Banach uzayı olduğunda ise yeterli şart $\forall\varepsilon>0$ için $\exists \mathrm{N}$ var ki, $\forall n>\mathrm{N}$ için ve keyfi doğal $p\geq 1$ için

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\|<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanmasıdır.

Bu teoremin ispatı serinin yakınsaklığının tanımından ve diziler için Cauchy kriterinden çıkar.

Not 2.3. Normlu uzayda $\{S_n\}$ dizisinin Cauchy kriteri $\left\|S_{n+p}-S_n\right\|<\varepsilon$ eşitsizliğinden alınır.

Tanım 2.12. $x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n+\ldots$ serisine uygun olarak $\|x_1\|+\|x_2\|+\ \ldots\ +\|x_n\|+\ldots$ serisini ele alalım. Eğer bu seri yakınsak olursa, o zaman $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine *mutlak yakınsak seri* denir.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ serileri, mutlak yakınsak seriler olduğunda, λ ve μ keyfi sayılar olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda x_k+\mu y_k\right)$ serisi de mutlak yakınsaktır.

Gerçekten de,

$$\left\|\lambda x_k+\mu y_k\right\|\leq\left\|\lambda x_k\right\|+\left\|\mu y_k\right\|=|\lambda|\left\|x_k\right\|+|\mu|\left\|y_k\right\|$$

dan $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ serisi ve $\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\|$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}\|\lambda x_k+\mu y_k\|$ serisi yakınsaktır. Buradan da $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda x_k+\mu y_k\right)$ serisi mutlak yakınsaktır.

Teorem 2.13 (Weierstrass Teoremi). Banach uzayında her bir mutlak yakınsak seri aynı zamanda yakınsaktır.

Bu teoremin ispatı,

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\| \le \sum_{k=n}^{n+p}\|x_k\|$$

eşitsizliğinden çıkar.

Bu teoremin tersi de doğrudur. Bu teoremin sonucunun iyi olması için esas nokta uzayın Banach uzayı olmasıdır.

Teorem 2.14. Eğer herhangi bir normlu X uzayında her bir mutlak yakınsak seri aynı zamanda yakınsak olursa, o zaman bu uzay Banach uzayıdır.

İspat: $\forall\varepsilon>0$ için $\exists \mathrm{N}$ var ki, $\forall n>\mathrm{N}$ için ve keyfi doğal $p\ge 1$ için $\left\|S_{n+p}-S_n\right\|<\varepsilon$ oluyorsa, $\{S_n\}$ dizisine Cauchy dizisi diyoruz.

X uzayında keyfi fundamental $\{x_n\}$ dizisi alalım. Gösterelim ki, $\exists x\in \mathrm{X}$, $\{x_n\}\to x$ tir. $\{x_n\}$ dizisi fundamental olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists \mathrm{N}$ vardır, öyle ki, $\forall n>\mathrm{N}$ için ve keyfi doğal $p\ge 1$ için $\left\|x_{n+p}-x_n\right\|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Burada $\varepsilon=\dfrac{1}{2^k}$ alınarak $\{x_n\}$ dizisinden bir $\left\{x_{n_k}\right\}$ alt dizisi seçebiliriz ki,

$\left\|x_{n_1}\right\|\le\dfrac{1}{2}, \left\|x_{n_2}-x_{n_1}\right\|\le\dfrac{1}{2^2},\ ...\ ,\left\|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}\right\|\le\dfrac{1}{2^k}$ eşitsizlikleri sağlanır. $\left(k=1,2,\ ...\ \right)$

$$x_{n_1}+\left(x_{n_2}-x_{n_1}\right)+\ ...\ +\left(x_{n_k}-x_{n_{k-1}}\right)+\ ...$$

serisini ele alalım.

$$\left\|x_{n_1}\right\| \leq + \left\|x_{n_2} - x_{n_1}\right\| + \ \dots \ \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| + \ \dots$$

serisi yakınsaktır. Çünkü

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ \dots \ + \frac{1}{2^k} + \ \dots$$

serisi yakınsaktır. Böylece ele aldığımız seri yakınsaktır. Ele aldığımız dizinin kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = x_{n_1} + \left(x_{n_2} - x_{n_1}\right) + \ \dots \ + \left(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right) = x_{n_k}$$

olduğundan $\left\{x_{n_k}\right\}$ dizisi yakınsaktır.

Fundamental bir dizinin herhangi bir alt dizisi bir x elemanına yakınsak olduğunda dizinin kendisi de aynı x elemanına yakınsak olacağından $\left\{x_n\right\}$ dizisi yakınsaktır. Böylece keyfi fundamental dizi yakınsak olduğundan X uzayı Banach uzayı olur.

2.18. Sayısal Değişkenlere Bağlı Abstract Fonksiyonlar

Sayısal değişkenlere bağlı abstract fonksiyonları, limitini ve sürekliliğini inceleyelim.

2.18.1. Limit ve Süreklilik

Tanım 2.13. Λ sayısal herhangi bir küme (mesela, kompleks sayılardan oluşmuş) ve X herhangi bir normlu Banach uzayı olsun. $x(\lambda): \Lambda \rightarrow \mathrm{X}$ fonksiyonuna *sayısal değişkenli abstract fonksiyon* denir.

Sayısal değişkenli abstract fonksiyonlar için matematik analizde gördüğümüz birçok tanımlar uygun şekilde verilebilir. Bunlardan bazılarını verelim.

Tanım 2.14. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu, $\lambda_0 \in \Lambda$ noktasının bir komşuluğunda tanımlansın (λ_0 noktasının kendisinde tanımlanmayabilir) ve $a \in \mathrm{X}$ olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\| x(\lambda) - a \right\| = 0$$

ise, o zaman a elemanına, $x(\lambda)$'nın λ_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) = a$$

veya

$$x(\lambda) \to a \ , \left(\lambda \to \lambda_0\right)$$

şeklinde yazılır. Burada tanımlanan limitin aşağıdaki özelliklerini verelim.

Özellik 2.1. $\varphi(\lambda)$ adi sakaler fonksiyon, $x(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ abstract fonksiyonlar olsun ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \varphi(\lambda) = \alpha \ , \ \lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) = a \ , \ \lim_{\lambda \to \lambda_0} y(\lambda) = b$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\varphi(\lambda) x(\lambda)\right) = \alpha a$$

ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(x(\lambda) + y(\lambda)\right) = a + b$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(\lambda) x(\lambda) - \alpha a \right\| &= \left\| \varphi(\lambda) x(\lambda) - \alpha a + \varphi(\lambda) a - \varphi(\lambda) a \right\| \\ &= \left\| \varphi(\lambda)\left(x(\lambda) - a\right) - a\left(\varphi(\lambda) - \alpha\right) \right\| \\ &\leq \left\| \varphi(\lambda) \right\| \left\| x(\lambda) - a \right\| + \left\| a \right\| \left\| \varphi(\lambda) - \alpha \right\| \end{aligned}$$

dan $\lambda \to \lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\varphi(\lambda)x(\lambda)-\alpha a\right\|=0$$

bulunur. Bu da

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\varphi(\lambda)x(\lambda)\right)=\alpha a$$

olması demektir. Şimdi de diğer eşitliği gösterelim.

$$\begin{aligned}\left\|x(\lambda)+y(\lambda)-\left(a+b\right)\right\| &= \left\|\left(x(\lambda)-a\right)+\left(y(\lambda)-b\right)\right\| \\ &\le \left\|x(\lambda)-a\right\|+\left\|y(\lambda)-b\right\|\end{aligned}$$

den $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|x(\lambda)+y(\lambda)-\left(a+b\right)\right\|=0$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(x(\lambda)+y(\lambda)\right)=a+b$$

bulunur.

Özellik 2.2. $\lambda\to\lambda_0$ için, $x(\lambda)\to a$ ise, o zaman $\left\|x(\lambda)\right\|\to\left\|a\right\|$ olur.

İspat:

$$\left|\left\|x(\lambda)\right\|-\left\|a\right\|\right|\le\left\|x(\lambda)-a\right\|$$

eşitsizliğin her iki yanından $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left|\left\|x(\lambda)\right\|-\left\|a\right\|\right|=0$$

bulunur ki, bu da istenilendir.

Tanım 2.15. $x(\lambda)$, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın. Eğer,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|x(\lambda)-x(\lambda_0)\right\|=0$$

ise, $x(\lambda)$ abstract fonksiyonuna λ_0 noktasında süreklidir denir.

Gösterelim ki, $x(\lambda), y(\lambda)$ ve skaler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonları $\lambda=\lambda_0$ noktasında sürekli fonksiyonlar olduğunda, $x(\lambda)+y(\lambda)$ abstract fonksiyonu ve $\varphi(\lambda).x(\lambda)$ fonksiyonu da $\lambda=\lambda_0$ noktasında süreklidir.

$$\begin{aligned}\left\|\left(x(\lambda)+y(\lambda)\right)-\left(x(\lambda_0)+y(\lambda_0)\right)\right\| &= \left\|\left(x(\lambda)-x(\lambda_0)\right)+\left(y(\lambda)-y(\lambda_0)\right)\right\| \\ &\leq \left\|x(\lambda)-x(\lambda_0)\right\|+\left\|y(\lambda)-y(\lambda_0)\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\left(x(\lambda)+y(\lambda)\right)-\left(x(\lambda_0)+y(\lambda_0)\right)\right\|=0$$

elde edilir. Bu $x(\lambda)+y(\lambda)$ abstract fonksiyonunun $\lambda=\lambda_0$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi de diğer fonksiyonların sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(\lambda)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda_0)\right\| &= \left\|\varphi(\lambda)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda_0)+\varphi(\lambda_0)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda)\right\| \\ &= \left\|x(\lambda)\left(\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)\right)+\varphi(\lambda_0)\left(x(\lambda)-x(\lambda_0)\right)\right\| \\ &\leq \left\|x(\lambda)\right\|\left\|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)\right\|+\left\|\varphi(\lambda_0)\right\|\left\|x(\lambda)-x(\lambda_0)\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliğin her iki yanından $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\varphi(\lambda)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda_0)\right\|=0$$

olur. Bu ise $\varphi(\lambda).x(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda=\lambda_0$ noktasında sürekli olduğunu gösterir. Şimdi de, $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasında sürekli olduğunda $\left\|x(\lambda)\right\|$'ın da λ_0 noktasında sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\left|\left\|x(\lambda)\right\|-\left\|x(\lambda_0)\right\|\right|\leq\left\|x(\lambda)-x(\lambda_0)\right\|$$

eşitsizliğinde $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left|\left\|x(\lambda)\right\|-\left\|x(\lambda_0)\right\|\right|=0$$

elde edilir. Bu da $\left\|x(\lambda)\right\|$'ın da λ_0 noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Abstract fonksiyonlar içinde en önemli olan sınıf operatör değerli abstract fonksiyonlardır.

Tanım 2.16. X ve Y iki Banach uzayı olsun. X Banach uzayının tamamında tanımlanan ve değerleri Y Banach uzayında olan tüm lineer sınırlı operatörler kümesi L(X,Y) ile gösterilir. $\mathrm{A}(\lambda):\Lambda\to\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ fonksiyonuna *operatör değerli abstract fonksiyonlar* denir.

Tanım 2.17. Operatör değerli $\mathrm{A}(\lambda)$ fonksiyonu, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın (λ_0 noktasının kendisinde tanımlanmayabilir) ve $\mathrm{A}\in\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}\right\|=0$$

ise, o zaman A elemanına, $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör değerli fonksiyonun λ_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\mathrm{A}(\lambda)=\mathrm{A}\quad\text{veya}\quad\mathrm{A}(\lambda)\to\mathrm{A},\ (\lambda\to\lambda_0)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.18. Operatör değerli $\mathrm{A}(\lambda)$ fonksiyonu, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın. Eğer,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)\right\|=0$$

ise, $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu λ_0 noktasında süreklidir denir.

Aşağıdaki özellikleri verelim.

Farz edelim ki $x(\lambda)$, değerleri X Banach uzayında olan vektör değerli abstract fonksiyondur. $\mathrm{A}(\lambda)$ ise değerleri L(X,Y) uzayında olan operatör değerli fonksiyondur. (Dikkate alalım ki, burada Y uzayı da Banach uzayıdır.)

$x(\lambda) \to a$ ve $\mathrm{A}(\lambda) \to \mathrm{A}$ olduğunda, $\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda) \to \mathrm{A}a$ dır. $x(\lambda)$ ve $\mathrm{A}(\lambda)$ fonksiyonları λ_0 noktasında sürekli fonksiyonlar olduğunda, $\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)$ fonksiyonu da λ_0 noktasında süreklidir.

İspat:

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}a\right\| &= \left\|\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}a+\mathrm{A}(\lambda)a-\mathrm{A}(\lambda)a\right\| \\ &= \left\|\mathrm{A}(\lambda)\big(x(\lambda)-a\big)+a\big(\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}\big)\right\| \\ &\le \left\|\mathrm{A}(\lambda)\right\|\left\|x(\lambda)-a\right\|+\left\|a\right\|\left\|\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $\lambda \to \lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}a\right\| = 0$$

bulunur ki, bu da istenilendir.

Şimdi de $\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda_0)\right\| &= \left\|\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda_0)+\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda)\right\| \\ &= \left\|\mathrm{A}(\lambda_0)\big(x(\lambda)-x(\lambda_0)\big)+x(\lambda)\big(\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)\big)\right\| \\ &\le \left\|\mathrm{A}(\lambda_0)\right\|\left\|x(\lambda)-x(\lambda_0)\right\|+\left\|x(\lambda)\right\|\left\|\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $\lambda \to \lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\| \mathrm{A}(\lambda)x(\lambda) - \mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda_0) \right\| = 0$$

elde edilir. Buradan $\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğu görülür.

2.18.2. Abstract Fonksiyonların Diferansiyellenmesi

Tanım 2.19. $\mathrm{A}(\lambda):\Lambda \to \mathrm{L(X,Y)}$ bir abstract fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = x'(\lambda_0)$$

ise, $x(\lambda)$ abstract fonksiyonuna λ_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Bu limit X uzayındaki norma göre yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\| \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - x'(\lambda_0) \right\| = 0$$

dır.

Teorem 2.15. Eğer $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu, λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman bu fonksiyon süreklidir.

İspat: $\left\| x(\lambda) - x(\lambda_0) \right\| = \left\| \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \right\| = \left\| \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right\| \left\| (\lambda - \lambda_0) \right\|$

dan her iki tarafın $\lambda \to \lambda_0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\| x(\lambda) - x(\lambda_0) \right\| = x'(\lambda_0) 0$$

olur. Buradan, $x(\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasında süreklidir.

Burada abstract fonksiyonların diferansiyellenmesi için verilen aşağıdaki özellikler doğrudur.

Özellik 2.3. $x(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ abstract fonksiyonları, λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$(x+y)'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = x'(\lambda_0)+y'(\lambda_0)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\frac{(x+y)(\lambda)-(x+y)(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right) &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x(\lambda)-x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}+\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{y(\lambda)-y(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\\ &= x'(\lambda_0)+y'(\lambda_0)\end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen eşitliği elde etmiş oluruz.

Özellik 2.4. $\varphi(\lambda)$ ve $x(\lambda)$ fonksiyonları, λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$(\varphi x)'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \varphi'(\lambda_0)x(\lambda_0)+\varphi(\lambda_0)x'(\lambda_0)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{(\varphi x)(\lambda)-(\varphi x)(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(\lambda)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda_0)+\varphi(\lambda_0)x(\lambda)-\varphi(\lambda_0)x(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\\ &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(\lambda_0)\big(x(\lambda)-x(\lambda_0)\big)}{\lambda-\lambda_0}+\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x(\lambda)\big(\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)\big)}{\lambda-\lambda_0}\\ &= \varphi'(\lambda_0)x(\lambda_0)+\varphi(\lambda_0)x'(\lambda_0)\end{aligned}$$

bulunur ki, bu da istenilendir.

Özellik 2.5. Operatör değerli $\mathrm{A}(\lambda)$ fonksiyonu ve vektör değerli $x(\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir olduğunda,

$$\left(\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)\right)'\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \mathrm{A}'(\lambda_0)x(\lambda_0)+\mathrm{A}(\lambda_0)x'(\lambda_0)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\\
&\qquad\qquad= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\mathrm{A}(\lambda)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda_0)+\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)x(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\\
&\qquad\qquad= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\mathrm{A}(\lambda_0)\left(x(\lambda)-x(\lambda_0)\right)}{\lambda-\lambda_0}+\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x(\lambda)\left(\mathrm{A}(\lambda)-\mathrm{A}(\lambda_0)\right)}{\lambda-\lambda_0}\\
&\qquad\qquad= \mathrm{A}'(\lambda_0)x(\lambda_0)+\mathrm{A}(\lambda_0)x'(\lambda_0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.18.3. Kuvvet Serileri

X normlu uzay, $x(\lambda):\Lambda\to\mathrm{X}$ herhangi bir abstract fonksiyon olsun. $x_k\in\mathrm{X}$ ve $\lambda\in\Lambda$ için oluşturulan

$$x_0+x_1\lambda^1+x_2\lambda^2+\ \dots\ +x_n\lambda^n+\ \dots \tag{2.13}$$

serisi normlu uzaylardaki serilerin özel bir halidir. Burada her bir terim bir λ parametresine bağlıdır. (2.13) serisine uygun kısmı toplam

$$S_n(\lambda)=x_0+x_1\lambda^1+x_2\lambda^2+\ \dots\ +x_n\lambda^n \tag{2.14}$$

gibi yazılır. $\{S_n(\lambda)\}$ dizisi bazı λ 'lar için yakınsak, bazı λ 'lar için de ıraksak olabilir. Bu dizinin yakınsak olduğu tüm λ 'lar kümesini Ω ile gösterelim. Ω 'ya (2.13) kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi denir.

$$S(\lambda)=\lim_{n\to\infty}S_n(\lambda)$$

ya (2.13) serisinin toplamı denir ve

$$S(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\lambda^n$$

şeklinde gösterilir. Böylece $S(\lambda)$, Λ 'da tanımlanmış ve değerleri X'te olan bir abstract fonksiyondur. Dikkate alalım ki, (2.13) serisi yerine

$$x_0+x_1(\lambda-\lambda_0)+\ \ldots\ +x_n(\lambda-\lambda_0)^n+\ \ldots \tag{2.15}$$

serisi alınabilir.

Teorem 2.16 (Abel Teoremi). $\lambda=\lambda_0$, ($\lambda_0\neq 0$) noktasında bir kuvvet serisi yakınsak ise o zaman bu kuvvet serisi, $|\lambda|<|\lambda_0|$ eşitsizliğini sağlayan λ 'lar için de yakınsaktır ve $|\lambda|\leq r<|\lambda_0|$ eşitsizliğini sağlayan λ 'lar için kuvvet serisi mutlak yakınsaktır ve λ 'lara göre düzgün yakınsaktır.

Yani, $S_{|\lambda_0|}(0)\subset\Omega$ dır ve $S_r(0)$ dairesinde (2.13) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $\lambda=\lambda_0$ noktasında (2.13) serisi yakınsak olduğundan,

$$x_0+x_1\lambda_0+x_2\lambda_0^{\,2}+\ \ldots\ +x_n\lambda_0^{\,n}+\ \ldots$$

serisi yakınsaktır. Buna göre bu serinin genel terimi $x_n\lambda_0^{\,n}$ sıfıra yakınsar. Her bir yakınsak dizi sınırlı olduğundan öyle bir $\mathrm{M}>0$ sayısı vardır ki,

$$\|x_n\||\lambda_0|^n\leq\mathrm{M}$$

dır.

$$\|x_n\lambda^n\|=\left\|x_n\lambda_0^{\,n}\,\frac{\lambda^n}{\lambda_0^{\,n}}\right\|=\|x_n\lambda_0^{\,n}\|\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n\leq\mathrm{M}\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n$$

burada $q=\left|\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right|<1$ dir.

$$1 + q + q^2 + \ ... \ + q^n + \ ...$$

kuvvet serisi, geometrik seri olduğundan (2.13) serisi yakınsaktır. $|\lambda| \le r < |\lambda_0|$ olduğundan daha kesin olan,

$$\|x_n \lambda^n\| \le \mathrm{M} \frac{r^n}{|\lambda_0|^n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu halde $q = \dfrac{r}{|\lambda_0|}$ olur. Buna göre Weierstrass teoreminden (2.13) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Tanım 2.20. $\mathrm{R} = \sup\limits_{\lambda \in \Omega} |\lambda|$ sayısına (2.13) kuvvet serisinin *yakınsaklık yarıçapı* denir.

R için,

$\mathrm{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\|x_n\|}}$ (Cauchy-Hadamard) ve $\mathrm{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}}$ (D'alembert) formülleri doğrudur.

Not 2.4.

1) $\mathrm{R} = 0$ olduğunda seri yalnız $\lambda = 0$ noktasında yakınsaktır.

2) $0 < \mathrm{R} < +\infty$ olduğunda seri $S_{\mathrm{R}}(0) \subset \Omega$ bölgesinde yakınsaktır ve $S_{\mathrm{R}}(0)$ dairesinin sınırında Ω dan noktaların olmasına gerek yoktur.

3) $\mathrm{R} = +\infty$ olduğunda seri tüm Λ kümesinde yakınsaktır.

Lemma 2.3. Öyle $\mathrm{M} > 0$ ve $d > 0$ sabit sayıları var ki, $\forall n \ge \mathrm{N}$ için $\|x_n\| \le d^n \mathrm{M}$ eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde (2.13) serisinin yakınsaklık yarıçapı R için $\dfrac{1}{d} \le \mathrm{R}$ dır.

İspat: $\|x_n\lambda^n\| = \|x_n\| |\lambda|^n \le \mathrm{M}|d\lambda|^n$ yazılabilir. $d|\lambda| = q < 1$ alınırsa $|\lambda| < \frac{1}{d}$ de kuvvet serisi yakınsaktır. Bu da $\frac{1}{d} \le \mathrm{R}$ olması demektir.

Teorem 2.17. Eğer farklı $\sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{x_k}\lambda^k$ kuvvet serileri aynı $S_{\mathrm{R}}(0)$ dairesinde birbirine eşit olursa o zaman $x_k = \widetilde{x_k}$, $k = 0,1,2, \ldots$ olur.

İspat: $\lambda = 0 \in S_{\mathrm{R}}(0)$ olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{x_k}\lambda^k$ eşitliğinde $\lambda = 0$ aldığımızda $x_0 = \widetilde{x_0}$ olduğunu buluruz. Böylece, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x_k}\lambda^{k-1}$ eşitliğinde $\lambda = 0$ aldığımızda $x_1 = \widetilde{x_1}$ olduğunu buluruz. Matematiksel indüksiyon (Tümevarım) yöntemini kullanarak tüm katsayıların eşitliklerini ispatlarız.

2.18.4. Analitik Abstrakt Fonksiyonlar

Tanım 2.21. $x(\lambda):\Lambda \to \mathrm{X}$ herhangi bir abstract fonksiyon olsun. Eğer bu fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasının yakın bir komşuluğunda yakınsaklık yarıçapı sıfırdan farklı olan bir kuvvet serisi şeklinde gösterilebilirse, yani $x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k$ şeklinde gösterilebilirse o zaman $x(\lambda)$ fonksiyonuna *analitik abstract fonksiyon* denir.

Teorem 2.18. Eğer, $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında analitik abstract fonksiyon ise, o zaman bu fonksiyon kendi kuvvet serisinin yakınsaklık dairesi $S_{\mathrm{R}}(0)$'da sürekli fonksiyondur.

İspat: Önce keyfi $\rho \in (0,\mathrm{R})$ sayısı için, $\sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1}$ serisinin yakınsak olduğunu ispat etmemiz gerekir. Bunun yakınsak olduğunu göstermek için keyfi $\widetilde{\rho} \in (\rho,\mathrm{R})$

sayısını alalım. O zaman $\left\{\|x_k\|\tilde{\rho}^k\right\}$ sınırlıdır. Böylece $\exists$M vardır öyle ki, $\|x_k\|\tilde{\rho}^k < \text{M}$ dir.

$$k\|x_k\|\rho^{k-1}\frac{\tilde{\rho}^k}{\tilde{\rho}^k} = \frac{k}{\tilde{\rho}}\|x_k\|\tilde{\rho}^k\left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{k-1} \le \frac{M}{\tilde{\rho}}kq^{k-1} \quad , \quad \left(q = \frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)$$

bulunur. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1}$ serisi yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1} = \text{C}_1(\rho)$ olsun. $\forall\lambda,\lambda_0 \in \text{S}_\text{R}(0)$ alalım. O halde

$$x(\lambda) - x(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda^k - \lambda_0^k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\lambda_0 + \ \dots\ + \lambda_0^{k-1})(\lambda - \lambda_0)$$

olur. Buradan,

$$\|x(\lambda) - x(\lambda_0)\| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|k\rho^{k-1}}_{\text{C}_1(\rho)}|\lambda - \lambda_0| = \text{C}_1(\rho)|\lambda - \lambda_0|$$

Bulunur. Bu da $x(\lambda)$'nın λ_0 noktasında sürekli olması demektir.

Sonuç 2.3. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} kx_k\lambda^{k-1}$ serisi yakınsaktır.

Teorem 2.19. $x(\lambda)$, $\lambda = 0$ noktasında analitik abstract fonksiyon olduğunda kendi kuvvet serisinin yakınsaklık dairesinde λ 'ya göre diferansiyellenebilen fonksiyondur ve

$$x'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k\lambda^{k-1}$$

dir.

İspat:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\left(k-1\right)\left\|x_k\right\|\rho^{k-2} = \mathrm{C}_2(\rho)$$

olsun. Bu teoremi ispat etmek için

$$\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k\lambda^{k-1} = k(k-1)\int_0^1 \left(1-\theta\right)\left(\mu\theta + \left(1-\theta\right)\lambda\right) d\left(\mu - \lambda\right)\theta$$

eşitliğinden faydalanalım.

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x\left(\mu\right) - x\left(\lambda\right)}{\mu - \lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} kx_k\lambda^{k-1}\right\| &\le \left\|\sum_{k=2}^{\infty} x_k\left[\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k\lambda^{k-1}\right]\right\| \\
&\le \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k\left(k-1\right)\left\|x_k\right\|\rho^{k-2}}_{\mathrm{C}_2(\rho)} \left|\mu - \lambda\right| \\
&\le \mathrm{C}_2(\rho)\left|\mu - \lambda\right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece bu teorem ardışık olarak uygulanırsa $x\left(\lambda\right)$ 'nın tüm türevleri ve $\lambda = 0$ noktasında analitik olan abstract fonksiyonun $\lambda = 0$ noktasının komşuluğunda keyfi mertebeden diferansiyellenebilen olduğu bulunabilir. Aynı zamanda bu türevlerde $\lambda = \lambda_0$ alınarak kuvvet serisinin katsayıları için

$$x_k = \frac{x^k\left(0\right)}{k!}$$

Taylor formülleri bulunabilir.

2.18.5. Analitik Abstract Fonksiyonların Diğer Esas Özellikleri

λ, kompleks düzlemin bir D bölgesinden değerler alsın ve $x\left(\lambda\right)$, D bölgesinde tanımlanmış, değerleri X normlu Banach uzayında olan keyfi abstract fonksiyon olsun.

Teorem 2.20. Eğer $x(\lambda)$, D bölgesinde tanımlanmış analitik abstract fonksiyon ise ve *f*, X'de tanımlanmış keyfi sürekli lineer fonksiyonel ise, o zaman $f(x(\lambda))$, λ 'nın, D bölgesinde tanımlanmış adi analitik fonksiyonu olur.

Tanım 2.22. γ , λ değişkeninin kompleks düzleminde verilmiş herhangi bir yönlendirilmiş düzgün eğri ve $x(\lambda)$, γ üzerinde tanımlanmış sürekli abstract fonksiyon olsun. γ eğrisini, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eğri yaylarına bölelim ve her bir eğri yayında keyfi $\xi_k \in \gamma_k$ noktası alalım ve aşağıdaki toplamı yapalım.

$$\sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)[\lambda_k - \lambda_{k-1}], \qquad \Delta = \max_k |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$$

Eğer,

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)[\lambda_k - \lambda_{k-1}] = \int_\gamma x(\lambda)\, d\lambda$$

varsa, buna abstract fonksiyonun eğri üzerinde integrali denir.

İntegralin tanımından ve X Banach uzayında tanımlanmış keyfi sürekli fonksiyonelin lineerlik özelliğinden,

$$f\left[\int_\gamma x(\lambda)\, d\lambda\right] = \int_\gamma f(x(\lambda))\, d\lambda$$

elde edilir.

Teorem 2.21 (Cauchy İntegral Teoremi). Basit düzgün γ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı D bölgesinde tanımlanmış $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu bu bölgede diferansiyellenebilen ise o zaman bu fonksiyonun γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir. Yani,

$$\int_\gamma x(\lambda)\, d\lambda = 0$$

dır.

İspat:

$$\int_{\gamma} x(\lambda)\,d\lambda = y$$

olsun. Bu eşitliğin her yanından X'te tanımlanmış keyfi lineer f fonksiyoneli ile etki yapalım. O zaman

$$\int_{\gamma} f\left(x(\lambda)\right)d\lambda = f(y)$$

olur. Buradan $f(y)=0$ dır. Hahn-Banach Teoremine göre $y=0$ bulunur.

Teorem 2.22 (Cauchy İntegral Formülü). Eğer $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu, düzgün bir γ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı D bölgesinde diferansiyellenebilir ise, o zaman bu bölgenin her bir iç noktasında $x(\lambda)$ fonksiyonunun değeri;

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi \tag{2.16}$$

formülü ile gösterilir.

İspat: Söz konusu γ eğrisinin içerisinde a merkezli, R yarıçaplı bir çemberi γ_1 ile gösterelim. Bu durumda $\dfrac{x(\xi)}{\xi-\lambda}$ fonksiyonu, γ ile γ_1'in belirttiği halkada tek değerli ve analitiktir. O halde buna göre Cauchy teoreminden,

$$\int_{\gamma} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi = \int_{\gamma_1} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi \tag{2.17}$$

dır.

Diğer taraftan, hipotezimiz gereğince x fonksiyonu analitik olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ verildiğinde R'yi öyle seçebiliriz ki, $\forall \xi \in \gamma_1$ için,

$$\left|x(\xi)-x(\lambda)\right|<\varepsilon$$

dur. Ayrıca,

$$\xi=\lambda+\mathrm{R}e^{i\theta} \quad , \quad d\xi=i\,\mathrm{R}e^{i\theta}\,d\theta \quad , \quad \left(0\le\theta\le 2\pi\right)$$

olmak üzere,

$$\int_{\gamma_1}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}=\int_0^{2\pi}\frac{i\,\mathrm{R}e^{i\theta}}{\mathrm{R}e^{i\theta}}d\theta=2\pi i$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi&=\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)-x(\lambda)+x(\lambda)}{\xi-\lambda}d\xi\\&=\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)-x(\lambda)}{\xi-\lambda}d\xi+x(\lambda)\int_{\gamma_1}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}\\&=\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)-x(\lambda)}{\xi-\lambda}d\xi+x(\lambda)2\pi i\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi-x(\lambda)2\pi i\right|&=\left|\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)-x(\lambda)}{\xi-\lambda}d\xi\right|\\&\le\int_{\gamma_1}\frac{\left|x(\xi)-x(\lambda)\right|}{\left|\xi-\lambda\right|}\left|d\xi\right|\\&<\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\int_0^{2\pi}d\theta\\&=2\pi\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\left|\int_{\gamma_1}\frac{x(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi-x(\lambda)2\pi i\right|\le 2\pi\varepsilon$$

olur. Bu son eşitsizliğin sol tarafı ε 'a bağlı olmadığından, yani bu eşitsizlik $\forall\varepsilon > 0$ için sağlanacağından,

$$\int_{\gamma_1} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda} d\xi = 2\pi i\, x(\lambda)$$

olur. Buradan,

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda} d\xi$$

bulunur. (2.17)'dan dolayı

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda} d\xi$$

elde edilir.

Teorem 2.23. $x(\lambda)$ fonksiyonu, λ kompleks değişkeninin düzleminin bir bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, değerleri X Banach uzayında olan ve aynılıkla sabit vektöre eşit olmayan, λ 'nın diferansiyellenebilen abstract fonksiyonu olduğunda bu fonksiyonun $\|x(\lambda)\|$ normu kendi maksimumunu D bölgesinin iç noktasında alamaz.

İspat: D bölgesinde öyle bir λ_0 noktası var ki, bu noktada $x(\lambda)$ vektörünün normu kendi maksimum değerini alsın yani,

$$\|x(\lambda_0)\| = \max_{\lambda\in \mathrm{D}} \|x(\lambda)\|$$

olsun. Merkezi λ_0 noktasında olan ve yarıçapı R olan $S_{\mathrm{R}}(\lambda_0)$ dairesini ele alalım. $S_{\mathrm{R}}(\lambda_0)$ bölgesinde Cauchy formülüne göre,

$$x(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\xi)}{\xi-\lambda_0} d\xi$$

eşitliği yazılabilir. Burada γ , $S_R(\lambda_0)$ dairesinin sınırıdır.

$$\xi - \lambda_0 = \mathrm{Re}^{i\varphi} \quad , \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

ve

$$d\xi = i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,d\varphi$$

yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$x(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)d\varphi$$

olur. Buradan her iki tarafın normu alınırsa,

$$\left\|x(\lambda_0)\right\| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi$$

elde edilir.

$$\left\|x(\lambda_0)\right\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|x(\lambda_0)\right\|d\varphi$$

eşitliğinden bir önceki eşitsizlik çıkarılırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\left\|x(\lambda_0) - x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right\|\right)d\varphi \le 0$$

bulunur. Buradan,

$$\left\|x(\lambda_0)\right\| - \left\|x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right\| \le 0$$

elde edilir. $\left\|x(\lambda_0)\right\|$ 'ın tanımından,

$$\left\|x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right\| \le \left\|x(\lambda_0)\right\|$$

olur. Bu ikisinden,

$$\left\|x\left(\lambda_0\right)\right\| = \left\|x\left(\lambda_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right\|$$

bulunur. Buradan vektörün sabit bir vektör olduğu sonucu çıkar. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı abstract fonksiyonun normu kendi maksimumunu iç noktada alamaz.

2.18.6. Abstract Fonksiyonların İntegrallenmesi

X ve Y verilmiş kümeler ve $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$ herhangi bir küme olsun. $f : \mathrm{E} \to \mathrm{Y}$ dönüşümünün E kümesi üzerinde integrali,

$$\int_{\mathrm{E}} f \, dx$$

çeşitli yöntemlerle tanımlanır.

Değerleri $f\left(\mathrm{X}\right)$ Banach uzayında olan dönüşümler için Bochner integrali tanımlanır. Bu integral reel değişkenli ve reel değerli reel fonksiyonlar için Lebesgue integralinin vektör değerli fonksiyonlar için doğal olarak genişlemesidir.

2.18.7. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.23. X herhangi bir küme ve Y Banach uzayı olsun. $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$ kümesini ele alalım. Eğer $\mathrm{Y} = \mathrm{L(X,Y)}$ olursa, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{Y}$ dönüşümüne abstract vektör fonksiyon denir.

X ve Y uzayları, Banach uzayları olursa, L(X,Y) lineer sınırlı operatörler uzayıdır. Bu halde, f dönüşümüne abstract operatör fonksiyon denir.

X'te A da σ -cebiri ve A da μ -ölçüsü tanımlansın. Burada $\mu\left(\mathrm{X}\right) < \infty$ olmayabilir. $\mu\left(\mathrm{X}\right) = \infty$ olduğunda, $\exists\left\{\mathrm{M_n}\right\} \subset \mathrm{A}$ kümeler dizisi var ki, $\forall$n için $\mu\left(\mathrm{M}\right) < +\infty$ olduğunu ve $\mathrm{X} = \bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{M_n}$ olduğunu kabul edeceğiz.

$(\mathrm{X},\mathrm{A},\mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir. Çoğu zaman $(\mathrm{X},\mathrm{A},\mu)$ ölçü uzayı kısaca X ile gösterilir. $\mathrm{E}\in\mathrm{A}$ olduğunda, E kümesine *ölçülebilir küme* denir.

Ölçü uzayına örnek olarak sayısal $\mathbb{R}$ eksenini gösterebiliriz. Burada A da σ -cebiri olarak, Lebesgue anlamda ölçülebilen, sonlu ve sonsuz ölçülü kümelerin oluşturduğu küme gösterilebilir. M_n kümeleri olarak $[-n,n]$ aralıkları alınabilir.

Tanım 2.24. $\mathrm{E}\subset\mathrm{X}$ kümesinde tanımlanmış (vektör veya operatör) abstract $f:\mathrm{E}\to\mathrm{Y}$ fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} c_\mathrm{i} \quad , \quad x\in\mathrm{E}_\mathrm{i} \ \ (\mathrm{i}=1,2,\ \dots\ ,n) \\ 0 \quad , \quad x\in\mathrm{E}\Big\backslash\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{n}\mathrm{E}_\mathrm{i}\end{cases} \tag{2.18}$$

eşitlikleriyle tanımlanırsa, bu fonksiyona E'de merdiven şekilli veya basit fonksiyon denir.

Burada E_i 'ler, $\mathrm{E}_\mathrm{i}\cap\mathrm{E}_\mathrm{j}=\varnothing \ \ (\mathrm{i}\neq\mathrm{j})$ koşulunu sağlayan sonlu ölçülü keyfi kümelerdir.

Tanım 2.25. Ölçülebilir E kümesinde tanımlanmış $f(x)$ abstract fonksiyonu için E'de merdiven şekilli fonksiyonların öyle $\{f_n(x)\}$ dizisi var ki, hemen hemen tüm $x\in\mathrm{E}$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f_n(x)-f(x)\right\|=0$$

koşulu sağlanırsa yani, hemen hemen tüm $x\in\mathrm{E}$ için $f_n(x)\to f(x)$ olursa, o zaman $f(x)$ fonksiyonuna, E kümesinde *güçlü ölçülebilirdir* denir.

$\forall x\in\mathrm{E}$ için doğru olan

$$\left|\left\|f_n(x)\right\|-\left\|f(x)\right\|\right|\le\left\|f_n(x)-f(x)\right\|$$

eşitsizliğinden güçlü ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonunun $\|f(x)\|$ normunun da ölçülebilir olduğu alınır. Bu halde $\|f(x)\|$ fonksiyonu, ölçülebilir $\{\|f(x)\|\}$ fonksiyonlarının yakınsak limiti olur.

2.18.8. Bochner İntegrali

Tanım 2.26. $f(x)$, E kümesinde tanımlanmış merdiven şekilli fonksiyon olsun. Bu halde,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mu\left(\mathrm{E}_i\right)$$

toplamına (2.18) eşitliği ile verilen merdiven şekilli $f(x)$ fonksiyonunun E kümesi üzerinde Bochner integrali denir ve

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\left(\mathrm{E}_i\right) \tag{2.19}$$

veya

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\left(\mathrm{E}_i\right) \tag{2.20}$$

şeklinde gösterilir.

E'de merdiven şekilli f ve g fonksiyonlarının $\alpha f(x)+\beta g(x)$ lineer kombinasyonu için ,

$$\int_{\mathrm{E}} \left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx = \alpha\int_{\mathrm{E}} f(x)dx + \beta\int_{\mathrm{E}} g(x)dx$$

eşitliği sağlanır. E'de merdiven şekilli keyfi $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\left\|\int_{\mathrm{E}} f(x)dx\right\| \leq \int_{\mathrm{E}} \|f(x)\|dx$$

olur.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonu, E'de güçlü ölçülebilir keyfi fonksiyon olsun. $\{f_n(x)\}$ dizisi ise E'de $f(x)$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsak olan merdiven şekilli fonksiyonlar dizisidir. O zaman,

$$\|f_n(x) - f(x)\|$$

ölçülebilir fonksiyondur ve

$$\int_E \|f_n(x) - f(x)\| dx$$

integralinin sonlu veya sonsuz anlamı vardır. $n \to \infty$ koşulunda

$$\int_E \|f_n(x) - f(x)\| dx \to 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\left\{ \int_E f_i(x) dx \right\}$$

dizisi Y uzayının normundaki yakınsaklığa göre fundamentaldir. Gerçekten de $n, m \to \infty$ iken,

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_n(x)dx - \int_E f_m(x)dx \right\| &= \left\| \int_E [f_n(x) - f_m(x)]\, dx \right\| \le \int_E \|f_n(x) - f_m(x)\| dx \\ &\le \int_E \|f_n(x) - f(x)\| dx + \int_E \|f(x) - f_m(x)\| dx \to 0 \end{aligned}$$

olur. Y uzayı tam olduğundan,

$$\lim_n \int_E f_n(x) dx$$

limiti vardır.

Tanım 2.27. Eğer $f(x)$ abstract fonksiyonu, E kümesinde güçlü ölçülebilirse ve basit fonksiyonların E'de hemen hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak olan $\{f_n(x)\}$ dizisi için,

$$\int_{\mathrm{E}} \left\| f_n(x) - f(x) \right\| dx \to 0 \tag{2.30}$$

limiti doğru olursa, o zaman $f(x)$ abstract fonksiyonuna E kümesinde Bochner anlamında integrallenebilirdir denir. Bu halde üstte yakınsaklığını gösterdiğimiz

$$\lim_n \int_{\mathrm{E}} f_n(x) dx \tag{2.31}$$

limitine $f(x)$ fonksiyonunun E kümesi üzerinde Bochner integrali denir ve

$$\int_{\mathrm{E}} f(x) dx$$

veya

$$\int_{\mathrm{E}} f(x) d\mu$$

şeklinde gösterilir.

Bochner integralinin bir değerli tanımlandığını yani, (2.31) limitinin (2.30) koşulunu sağlayan basit, yaklaştırıcı fonksiyonlar dizisinin seçilişine bağlı olmadığını gösterelim.

$\{f_n(x)\}$ ve $\{\widetilde{f}_n(x)\}$ dizilerinin, (2.30) koşulunu sağlayan basit fonksiyon dizileri olduğunu kabul edelim.

$$\ell = \lim_n \int_{\mathrm{E}} f_n(x) dx$$

ve

$$\tilde{\ell} = \lim_{n} \int_{E} \widetilde{f_n}(x)dx$$

olsun.

$$f_1(x), \widetilde{f_1}(x), f_2(x), \widetilde{f_2}(x), \dots, f_n(x), \widetilde{f_n}(x), \dots$$

dizisi de (2.30) koşulunu sağlıyor. Buna göre de,

$$\int_{E} f_1(x)dx, \int_{E} \widetilde{f}_1(x)dx, \int_{E} f_2(x)dx, \int_{E} \widetilde{f_2}(x)dx, \dots, \int_{E} f_n(x)dx, \int_{E} \widetilde{f_n}(x)dx, \dots$$

dizisi bir ℓ_0 limitine yakınsaktır. Bu halde $\ell = \tilde{\ell} = \ell_0$ olur. Böylece Bochner integralinin bir değerli tanımlandığı ispatlanmış olur.

Teorem 2.24. $f(x)$ fonksiyonunun E'de Bochner anlamda integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ fonksiyonunun E'de güçlü ölçülebilir ve

$$\int_{E} \|f(x)\| dx < +\infty$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik için, $f(x)$ fonksiyonu E'de Bochner anlamda integrallenebilir olsun. O zaman Bochner integralinin tanımından $f(x)$ fonksiyonu, E'de güçlü ölçülebilirdir. $f_n(x)$, keyfi yaklaştırıcı diziden bir keyfi basit fonksiyon olsun. O halde,

$$\int_{E} \|f(x)\| dx \le \int_{E} \|f(x) - f_n(x)\| dx + \int_{E} \|f_n(x)\| dx$$

yazılabilir.

$$\int_{E} \|f(x) - f_n(x)\| dx \to 0$$

olduğundan bu sınırlıdır ve

$$\int_E \|f_n(x)\| dx < +\infty$$

olup, buna göre de

$$\int_E \|f(x)\| dx < +\infty$$

dur.

Yeterlilik için, $f(x)$ fonksiyonu, E'de güçlü ölçülebilir olsun. $\{f_n(x)\}$ dizisi E'de hemen hemen her yerde

$$\|f(x) - f_n(x)\| \to 0$$

şartını sağlayan merdiven şekilli fonksiyonların keyfi bir dizisidir. Burada daima

$$\|f_n(x)\| \le \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x)\|$$

yazılabildiğinden,

$$\|f_n(x)\| \le \|f(x)\| + 1$$

yazılabilir. Böylece,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \le 2\|f(x)\| + 1$$

dir. Lebesgue teoremine göre,

$$\int_E \|f(x) - f_n(x)\| dx \to 0 \quad , \quad (n \to \infty)$$

dır. Bu ise $f(x)$ fonksiyonunun, Bochner anlamda integrallenebilmesi demektir.

2.19. Ters Operatörler

Ters operatörleri ve ters operatörler hakkındaki bazı teoremleri inceleyelim.

2.19.1. Lineer ve Normlu Uzaylarda Ters Operatörler, N(A) Sıfırlar Kümesi, Banach Teoremi

X, Y lineer uzaylar olsun. Varsayalım ki lineer A operatörü X'i Y'ye dönüştüren operatördür. $\mathrm{D(A)} \subseteq \mathrm{X}$, $\mathrm{R(A)} \subseteq \mathrm{Y}$, A operatörü için aşağıdaki kümeyi tanımlayalım.

$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{D}(\mathrm{A}) : \ \mathrm{A}x = 0\}$ Bu kümeye A operatörünün sıfırları kümesi denir. A operatörünün D(A) 'yı R(A) 'ya birebir dönüştürmesi için gerek ve yeter şart olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.25. Lineer A operatörünün tanım D(A) bölgesini R(A) değerler bölgesine birebir dönüştürmesi için gerek ve yeter şart A operatörü için $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \{0\}$ dır. Ama buna bakmayarak $\exists y \in \mathrm{R}(\mathrm{A})$ elemanı ve $\exists x_1, x_2 \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ elemanları var ki, $\mathrm{A}x_1 = y$ ve $\mathrm{A}x_2 = y$ dir. Bunları taraf tarafa çıkarırsak $\mathrm{A}(x_1 - x_2) = 0$ bulunur. Bu da $x_1 - x_2 \in \mathrm{N}(\mathrm{A}) = \{0\}$ demektir. Buradan $x_1 = x_2$ olur.

Şimdi gösterelim ki A operatörü birebir olduğunda onun sıfırlar kümesi yalnız sıfırdan oluşur.

Aksini varsayalım. Yalnızca sıfırdan oluşmasın. O zaman $\exists z \in \mathrm{N}(\mathrm{A})$, $z \neq 0$, $\forall y \in \mathrm{R}(\mathrm{A})$ alalım. $\exists x^* \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ vardır ki $\mathrm{A}x^* = y$ eşitliği sağlanır. $x^* + z \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ için $\mathrm{A}(x^* + z) = y$ olduğu açıktır. Ama $x^* \neq x^* + z$ dır. Bu çelişki teoremin 2. kısmını ispatlar.

X ve Y normlu uzaylar olsun. Şimdi biz burada A operatörünün ne zaman tersi var ve sınırlı olduğu hakkındaki teoremleri ele alalım.

Teorem 2.26. X normlu uzayını Y normlu uzayına dönüştüren lineer A operatörünün tersi var ve sınırlı olması için gerek ve yeter şart, $m > 0$ sayısı ve $\forall x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ için

$$\|\mathrm{A}x\| \geq m\|x\| \tag{2.32}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Varsayalım ki A operatörünün tersi var ve sınırlıdır. Gösterelim ki (2.32) eşitsizliği $\forall x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ için sağlanır.

A^{-1} in sınırlı olması $\exists c > 0$, $\forall y \in \mathrm{R(A)}$, $\|\mathrm{A}^{-1}y\| \leq c\|y\|$ demektir. Bu eşitsizlikte $y = \mathrm{A}x$ aldığımızda $\|Ax\| \geq \frac{1}{c}\|x\|$ ve $\|Ax\| \geq m\|x\|$ bulunur.

Şimdi tersine, varsayalım ki (2.32) eşitsizliği $\forall x$ için sağlansın. $\mathrm{A}x = 0$ şartını sağlayan x 'i alsak $x = 0$ olur. $\mathrm{N(A)} = \{0\}$ Bu ise Teorem 2.25.'e göre A operatörünün birebir olduğunu gösterir. Yani A operatörünün tersi vardır.

Eğer biz (2.32) eşitsizliğinde $x = \mathrm{A}^{-1}y$ alırsak o zaman $\|\mathrm{A}^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$ olur ve buradan $\|\mathrm{A}^{-1}y\| \leq c\|y\|$ bulunur. Buna göre A^{-1} sınırlı olur.

Not 2.5. $\mathrm{N(A)} = \{0\}$ olduğunda $\mathrm{A{:}D(A)} \to \mathrm{R(A)}$ birebir dönüştürdüğünden A operatörünün ters operatörü var ve $\mathrm{A}^{-1}{:}\mathrm{R(A)} \to \mathrm{D(A)}$ birebir dönüştürür. A lineer operatör olduğunda A^{-1} de lineer operatör olur.

Şimdi A^{-1} in lineer operatör olduğunu gösterelim. Biz lineer operatörü tanımladığımızda onun değerler bölgesinin lineer manifold olduğunu ispatladık. Dolayısıyla 1. şart tamamlanmış olur.

2. şart için , $\forall y_1, y_2 \in \mathrm{R(A)}$ ve λ_1, λ_2 için $\mathrm{A}^{-1}\{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\} = \lambda_1 \mathrm{A}^{-1} y_1 + \lambda_2 \mathrm{A}^{-1} y_2$ olduğunu göstermeliyiz.

$y_1, y_2 \in \mathrm{R(A)}$ olduğundan $\exists x_1, x_2 \in \mathrm{D(A)}$ vardır ki; $\mathrm{A}x_1 = y_1$, $\mathrm{A}x_2 = y_2$, $x_1 = \mathrm{A}^{-1} y_1$ $x_2 = \mathrm{A}^{-1} y_2$ eşitlikleri doğrudur. $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathrm{A}x_1 + \lambda_2 \mathrm{A}x_2 = \mathrm{A}\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right)$ olur. Buradan da ;

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \mathrm{A}^{-1}\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)$ bulunur. $x_1 = \mathrm{A}^{-1} y_1$, $x_2 = \mathrm{A}^{-1} y_2$ yazdığımızda

$$\mathrm{A}^{-1}\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) = \lambda_1 \mathrm{A}^{-1} y_1 + \lambda_2 \mathrm{A}^{-1} y_2$$

elde edilir. Bu ise A^{-1} operatörünün lineer operatör olması demektir.

Tanım 2.28. $\mathrm{A:X} \to \mathrm{Y}$ dönüştüren lineer operatör olsun. X ve Y normlu uzaylardır. $\mathrm{R(A)} = \mathrm{Y}$ olduğunda ve A operatörünün tersi var ve sınırlı olduğunda, yani $\mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{L(Y,X)}$ şartı sağlandığında lineer A operatörüne *sürekli dönüştürülebilen operatör* denir.

Teorem 2.27. Normlu X uzayını normlu Y uzayına dönüştüren lineer A operatörünün sürekli dönüştürülebilen operatör olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{R(A)} = \mathrm{Y}$, $m > 0$ ve $\forall x \in \mathrm{D(A)}$ için $\|\mathrm{A}x\| \geq m\|x\|$ (2.32) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Yukarıdaki teorem sürekli dönüştürülebilen operatörler için Teorem 2.26.'ya dayanarak doğrudur.

Teorem 2.28 (Banach Teoremi). Lineer sürekli A operatörü tüm X Banach uzayını tüm Y Banach uzayına birebir dönüştürdüğünde A^{-1} operatörü sınırlı operatör olur. Bu teoremi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz.

$\mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$, X ve Y uzayları Banach uzaylardır. $\mathrm{R(A)} = \mathrm{Y}$ ve A^{-1} operatörü varsa o zaman A^{-1} operatörü sınırlı operatördür.

Biz şimdi sürekli dönüştürülebilen operatörlerin önemini göstermek için $\mathrm{A}x = y$ operatör denklemini ele alalım. Varsayalım ki bu denklemde A sürekli dönüştürülebilen denklem olsun. O zaman A^{-1} var ve $x = \mathrm{A}^{-1} y$ olur.

$Ax = \tilde{y}$ ise çözümü $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}$ olur. O halde biz $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|y - \tilde{y}\|$ yazabiliriz. Bu eşitsizlikten görüyoruz ki sürekli dönüştürülebilen operatör denkleminde sağ yan az değiştiğinde çözümde az değişir. Bu tür problemlere *doğru çözülebilen problemler* denir.

Böylece biz görüyoruz ki sürekli dönüştürülebilen operatörlü denklemler doğru çözülebilen problemlerdir.

2.19.2. Ters Operatörlere Örnekler

Örnek 2.13. $Ax = y$ eşitliğinde A'nın *nxn* bir matris olduğunu varsayalım. $\det A \neq 0$ olduğunda Cramer yöntemi ile bu matrisin tersi bulunur. Bu A matrisinin doğurduğu operatör sürekli dönüştürülebilen operatör olur.

Örnek 2.14. En sade bir integral denklemini ele alalım. $x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t)$ burada biz $y(t) \in C[0,1]$ alalım. Bu integral denkleminin sol yanı bir lineer operatör tanımlar. $A : C[0,1] \to C[0,1]$ dönüştüren operatördür.

Amacımız bu operatörün sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu göstermek. Bu integral denklemini çözmek için $c = \int_0^1 sx(s)ds$ ile gösterelim. $x(t) - tc = y(t)$ denkleminin her yanını t ile çarpıp 0 dan 1'e integralleyelim.

$\int_0^1 sx(s)ds - \int_0^1 s^2 ds c = \int_0^1 sy(s)ds$ bulunur ve buradan da $c - \frac{1}{3}c = \int_0^1 sy(s)ds$ olur.

Dolayısıyla $c = \frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds$ bulunur. Buradan da $x(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 tsy(s)ds$ bulunur.

Böylece denklemi çözdük. Burada biz gösterdik ki, ele aldığımız operatör sürekli dönüştürülebilen operatördür.

Örnek 2.15. Diferansiyel sürekli dönüştürülebilen operatörleri inceleyelim. Şimdi biz aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım.

$$\ell(y) = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(t)y = f(t) \tag{2.33}$$

Bu diferansiyel denklemin

$$y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ ... \ , y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{2.34}$$

başlangıç şartını sağlayan Cauchy probleminin çözümünü bulalım. Varsayalım ki (2.33) denkleminde $a_1(t), \ ... \ , a_n(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları $[0, \mathrm{T}]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlardır.

$\ell(y) = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(t)y$ diferansiyel ifadesinin ve (2.34) şartının birlikte doğurduğu operatörü L(y) ile gösterelim. Amacımız L(y) diferansiyel operatörünün tersinin var olduğunu ve bu operatörün $\mathrm{L} : C^{(n)}[0, \mathrm{T}] \to C[0, \mathrm{T}]$ ye bir sürekli lineer operatör olduğunu göstermektir. Bu operatörün tersinin de var ve sürekli operatör olduğunu göstermemiz gerekir.

L(y) operatörünün lineer sürekli operatör olduğunu daha önce gösterdik. Şimdi bu operatörün tersinin var ve sınırlı olduğunu gösterelim. Önce dikkate alalım ki bu operatörün tanım kümesi, $\mathrm{D(L)} = \left\{ y \in C^{(n)}[0, \mathrm{T}] : y(0) = 0, \ ... \ , y^{(n-1)}(0) = 0 \right\}$ dır. Bu operatörün tersini bulmak için sabitin varyasyonu metodunu uygulayalım.

(2.33) denklemine uygun homojen

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(t)y = 0 \tag{2.35}$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemini $y_1(t), y_2(t), \ ... \ , y_n(t)$ ile gösterelim. O zaman diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruz ki fonksiyonların Wronskiyan'ı $[0, \mathrm{T}]$ aralığında sıfırdan farklıdır.

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & ... & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & ... & y_n'(t) \\ ...... & ...... & ... & ...... \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & ... & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

(2.35) denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemi belli olduğunda da (2.35) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ ... \ + c_n y_n(t) \tag{2.36}$$

şeklinde bulunur. Burada c_i katsayıları keyfi sabit katsayılardır.

Şimdi (2.33) denkleminin (2.34) şartını sağlayan özel çözümünü bulmak için Lagrange'ın sabiti varyasyonu metodunu uygulayalım. Bu metotta (2.36) eşitliğindeki $c_1, c_2, \ ... \ , c_n$ keyfi fonksiyonlar olarak alınır. Yani, (2.33) denkleminin (2.34) şartını sağlayan çözümü,

$$y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) + \ ... \ + c_n(t) y_n(t) \tag{2.37}$$

şeklinde aranır. Lagrange bu yöntemle aranan (2.33) fonksiyonunu yeni n tane $c_1(t), c_2(t), ... , c_n(t)$ fonksiyonları ile değiştirmiştir. Ama $c_1(t), c_2(t), ... , c_n(t)$ fonksiyonları öyle seçilmeli ki $n-1$. mertebe de dahil olmakla birlikte y(t) fonksiyonunun (2.37) ifadesinden $n-2$. mertebeye dek türev aldığımızda c_i lerin dahil olduğu lineer kombinasyon kendisini sabit fonksiyon gibi göstersin. O zaman biz $c_1(t), c_2(t), ... , c_n(t)$ fonksiyonlarının bulunması için aşağıdaki lineer diferansiyel denklemler sistemini buluruz.

$$\begin{gathered}
c_1'(t) y_1(t) + c_2'(t) y_2(t) + \ ... \ + c_n'(t) y_n(t) = 0 \\
c_1'(t) y_1'(t) + c_2'(t) y_2'(t) + \ ... \ + c_n'(t) y_n'(t) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1'(t) y_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t) y_2^{(n-2)}(t) + \ ... \ + c_n'(t) y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\
c_1'(t) y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t) y_2^{(n-1)}(t) + \ ... \ + c_n'(t) y_n^{(n-1)}(t) = f(t)
\end{gathered}$$

olur. Bu sistemin determinantı $y_1(t), y_2(t), \ ... \ , y_n(t)$ nin Wronski determinantı olduğundan 0'dan farklıdır. Bu sistemin çözümünü bulmak için Cramer yöntemini uygularsak,

$$c_k'(t) = \frac{w_k(t)}{w(t)} f(t) \qquad k = 1, 2, \ ...$$

bulunur. Burada $w_k(t)$ Wronski determinantının n.satırının k.elemanının tamamlayıcısı (tümleyeni) dir. (2.34) şartını da kullanarak çözümü bulursak,

$$c_k(t) = \int_0^t \frac{w_k(\tau)}{w(\tau)} f(\tau) d\tau \qquad k = 1, 2, ...$$

olur. $c_k(t)$ ler için bulduğumuz bu ifadeyi (2.36) te yerine yazdığımızda (2.33), (2.34) probleminin çözümünü,

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1} f = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \int_0^t \frac{w_k(\tau)}{w(\tau)} f(\tau) d\tau$$

formülü ile buluruz.

$$\left| \mathrm{L}^{-1} f \right| \le c \left\| f \right\|$$

olur.

$$c = \max_{0 \le t \le T} \sum_{k=1}^{n} \left| y_k(t) \right| \left| \int_0^t \frac{w_k(\tau)}{w(\tau)} d\tau \right.$$

2.19.3. Sağ ve Sol Ters Operatörler

Tanım 2.29. $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ olsun. Eğer $\exists \mathrm{U} \in \mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ operatörü bulunursa ve $\mathrm{AU} = \mathrm{I_Y}$ eşitliği sağlanırsa U operatörüne A operatörünün sağ tersi denir ve A_r^{-1} şeklinde gösterilir.

Tanım 2.30. $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ operatörü için $\exists \mathrm{V} \in \mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ operatörü bulunursa ve $\mathrm{VA} = \mathrm{I_X}$ eşitliği sağlanırsa V operatörüne A operatörünün sol tersi denir ve ${\mathrm{A}^{-1}}_{\ell}$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.4. $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ operatörünün sağ tersi A_r^{-1} bulunduğunda

$$\mathrm{A}x = y \tag{2.38}$$

denkleminin $\forall y \in \mathrm{Y}$ için $x = \mathrm{A}_r^{-1} y$ çözümü vardır. $\mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$ operatörünün sol tersi A^{-1}_{ℓ} bulunduğunda $\mathrm{A}x = y$ (2.38) denkleminin çözümü varsa tektir.

İspat:

Not 2.6. A operatörünün sağ tersi A_r^{-1} olduğunda (2.38) denklemi için varlık teoremi doğrudur. A operatörünün sol tersi A^{-1}_{ℓ} olduğunda (2.38) denklemi için teklik teoremi doğrudur. Şimdi Lemma 2.4.'ün ispatını verelim.

$\mathrm{A}(\mathrm{A}_r^{-1} y) = y$ dir. 1. kısmın ispatı tamam. Şimdi 2. kısmını ispatlayalım. Bunun için N(A) kümesini ele alalım. Buradan $\forall x \in \mathrm{N(A)}$ alalım. Bu $\mathrm{A}x = 0$ demektir. Bu eşitliği soldan A^{-1}_{ℓ} ile çarptığımızda $x = 0$ olduğunu buluruz. A^{-1}_{ℓ} var olduğunda $\mathrm{N(A)} = \{0\}$ (Yalnız sıfır) dır. Bu ise $\mathrm{A{:}D(A)} \to \mathrm{R(A)}$ birebir dönüştürür, bir tane çözüm var demektir.

Not 2.7. Biz buradan görüyoruz ki A operatörünün sağ tersi A_r^{-1} olduğunda R(A)=Y olur. A nın sol tersi A^{-1}_{ℓ} bulunduğunda $\mathrm{N(A)} = \{0\}$ olur.

Böylece Not 2.6. ve Not 2.7. , Lemma 2.4.'ün ayrı ayrı şekillerde ifadeleridir.

Lemma 2.5. $\mathrm{A} \in \mathrm{L(X,Y)}$ olduğunda A operatörünün sağ ters ve sol ters operatörlerinin var olduğunu varsayalım. O zaman;

1) $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}_r^{-1} = \mathrm{A}_{\ell}^{-1}$

2) $\mathrm{D}(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{Y}$, $\mathrm{R}(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{X}$

3) Sağ ve sol ters operatörler tektir.

İspat: A operatörünün sağ ve sol tersleri olduğundan $R(A)=Y$ ve $N(A)=\{0\}$ olur. Yani $A{:}X\to Y$ tüm X uzayını tüm Y uzayına birebir dönüştürür. Yani A operatörünün tersi vardır ve Hausdorff teoremine göre ters operatör sınırlıdır.

2. kısım açıktır.

3. kısmı ispatlayalım. Sol tersin tek olduğunu gösterelim.

Aksini farz edelim. A^{-1}_{ℓ} den başka $\exists V\in L(Y,X)$ vardır ki $A_{\ell}^{-1}A=I_X$ ve $VA=I_X$ sağlanır. Eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak $(A_{\ell}^{-1}-V)A=0$ eşitliğini buluruz. Eşitliği sağdan A^{-1} ile çarparsak $A_{\ell}^{-1}=V$ buluruz. Lemma ispatlandı.

Lemma 2.6. $A\in L(X,Y)$ olduğunu varsayalım ve varsayalım ki $\exists U\in L(Y,X)$ için $AU=I_Y$, $UA=I_X$ eşitlikleri sağlanır. O zaman A operatörünün tersi var ve $A^{-1}=U\in L(Y,X)$ olur.

İspat: Lemma 2.5.'e göre buradaki U, A operatörünün hem sol hem de sağ tersi olduğundan $A^{-1}=U\in L(Y,X)$ olduğunu buluruz.

2.19.4. $(I-C)^{-1}$ Operatörünün Varlığı

X Banach uzayı olsun. $L(X)$ Banach uzayını ele alalım. $I\in L(X)$ birim I operatörü sürekli dönüştürülebilen operatördür. Şimdi biz gösterelim ki birim operatörün $S_1(I)$ birim komşuluğundan alınmış $\forall A$ operatörü de sürekli dönüştürülebilendir. Yani $\|A-I\|<1$ şartını sağlayan her bir A operatörü sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu ispatlayalım. $C=I-A$ ile gösterelim. O zaman $A=I-C$ olur.

Teorem 2.29. $C\in L(X)$ ve $\|C\|<1$ olduğunda o zaman $I-C$ operatörü sürekli dönüştürülebilendir ve aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|C\|} \tag{2.39}$$

$$\left\| I - (I - C)^{-1} \right\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \tag{2.40}$$

İspat: $L(X)$ uzayında

$$I + C + C^2 + \ ... \ + C^n + \ ... \tag{2.41}$$

serisini ele alalım. Burada $\left\| C^k \right\| \leq \|C\|^k$, $\|C\| < 1$ olduğundan

$$1 + \|C\| + \|C\|^2 + \ ... \ + \|C\|^n + \tag{2.42}$$

serisi yakınsaktır. (2.42) serisi yakınsak olduğundan (2.41) serisi düzgün yakınsaktır. Yani, $S_n = I + C + C^2 + \ ... \ + C^n \underset{n\to\infty}{\to} S$ 'e düzgün yakınsar. Kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri görebiliriz.

$(I - C)S_n = I - C^{n+1}$ ve $S_n(I - C) = I - C^{n+1}$ Bu eşitliklerin her yanından $n \to \infty$ için limit alırsak; $(I - C)S = I$ ve $S(I - C) = I$ olur. Lemma 2.6.'ya göre $S = (I - C)^{-1}$ olduğunu buluruz. Dolayısıyla sürekli dönüştürülebilendir.

$$\|S_n\| \leq 1 + \|C\| + \|C\|^2 + \ ... \ + \|C\|^n = \frac{1 - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|}$$

$n \to \infty$ için limit alırsak (2.39) eşitsizliğini buluruz. Aynı şekilde,

$$\|I - S_n\| \leq \|C\| + \|C\|^2 + \ ... \ + \|C\|^n = \frac{\|C\| - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|}$$

$n \to \infty$ için limit alırsak (2.40) eşitsizliğini buluruz.

2.19.5. $(A - C)^{-1}$ Operatörünün Varlığı

Şimdi biz burada daha genel hali ele alacağız. $A \in L(X,Y)$ olsun. Burada göstereceğiz ki, A operatörü sürekli dönüştürülebilen olduğunda A operatörünün

$\exists S_r(A) \subset L(X,Y)$ komşuluğu olduğunu bulacağız ki, bu komşuluktan alınan $\forall B \in S_r(A)$ operatörünün de sürekli dönüştürülebilen olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.30. Varsayalım ki $A,B \in L(X,Y)$ ve A operatörü sürekli dönüştürülebilen operatördür.

$$\left\|(A-B)A^{-1}\right\| < 1 \tag{2.43}$$

şartı sağlansın. B operatörü de sürekli dönüştürülebilendir ve B'nin tersi için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|(A-B)A^{-1}\right\|} \tag{2.44}$$

$$\left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|(A-B)A^{-1}\right\|}{1-\left\|(A-B)A^{-1}\right\|} \tag{2.45}$$

İspat: Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki lemmayı yazıp ispatlayalım.

Lemma 2.7. $A_1 \in L(X,Y)$ ve $A_2 \in L(Y,Z)$ olduklarını ve her ikisinin de sürekli dönüştürülebilen operatörler olduklarını varsayalım. O zaman ; $A_2A_1 \in L(X,Z)$ olur. Bu operatör sürekli dönüştürülebilendir ve $\left(A_2A_1\right)^{-1} = A_1^{-1}A_2^{-1} \in L(Z,X)$ olur. Bu lemmayı ispatlamak için $A_1^{-1}A_2^{-1}$ operatörünün A_2A_1 operatörünün tersi olduğunu ispatlamak yeterlidir. $A_1^{-1}A_2^{-1}A_2A_1 = A_1^{-1}IA_1 = A_1^{-1}A_1 = I$

Şimdi teoremin ispatına geçelim. Teoremin ispatı için B operatörünü aşağıdaki şekilde yazalım.

$$B = A-(A-B) = \left(I-(A-B)A^{-1}\right)A$$

Lemma 2.7.'yi uygularsak,

$$B^{-1} = A^{-1}\left(I-(A-B)A^{-1}\right)^{-1}$$

olur. Norm alırsak,

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|\left(A-B\right)A^{-1}\right\|}$$

bulunur.

$$A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\left(I-(A-B)A^{-1}\right)^{-1}=A^{-1}\left[I-\left(I-(A-B)A^{-1}\right)^{-1}\right]$$

norm alırsak,

$$\left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|\left(A-B\right)A^{-1}\right\|}{1-\left\|\left(A-B\right)A^{-1}\right\|}$$

bulunur. Teorem ispatlandı.

Sonuç 2.4. Varsayalım ki A ve B operatörleri için

$$\left\|A-B\right\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \tag{2.46}$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman B^{-1} operatörü vardır (B sürekli dönüştürülebilen) ve

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A-B\right\|\left\|A^{-1}\right\|} \tag{2.47}$$

$$\left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|^{2}\left\|A-B\right\|}{1-\left\|A-B\right\|\left\|A^{-1}\right\|} \tag{2.48}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

3. SINIRLI TERS OPERATÖRLÜ OPERATÖR DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Önceki kısımda biz ters operatörler hakkında 2 tane çok önemli teorem ispatladık. Bunlardan birincisi $(I-C)^{-1}$ operatörünün varlığı hakkındaki teorem idi. O teoremde denildi ki $C \in L(X)$ olduğunda ve $\|C\| < 1$ eşitsizliği sağlandığında $I-C$ operatörü sürekli dönüştürülebilendir ve bu operatörün tersi için;

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|C\|} \tag{3.1}$$

ve

$$\left\|I-(I-C)^{-1}\right\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|} \tag{3.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. 2. teoremde denildi ki $A,B \in L(X,Y)$ operatörlerinden A sürekli dönüştürülebilen operatör ve

$$\left\|(B-A)A^{-1}\right\| < 1 \tag{3.3}$$

şartı sağlandığında B operatörü de sürekli dönüştürülebilendir ve

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|(B-A)A^{-1}\right\|} \tag{3.4}$$

$$\left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|(B-A)A^{-1}\right\|}{1-\left\|(B-A)A^{-1}\right\|} \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Bunları ispatladık. Bu sonuncu teoremden bir önemli özellik elde ettik. Bu özellikte (3.3) eşitsizliği yerine

$$\|B-A\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlandığında dikkat edelim ki (3.3) eşitsizliği de sağlanır. (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\|B-A\|\left\|A^{-1}\right\|} \tag{3.7}$$

ve

$$\left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|^{2}\|B-A\|}{1-\|B-A\|\left\|A^{-1}\right\|} \tag{3.8}$$

İleride bu değerlendirmeleri defalarca hem teorik hem pratik problemlerin çözümünde uygulayarak yeni yeni sonuçlar elde etmenin yöntemini göstereceğiz. Şimdi biz burada önce birkaç örnekte bu değerlendirmelerin nasıl uygulanabildiğini göstereceğiz. Sonra ise bu iki teoremin başka iki şeklini yazıp ispatlayacağız. Bu yeni yazacağımız modifikasyon değişimi bazı problemlerde daha kolay uygulanabilir. Bununla bu teoremlerin başka başka şekillerde verilmesinin yöntemini göstermiş olacağız.

Varsayalım ki bize

$$\mathrm{B}x = y \tag{3.9}$$

denklemi verilsin. Bu denklem belli bir problemin denklemidir. Bu problem matematiksel olarak yazıldığında B operatörü yaklaşık olarak bulunmuş (belli bir hata ile verilmiş) olabilir veya (3.9) denklemini çözmek istediğimizde B operatörünün B^{-1} tersini bulamayabiliriz veya zor bulunabilir. Bu yüzden (3.9) denkleminde B operatörünü, bu operatöre yakın ve tersi kolaylıkla hesaplanabilen A operatörü ile değiştiririz. Bu durumda,

$$\Delta A = B - A$$

operatörünün aşağıdaki şartı sağladığını varsayarız:

$$\|\Delta A\| = \|B-A\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \tag{3.10}$$

Bu durumda biz (3.9) denkleminin yerine

$$\mathrm{A}\bar{x} = y \tag{3.11}$$

denklemini alırız. (3.9) denklemi ve (3.11) denkleminin çözümleri uygun olarak

$$x = \mathrm{B}^{-1}y \ , \ \bar{x} = \mathrm{A}^{-1}y$$

dir.

(3.9) Denklemini (3.11) denklemi ile değiştirdiğimizde yaptığımız hatayı değerlendirelim.

$$h = x - \bar{x} = \left(\mathrm{B}^{-1} - \mathrm{A}^{-1}\right)y$$

Bunu incelersek aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\left\|x - \bar{x}\right\| \le \left\|\mathrm{B}^{-1} - \mathrm{A}^{-1}\right\|\left\|y\right\| \le \frac{\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|\left\|(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}\right\|}{1-\left\|(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}\right\|}\left\|y\right\| \le \frac{\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|^{2}\left\|\mathrm{B}-\mathrm{A}\right\|}{1-\left\|\mathrm{B}-\mathrm{A}\right\|\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|}\left\|y\right\| \tag{3.12}$$

Örnek 3.1.

$$\mathrm{B}x = \mathrm{b} \tag{3.13}$$

burada ,

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \dots & \mathrm{b}_{1n} \\ \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} & \dots & \mathrm{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{b}_{n1} & \mathrm{b}_{n2} & \dots & \mathrm{b}_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \dots \\ \mathrm{b}_n \end{bmatrix}$$

lineer cebirsel sistemidir. Varsayalım ki bu (3.13) denklemi için

$$\left\|\mathrm{B} - \mathrm{I}\right\| < 1$$

dir. Böylece bu örnekte A=I aldık.

$$\mathrm{B} = \mathrm{I} + \Delta\mathrm{A}$$

dır. I birim matrisin doğurduğu operatördür. Böylece uygun operatör denklemi,

$$\mathrm{I}x = \mathrm{b} \qquad (3.14)$$

olur. Bu durumda hata için,

$$\|x - \mathrm{b}\| \le \frac{\|\mathrm{B} - \mathrm{I}\|}{1 - \|\mathrm{B} - \mathrm{I}\|}\|\mathrm{b}\|$$

şeklinde değerlendirme buluruz.

Örnek 3.2. Varsayalım ki (3.13) eşitliği ile verilen bu sistemde B matrisinin elemanlarının yuvarlama hatası ile verildiğini varsayalım. Varsayalım ki yuvarlamanın her bir elemandaki hatası ε sayısından küçüktür ve varsayalım ki (3.13) sistemi yerine

$$\mathrm{A}x = b \qquad (3.15)$$

denklemi çözülür ve bu durumda yaklaşık çözüm

$$\bar{x} = \mathrm{A}^{-1}b$$

dir. Matrisin normu

$$\|\mathrm{A}\| = \gamma_n = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

formülü ile hesaplansın. Bu durumda

$$\|\Delta\mathrm{A}\| = \|\mathrm{B} - \mathrm{A}\| \le n\varepsilon$$

şeklinde değerlendirilir. Bu değerlendirme ele alındığında hata için,

$$\left\| x - \bar{x} \right\| \le \frac{\left\| \mathrm{A}^{-1} \right\|^2 n\varepsilon}{1 - \left\| \mathrm{A}^{-1} \right\| n\varepsilon} \left\| b \right\|$$

değerlendirmesini elde ederiz.

Örnek 3.3.

$$\mathrm{B}x = x(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{3.16}$$

integral denklemini ele alalım. Bu denklemde $K(t,s)$ çekirdeği $[0,1]\mathrm{x}[0,1]$ karesinde tanımlanmış sürekli fonksiyondur. O zaman buradaki B operatörü B:$C[0,1] \to C[0,1]$'e dönüştüren bir operatör olur. Şimdi

$$\mathrm{B}x = y \tag{3.17}$$

denklemini çözmeliyiz. $y(t) \in C[0,1]$ dir. $K(t,s)$ çekirdeği

$$K_0(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} h_i(t) h_j(s)$$

şeklinde olduğunda (3.17) integral denkleminin çözümü cebirsel denklemler sisteminin çözümüne dönüştürülür. Böylece biz

$$\mathrm{A}x = x(t) + \int_0^1 K_0(t,s)x(s)ds$$

integral operatörünü alırız ve (3.17) denklemi yerine

$$\mathrm{A}x = y \tag{3.18}$$

denklemini çözeriz.

$$w = \max_{0 \le t,s \le 1} \left| K(t,s) - K_0(t,s) \right|$$

alalım. O zaman kolaylıkla gösterebiliriz ki,

$$\|\Delta A\| = \|B - A\| \leq w$$

olur. Söylediğimiz gibi (3.18) denklemini çözdüğümüzde biz (3.18) denklemini bir cebirsel denkleme dönüştürürüz. Bu cebirsel denklemi çözdüğümüzde

$$\bar{x} = Ry$$

eşitliğini buluruz. R cebirsel denklemin matrisinin tersinin doğurduğu operatördür. Eğer;

$$w \leq \|R\|^{-1}$$

olursa o zaman (3.17) denkleminin çözümü ile (3.18) denkleminin çözümlerinin farkı

$$\|x - \bar{x}\| \leq \frac{w}{1 - w\|R\|} \|R\|^2 \|y\|$$

gibi değerlendirilir.

3.1. Denklemin "Yaklaşık" Denklemle Değiştirilmesinin Bir Başka Yöntemi

$$(I - U).x = y \qquad (3.19)$$

denkleminin verildiğini varsayalım ve $U: X \rightarrow X$ dönüştüren lineer operatör olsun. X Banach uzayı ve I, X uzayında birim operatördür. Şimdi biz (3.19) denklemi ile beraber

$$(I - V)x = y \qquad (3.20)$$

denklemini de ele alalım. Bu denklemde de $V: X \rightarrow X$ dönüştüren lineer operatördür.

(3.20) denklemindeki V operatörünü (3.19) denklemindeki U operatörüne "yaklaşık" olarak alırız. O zaman V-U farkının

$$\|\Delta V\| = \|V - U\| \leq \delta$$

gibi değerlendirildiğini varsayalım.

Teorem 3.1. I-U nun sürekli dönüştürülebilen olduğunu varsayalım ve

$$\delta\left\|\left(\mathrm{I}-\mathrm{U}\right)^{-1}\right\|<1 \tag{3.21}$$

olsun. (3.21) eşitsizliği sağlandığında I-V operatörü de sürekli dönüştürülebilendir. $y\in \mathrm{X}$ için (3.19) ve (3.20) denklemlerinin

$$x=\left(\mathrm{I}-\mathrm{U}\right)^{-1}y\,,\ \overline{x}=\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}y$$

çözümleri için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left\|x-\overline{x}\right\|\le\delta\left\|\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\right\|\left\|x\right\| \tag{3.22}$$

İspat: (3.21) eşitsizliğinin doğruluğunu göstermek için;

$$\overline{x}=\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}y=\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\mathrm{U}\right)x=\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\left[\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)+\left(\mathrm{V}-\mathrm{U}\right)\right]x$$

$$=x+\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\left(\mathrm{V}-\mathrm{U}\right)x$$

olur.

$$\overline{x}-x=\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\left(\mathrm{V}-\mathrm{U}\right)x$$

norm alırsak,

$$\left\|\overline{x}-x\right\|\le\delta\left\|\left(\mathrm{I}-\mathrm{V}\right)^{-1}\right\|\left\|x\right\|$$

bulunur. Bu teorem V operatörü U operatörüne yeterince yakın olduğunda (3.19) denkleminin çözümünün varlığını her bir y için garanti eder. Ama (3.22) eşitsizliğinin sağ yanında x'in normu olduğundan (3.22) eşitsizliğine dayanarak biz hatayı değerlendiremiyoruz. Bunun için aşağıdaki teoremi ispatlayalım. Aşağıda vereceğimiz teoremin ispatı (3.22) eşitsizliğine dayanacaktır.

Teorem 3.2. Teorem 3.1.'in tüm şartlarının sağlandığını varsayalım. Varsayalım ki

$$\delta \left\| (\mathrm{I}-\mathrm{V})^{-1} \right\| \leq q < 1$$

dir. O zaman

$$\left\| \bar{x} - x \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| \bar{x} \right\| \tag{3.23}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: (3.22) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\left\| \bar{x} - x \right\| \leq q \left\| x \right\| \leq q \left(\left\| x - \bar{x} \right\| + \left\| \bar{x} \right\| \right) = q \left\| \bar{x} - x \right\| + q \left\| \bar{x} \right\|$$

buradan,

$$(1-q) \left\| \bar{x} - x \right\| \leq q \left\| \bar{x} \right\|$$

bulunur. Her tarafı $1-q$ ya bölersek,

$$\left\| \bar{x} - x \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| \bar{x} \right\|$$

eşitsizliğini buluruz.

Örnek 3.4.

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{3.24}$$

integral denklemini ele alalım. Bu denklemde $K(t,s)$ çekirdeğinin $[a,b]\mathrm{x}[a,b]$ dikdörtgeninde sürekli fonksiyon olduğunu ve $f(t)$ nin $[a,b]$ de sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. (3.24) denklemi ile birlikte biz

$$K_1(t,s)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\psi_i(s) \tag{3.25}$$

çekirdekli ,

$$x(t)=\int_a^b K_1(t,s)x(s)ds+f(t) \tag{3.26}$$

denklemini de ele alalım. Dikkate alalım ki (3.25) çekirdekli (3.26) integral denkleminin çözümü cebirsel lineer denklemler sisteminin çözümüne dönüştürülür. (3.24) ve (3.26) integral denklemlerini operatör şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x-Kx=f \quad ; \quad (\mathrm{I}-K)x=f$$

$$x-K_1x=f \quad ; \quad (\mathrm{I}-K_1)x=f$$

Burada

$$\max_{a\le t,s\le b}\left|K(t,s)-K_1(t,s)\right|\le\delta_1$$

dır. O zaman kolaylıkla gösterebiliriz ki

$$\left\|K_1-K\right\|\le\delta \quad , \quad \delta=\delta_1\left(b-a\right) \tag{3.27}$$

(3.27) eşitsizliğinden görüyoruz ki δ_1 sayısı yeterince küçük olduğunda (3.24) denklemini yaklaşık olarak (3.26) denkleminin yardımı ile çözmek için burada yazdığımız Teorem 3.1. ve Teorem 3.2.'yi kullanabiliriz.

3.2. Sade Halde Küçük Parametreler Metodu

$$\mathrm{A}x-\lambda Cx=y \tag{3.28}$$

denklemi ele alalım. Burada $\mathrm{A},C\in\mathrm{L(X,Y)}$ ve $\mathrm{A}^{-1}\in\mathrm{L(Y,X)}$ ve $\mathrm{y}\in\mathrm{Y}$ olduğunu varsayalım. (3.28) denkleminde λ skaler parametredir. $|\lambda|<\rho$, x bu denklemde aranan vektördür ve $x\in\mathrm{X}$. Burada

$$\left\|\lambda C \mathrm{A}^{-1}\right\| < 1$$

şartı sağlandığında, yani

$$|\lambda| < \left\|C \mathrm{A}^{-1}\right\|^{-1} \tag{3.29}$$

şartını sağlayan her bir λ parametresi için

$$\mathrm{A} - \lambda C = \left(\mathrm{I} - \lambda C \mathrm{A}^{-1}\right)\mathrm{A}$$

operatörü sürekli dönüştürülebilen operatör olur. O zaman (3.29) şartı sağlandığında (3.28) denkleminin çözümü var ve tektir. Ayrıca

$$x(\lambda) = \left(\mathrm{A} - \lambda C\right)^{-1} y \tag{3.30}$$

formülü ile bulunur. Burada

$$R = \left\|C \mathrm{A}^{-1}\right\|^{-1}$$

olmak üzere (3.29) eşitsizliği ile tanımlanan $S_{\mathrm{R}}(0)$ dairesinde (3.30) formülü ile bulunan $x(\lambda)$ çözümü λ parametresinin analitik fonksiyonu olur. Bu yüzden de (3.29) şartı sağlandığında (3.28) denkleminin çözümünü

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \tag{3.31}$$

serisi şeklinde arayabiliriz. (3.28) denkleminin çözümünün (3.31) serisi şeklinde aranması (3.28) denkleminin çözümünün küçük parametreler metodu ile bulunmasının esasını oluşturur. (3.31) serisini (3.28) denkleminde yerine yazalım. O zaman

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A} x_k \lambda^k = y + \sum_{k=0}^{\infty} C x_k \lambda^{k+1}$$

olarak buluruz. Bu eşitlikte λ parametresinin aynı dereceli terimlerinin katsayılarını bir birine eşitleyerek $x_0, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, \ \dots$ katsayılarının bulunması için Rekürans lineer denklem sistemini buluruz.

$$\mathrm{A}x_0 = y \ , \ \mathrm{A}x_1 = Cx_0 \ , \quad \dots \ , \ \mathrm{A}x_k = Cx_{k-1} \ , \ \dots$$

A operatörü şarta göre sürekli dönüştürülebilen operatör olduğundan sırasıyla aşağıdaki gibi buluruz:

$$x_0 = \mathrm{A}^{-1}y \ , \ x_1 = \mathrm{A}^{-1}\left(C\mathrm{A}^{-1}\right)y \ , \quad \dots \ , \ x_k = \mathrm{A}^{-1}\left(C\mathrm{A}^{-1}\right)^k y \ , \ \dots$$

Böylece

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^{-1}\left(C\mathrm{A}^{-1}\right)^k y\lambda^k \tag{3.32}$$

Biz burada (3.28) denkleminin kuvvet serisine açılmış (3.30) çözümünü bulduk. (3.32) serisinin kısmi toplamı olan

$$x_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}^{-1}\left(C\mathrm{A}^{-1}\right)^k y\lambda^k \tag{3.33}$$

ifadesi (3.28) denkleminin yaklaşık çözümü olur. (3.32) serisinden bu serinin (3.33) kısmi toplamını çıkararak bulduğumuz farkın normunu değerlendirerek aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$\begin{aligned}\left\|x(\lambda) - x_n(\lambda)\right\| &= \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{A}^{-1}\left(C\mathrm{A}^{-1}\right)^k y\lambda^k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|\left\|C\mathrm{A}^{-1}\right\|^k \|y\||\lambda|^k \\ &= \frac{\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|\left(\left\|C\mathrm{A}^{-1}\right\||\lambda|\right)^{n+1}}{1 - |\lambda|\left\|C\mathrm{A}^{-1}\right\|}\|y\|\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikle yaklaşık çözümde yapılan hata değerlendirilir.

3.3. Genel Halde Küçük Parametreler Metodu

Şimdi daha genel olan

$$A(\lambda)x = y(\lambda) \tag{3.34}$$

denklemi ele alalım. Bu denklemdeki $A(\lambda)$ operatörüne $|\lambda| < \rho$ dairesine dahil olan her bir λ için verildiğini, yani $A(\lambda)$ operatör-fonksiyon olduğunu ve her bir $\lambda \in S_\rho(0)$ için $A(\lambda) \in L(X,Y)$ olduğunu varsayalım. $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun $\lambda = 0$ noktasında analitik olduğunu ve $A(0)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu varsayalım. $y(\lambda)$ fonksiyonu λ parametresinin verilmiş $\lambda = 0$ noktasında analitik olan değerleri Y uzayında olan önceden verilmiş fonksiyondur. Aranan x vektör fonksiyonu X uzayında aranır.

$A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun ve $y(\lambda)$ abstrakt fonksiyonunun $\lambda = 0$ noktasında analitik olması o demektir ki, bu fonksiyonlar yakınsaklık yarıçapları uygun olarak ρ' ve ρ olmakla sıfırdan farklı olan aşağıdaki kuvvet serilerine açılırlar.

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \quad , \quad y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k \tag{3.35}$$

$A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun $\lambda = 0$ noktasında analitik olmasından $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun $\lambda = 0$ noktasında sürekli olduğu elde edilir. Buna göre de öyle $r > 0$ sayısı bulunur ki, $|\lambda| < r$ dairesinde

$$\left\| \left[A(\lambda) - A(0) \right] A^{-1}(0) \right\| < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikten de $|\lambda| < r$ dairesinde $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun sürekli dönüştürülebilen olduğu elde edilir. Bu yüzden de (3.34) denkleminin tek bir tane

$$x(\lambda) = A^{-1}(\lambda)\, y(\lambda)$$

çözümü vardır. Bu formülle bulunan $x(\lambda)$ çözümü $\lambda = 0$ noktasında analitiktir ve $x(\lambda)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olan $\mathrm{R} > 0$ sayısı

$$\mathrm{R} = \min(\rho, r)$$

formülü ile bulunur. $x(\lambda)$ çözümünü inşa etmek için küçük parametreler yöntemini kullanalım. Bunun için (3.34) denkleminin $x(\lambda)$ çözümünü

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \tag{3.36}$$

serisi şeklinde arayalım. (3.36) açılımını (3.34) denkleminde yerine yazarak ve (3.35) açılımlarını kullanarak $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ belirsiz katsayılarının bulunması için aşağıdaki denklem sistemini buluruz.

$$\mathrm{A}_0 x_0 = y_0 \ , \ \mathrm{A}_0 x_1 + \mathrm{A}_1 x_0 = y_1 \ , \ \mathrm{A}_0 x_2 + \mathrm{A}_1 x_1 + \mathrm{A}_2 x_0 = y_2 \ , \ldots , \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k x_{n-k} = y_n \ , \ldots \tag{3.37}$$

Burada $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}(0)$ şarta göre sürekli dönüştürülebilen operatördür. (3.37) denklemler sistemini ardışık olarak çözerek,

$$x_0 = \mathrm{A}_0^{-1} y_0 \ , \ x_1 = \mathrm{A}_0^{-1} y_1 - \mathrm{A}_0^{-1} \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_0^{-1} y_0 \ , \ \ldots \tag{3.38}$$

buluruz. (3.36) serisinin yakınsaklık yarıçapı $\mathrm{R} = \min(\rho, r)$ formülü ile bulunur. Bu formülden görüyoruz ki, R sayısı $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olan ρ' sayısına bağlı değildir. (3.36) serisinin yakınsaklık yarıçapı R sayısı alttan değerlendirilebilir. Gerçekten de, varsayalım ki, biz

$$\|y_n\| \le \mathrm{M}_1 \alpha^n \ , \ \left\|\mathrm{A}_n \mathrm{A}_0^{-1}\right\| \le \mathrm{M}\beta^{n-1} \ (n \ge 1)$$

değerlendirmelerini yapmışız. $\rho \ge \alpha^{-1}$ dir, o zaman buna ilave olarak,

$$\left\|\left[\mathrm{A}(\lambda) - \mathrm{A}(0)\right]\mathrm{A}^{-1}(0)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{A}_0^{-1} \lambda^n\right\| \le \mathrm{M}|\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda|\beta\right)^{n-1} = \frac{\mathrm{M}|\lambda|}{1 - |\lambda|\beta} < 1$$

eşitsizliği

$$|\lambda| < \frac{1}{\mathrm{M} + \beta}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıyla sağlanır. Sonuçta biz R için

$$\mathrm{R} \geq \min(\alpha^{-1}, \mathrm{M}^{-1}) \tag{3.39}$$

değerlendirmesini buluruz. Dikkate alalım ki,

$$\mathrm{A}(\lambda) = \mathrm{A}_0 + \lambda \mathrm{A}_1$$

şeklinde olduğunda ve

$$\|y_n\| \leq \mathrm{M}_1 \alpha^n \quad \text{ve} \quad \left\|\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_0^{-1}\right\| \leq \mathrm{M}$$

olduğunda R için

$$\mathrm{R} \geq \min(\alpha^{-1}, \mathrm{M}^{-1})$$

değerlendirmesi bulunur.

Bu metodun uygulanmasında $\mathrm{A}(0)$ operatörünün tersinin hesaplanmasının $\mathrm{A}(\lambda)$ operatörünün tersinin bulunmasından daha kolay olduğu halde küçük parametreler metodunun uygulanması faydalı olur.

3.4. Küçük Parametreler Metodunun Uygulanmasına Ait Örnek

$$x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s + \lambda ts) x(s) ds = y(t) \tag{3.40}$$

integral denklemini ele alalım. Bu integral denklemi $C[-\pi, \pi]$ uzayını kendisine dönüştüren operatörlü operatör denklem şeklinde yazabiliriz.

$$x(t) - A(\lambda) x(t) = y(t) \tag{3.41}$$

Önce

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\cos(t-s+\lambda ts)=\left(ts\right)^k\cos(t-s+\lambda ts+k\frac{\pi}{2})$$

eşitliğini yazalım. O zaman

$$\cos(t-s+\lambda ts)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(ts\right)^k\cos(t-s+k\frac{\pi}{2})\lambda^k$$

olur. Bu eşitlikleri kullanarak A_k operatör katsayıları için,

$$\mathrm{A}_0 x = x(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x(s)ds \tag{3.42}$$

$$\mathrm{A}_k x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(ts\right)^k\cos(t-s+k\frac{\pi}{2})x(s)ds \quad , \quad k=1,2,\ ...$$

eşitliklerini buluruz. $y(t)$ fonksiyonu λ parametresine bağlı olmadığından $y_0=y$, $y_k=0$, $k\geq 1$ olur.

$$\mathrm{A}_0 x_0 = y$$

denklemini ele alalım. Bu bir II. çeşit Fredholm integral denklemidir.

$$x_0(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x_0(s)ds=y(t) \tag{3.43}$$

Bu integral denkleminin çekirdeğini

$$\cos(t-s)=\cos t\cos s+\sin t\sin s$$

şeklinde yazalım. O zaman (3.43) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$x_0(t)=y(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_0(s)\cos s ds\cos t+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_0(s)\sin s ds\sin t \tag{3.44}$$

Bu denklemde

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_0(s)\cos s ds \ , \ \mathrm{B}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_0(s)\sin s ds \tag{3.45}$$

alırsak o zaman (3.44) denklemi

$$x_0(t)=y(t)+\mathrm{A}\cos t+\mathrm{B}\sin t \tag{3.46}$$

şekline dönüşür. (3.46) denkleminin her yanı cost fonksiyonu ile çarpıp t değişkenine göre $-\pi$ den π ye integrallersek ve (3.45) eşitliğini kullanırsak

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos s ds$$

olduğunu buluruz.

Benzer şekilde (3.46) denkleminin her yanını sint fonksiyonu ile çarpıp t değişkenine göre $-\pi$ den π ye integrallersek

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s)\sin s ds$$

eşitliğini buluruz. Böylece (3.46) eşitliği

$$x_0(t)=y(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(t-s\right)y(s)ds \tag{3.47}$$

şeklinde yazılır. Böylece bu işlemlerden

$$\mathrm{A}_0 x_0 = y$$

denkleminin $C\left[-\pi,\pi\right]$ uzayında tek bir çözümünün olduğunu ve bu çözümün (3.47) formülü ile bulunduğunu görüyoruz. Buradan da A_0^{-1} operatörünün var ve $C\left[-\pi,\pi\right]$ uzayının tümünde tanımlandığı görülür.

$C[-\pi,\pi]$ uzayında $\mathrm{A}_0^{-1}: C[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]$ operatörü için aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\|x_0\| \le \|\mathrm{A}_0^{-1} y\| \le \|y\| + \frac{1}{\pi} \max_{[-\pi,\pi]} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t-s)|\, ds \|y\| \le \left(1+\frac{4}{\pi}\right)\|y\|$$

Böylece

$$\|\mathrm{A}_0^{-1}\| \le 1+\frac{4}{\pi}$$

Şimdi

$$\mathrm{A}_0 x_1 + \mathrm{A}_1 x_0 = 0$$

denklemini ele alalım. Bu denklemi açık şekilde yazalım.

$$x_1(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) x_1(s) ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ts \sin(t-s) ds$$

Bu denklemde $x_0(t)$ fonksiyonu (3.47) formülü ile bulunmuştur.

Bu denklem (3.43) şeklindeki denklemdir. Bu denklemin de çözümü açık şekilde bulunur. Böylece ardışık olarak

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k$$

serisinin tüm katsayıları bulunur. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı R için aşağıdaki değerlendirme yapılabilir.

$$\|\mathrm{A}_k\| \le \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\right)^k = 2\pi\left(\pi^2\right)^{k-1}$$

$$\|\mathrm{A}_k \mathrm{A}_0^{-1}\| \le (2\pi+8)\left(\pi^2\right)^{k-1}$$

buradan da

$$R \geq \frac{1}{\pi^2 + 2\pi + 8}$$

eşitsizliği bulunur.

3.5. Parametreye Göre Devam Metodu

Parametreye göre devam metodunu ve bu metodun esas teoremini inceleyelim.

3.5.1. Parametreye Göre Devam Metodu ve Esas Teorem

Ters operatör hakkındaki teoremin bir uygulaması olarak da biz burada parametreye göre devam metodunu ele alalım. $L(X,Y)$ uzayından iki tane A ve B operatörlerini alalım. $A,B \in L(X,Y)$. A operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğunu varsayalım. Yani A operatörü için $R(A) = Y$ ve A operatörünün $R(A)$ da tersi var ve süreklidir. $A^{-1} \in L(Y,X)$ olduğunu varsayalım. A ve B operatörleri için

$$\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

eşitsizliği sağlandığında ters operatör hakkındaki teoreme göre B operatörü de sürekli dönüştürülebilen olur.

Demek ki, bazı uygun şartlar sağlandığında B operatörü A operatöründen çok çok uzakta olduğu halde de B operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğunu ispatlayabildik. Bu sonuca aşağıdaki yöntemle ulaşılır.

$[0,1]$ aralığında sürekli olan öyle $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu ele alalım ki bu operatör-fonksiyon

$$A(0) = A \text{ ve } B(1) = B$$

şartlarını sağlasın. Başka bir deyişle $L(X,Y)$ uzayında A ve B noktalarını birleştiren sürekli $A(\lambda)$ eğrisini ele alalım. Burada $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu için aşağıdaki şartın sağlandığını da varsayalım:

I. $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonu için öyle $\gamma > 0$ sayısı vardır ki, tüm $\lambda \in [0,1]$ ve keyfi alınmış, her bir $x \in \mathrm{X}$ elemanı için,

$$\|\mathrm{A}(\lambda)x\| \geq \gamma \|x\| \tag{3.5.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonu için I şartı sağlandığında aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 3.3. $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında tanımlanmış, sürekli ve her bir $\lambda \in [0,1]$ için $\mathrm{A}(\lambda) \in \mathrm{L(X,Y)}$ olduğunu ve $\mathrm{A}(0)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu varsayalım. Eğer $\mathrm{A}(\lambda)$ için I şartı da sağlanırsa, o zaman $\mathrm{A}(1)$ operatörü de sürekli dönüştürülebilendir ve $\|\mathrm{A}^{-1}(1)\| \leq \gamma^{-1}$ eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.1. $\mathrm{A}(\lambda) \in \mathrm{L(X,Y)}$ operatörü için I şartı sağlandığını ve $\lambda = \lambda_0 \in [0,1]$ için $\mathrm{A}(\lambda_0) \in \mathrm{L(X,Y)}$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğunu varsayalım. O zaman

$$\|\mathrm{A}^{-1}(\lambda_0)\| \leq \gamma^{-1} \tag{3.5.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Keyfi $x \in \mathrm{X}$ alalım ve

$$\mathrm{A}(\lambda_0)x = y$$

olsun. O zaman

$$x = \mathrm{A}^{-1}(\lambda_0)y$$

olur. Burada I şartını $\mathrm{A}(\lambda)$ operatörü için yazıp,

$$\left\| A(\lambda)x \right\| \geq \gamma \left\| x \right\|$$

sonra bu eşitsizlikte $\lambda = \lambda_0$ alırsak,

$$\left\| A(\lambda_0)x \right\| \geq \gamma \left\| x \right\|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu sonuncu eşitsizlikte

$$y = A(\lambda_0)x \quad \text{ve} \quad x = A^{-1}(\lambda_0)$$

aldığımızda

$$\left\| A^{-1}(\lambda_0)y \right\| \leq \gamma^{-1} \left\| y \right\|$$

eşitsizliğinin her bir $y \in Y$ için sağlandığını buluruz. Bu sonuncu eşitsizlikten de (3.5.2) eşitsizliğinin sağlandığını buluruz.

Şimdi burada üstte yazdığımız parametreye göre devam metodunun esas teoremini iki hal için ayrı ayrı ispatlayalım. Birinci halde varsayalım ki,

$$A(\lambda) = (1-\lambda)A + \lambda B$$

yani, $A(\lambda)$ operatörü $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğunda L(X,Y) uzayında A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası olduğu hal için ispatlayacağız. Bir de genel halde $A(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1$ operatörü L(X,Y) uzayında $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere ve A noktası ile B noktasını birleştiren keyfi sürekli eğri olduğu hal için ispatlayacağız.

3.5.2. Parametreye Göre Devam Metodundaki Esas Teoremin Özel Hal İçin İspatı

Parametreye göre devam metodundaki esas teoremi $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $A(\lambda) \in L(X,Y)$ operatörünün

$$A(\lambda) = (1-\lambda)A + \lambda B$$

şeklinde olduğu hal için ispatlayalım. Teoremin şartına göre

$$A^{-1} \in L(Y,X)$$

olduğu, yani A operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğu var sayılır. Üstte ispatladığımız Lemma 3.1.' de

$$\lambda = \lambda_0 = 0$$

aldığımızda

$$A(\lambda_0) = A(0) = A$$

olduğundan ve

$$A^{-1} \in L(Y,X)$$

olduğundan Lemma 3.1. deki (3.5.2) eşitsizliğine göre

$$\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$$

olur. Şimdi aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| = \|\lambda(B-A)A^{-1}\| \leq \lambda\gamma^{-1}\|B-A\|$$

şimdi biz burada

$$\delta = \frac{\gamma}{2\|B-A\|}$$

sayısını alalım. $\lambda \in [0,\delta]$ aldığımızda üstteki sonuncu eşitsizlikten,

$$\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini buluruz. O zaman ters operatör hakkındaki teoreme göre $\lambda \in [0,\delta]$ için $A(\lambda)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu buluruz. Burada δ

sayısı 1'den büyük veya 1'e eşit olursa, yani $\delta \geq 1$ eşitsizliğini sağladığında, o zaman teoremin ispatı bitmiş olur.

$\delta < 1$ olduğunu varsayalım. $\mathrm{A}(\delta)$ operatörünü alalım. $\mathrm{A}(\delta)$ sürekli dönüştürülebilendir. O zaman Lemma 3.1.'e göre

$$\left\| \mathrm{A}^{-1}(\delta) \right\| \leq \gamma^{-1}$$

değerlendirmesi doğrudur.

Üstte yaptığımız işlemleri $\lambda > \delta$ hali için tekrar yaparsak, o zaman bu hal için aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\left\| \left[\mathrm{A}(\lambda) - \mathrm{A}(\delta) \right] \mathrm{A}^{-1}(\delta) \right\| \leq \gamma^{-1} \left\| \mathrm{A}(\lambda) - \mathrm{A}(\delta) \right\| = \gamma^{-1}(\lambda - \delta) \left\| \mathrm{B} - \mathrm{A} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Biz burada,

$$\delta \leq \lambda \leq 2\delta$$

aldık ve bu değerlendirmeyi bulduk. Bu sonuncu değerlendirmeden ters operatör hakkındaki teoremin uygulanmasıyla

$$\delta \leq \lambda \leq 2\delta$$

aralığında $\mathrm{A}(\lambda)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğu bulunur. Burada

$$2\delta \geq 1$$

olursa teorem ispatlanmıştır.

$$2\delta < 1$$

halinde Lemma 3.1.'in uygulanmasıyla

$$\left\| \mathrm{A}^{-1}(2\delta) \right\| < \gamma^{-1}$$

olduğunu buluruz. Üstte yaptığımız işlemleri şimdi

$$[2\delta, 3\delta]$$

aralığı için tekrarlarız. Sonlu sayıda bu işlemleri tekrarlayarak sonuçta $\mathrm{A}(1)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen olduğunu ispatlarız ve

$$\|\mathrm{A}^{-1}(1)\| \le \gamma^{-1}$$

değerlendirmesini Lemma 3.1.'in uygulanmasıyla elde ederiz. Burada $\mathrm{A}(1) = \mathrm{B}$ olduğundan teorem bu hal için ispatlanmış olur.

Şimdi biz burada,

$$\mathrm{A}(\lambda)x = y \quad , \quad (\lambda \in [0,1]) \tag{3.5.3}$$

denklemini ele alalım. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere bu (3.5.3) denkleminin tüm mümkün çözümleri için aşağıdaki ön değerlendirmenin yapıldığını varsayalım.

$$\|x\| \le c\|y\| \tag{3.5.4}$$

(3.5.4) değerlendirmesindeki c'nin sabit bir sayı olup x, y ve λ'ya bağlı olmadığını varsayalım. Bu şartlar sağlandığında (3.5.4) şekilli denkleminin çözümlerine *aprior değerlendirme (ön değerlendirme)* denir.

Lemma 3.2. Parametreye bağlı (3.5.3) şekilli denklemlerin çözümleri için yazılmış (3.5.4) şekilli *aprior değerlendirme* (ön değerlendirme) (3.5.3) denklemindeki $\mathrm{A}(\lambda)$ operatörü için yazılmış I şartının başka şekilli yazılışıdır.

Gerçekten de (3.5.4) eşitsizliğinde

$$y = \mathrm{A}(\lambda)x$$

alırsak, $\mathrm{A}(\lambda)$ operatörü için I eşitsizliğini buluruz.

$$\|\mathrm{A}(\lambda)x\| \ge c^{-1}\|x\|$$

Buradan

$$\gamma = c^{-1}$$

olduğu bulunur.

Üstte ispatladığımız esas teorem aprior değerlendirmenin operatör (3.5.3) şekilli denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki teoremlerin ispatlanmasında çok önemli olduğunu kanıtlıyor.

3.5.3. Parametreye Göre Devam Metodundaki Esas Teoremin Genel Halde İspatı

Parametreye göre devam metodundaki esas teoremin genel hal için ispatı aşağıdaki lemmanın uygulanmasıyla ispatlanır.

Lemma 3.3. $\mathfrak{M}$ kümesi $[0,1]$ aralığından alınmış, boş olmayan ve $[0,1]$ aralığında aynı zamanda hem açık hem de kapalı küme olsun. O zaman $\mathfrak{M} = [0,1]$ olur.

Hatırlatalım ki, keyfi $x_0 \in \mathfrak{M}$ aldığımızda öyle $\delta > 0$ sayısı bulunursa ki,

$$S_\delta(x_0) \cap \left(S_\delta(x_0) \cap [0,1]\right) \subset \mathfrak{M} \cap [0,1]$$

sağlandığında $\mathfrak{M}$ kümesi $[0,1]$ aralığında açık küme olarak adlandırılır.

İspat: $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığına tümleyenini $\mathfrak{N}$ ile gösterelim. Böylece, $\mathfrak{N} = [0,1] \setminus \mathfrak{M}$ olsun. $\mathfrak{N} = \varnothing$ olduğunu ispatlamamız gerekir. Aksini farz edelim. $\mathfrak{N} \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ olduğundan ve üstten sınırlı olduğundan, öyle b sayısı bulunur ki,

$$\mathrm{b} = \sup \mathfrak{M}$$

olur. $\mathfrak{M}$ kümesi kapalı küme olduğundan $\mathrm{b} \in \mathfrak{M}$ olur.

$b=1$ olduğunu gösterelim. $b<1$ olduğunu varsayalım. O zaman $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ de açık küme olmasından dolayı öyle $x>b$ ve $x\in\mathfrak{M}$ sayısı bulunur. Bu ise $\sup\mathfrak{M}$ sayısının tanımına çelişki oluşturur. Bu yüzden de $b<1$ olamaz. Böylece, $1\in\mathfrak{M}$ dir.

Şimdi $\mathfrak{N}$ kümesini ele alalım. $\mathfrak{N}$ kümesi, $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığına tümleyeni olduğundan, $\mathfrak{N}$ kümesi de $[0,1]$ aralığında hem açık ve hem de kapalıdır. $\mathfrak{N}$ için de üstteki analizi uygulayabiliriz. Burada da $1\in\mathfrak{N}$ olduğunu buluruz. Bu ise olamaz. Çünkü $\mathfrak{N}$ kümesi, $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığına tümleyenidir. Bu çelişkiden dolayı $\mathfrak{N}\neq\varnothing$ olamaz. Yani $\mathfrak{N}=\varnothing$ dir. Bu durumda $\mathfrak{M}=[0,1]$ olduğu ispatlanır.

Şimdi parametreye göre devam metodundaki esas teoremi ispatlayalım. $\mathfrak{M}$ ile $[0,1]$ aralığının öyle $\lambda\in[0,1]$ noktaları kümesini gösterelim ve bu $\lambda\in[0,1]$ noktalarında $A(\lambda)$ operatörü sürekli dönüştürülebilen olsun. $0\in\mathfrak{M}$ olduğundan $\mathfrak{M}$ kümesi boş değildir. Her bir $\lambda\in\mathfrak{M}$ için $A(\lambda)$ sürekli dönüştürülebilen olduğundan Lemma 3.1.'e göre her bir $\lambda\in\mathfrak{M}$ için,

$$\left\|A^{-1}(\lambda)\right\|\leq\gamma^{-1}$$

$\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığında açık küme olduğunu ispatlayalım. $\lambda_0\in\mathfrak{M}$ alalım. O zaman tüm $\lambda\in[0,1]$ için,

$$\left\|\left[A(\lambda)-A(\lambda_0)\right]A^{-1}(\lambda_0)\right\|\leq\gamma^{-1}\left\|A(\lambda)-A(\lambda_0)\right\|$$

eşitsizliği sağlanır.

$A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu λ_0 noktasında L(X,Y) metriğinde sürekli fonksiyondur. Bu yüzden keyfi $\varepsilon>0$ sayısına karşı öyle $\delta>0$ sayısı bulunur ki, $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ şartını sağlayan her bir $\lambda\in[0,1]$ için, $\left\|A(\lambda)-A(\lambda_0)\right\|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi biz $\varepsilon = \gamma$ alalım. O zaman $\varepsilon = \gamma$ sayısı için öyle $\delta(\gamma) > 0$ sayısı bulunur ki, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ şartını sağlayan her bir $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\left\| \left[\mathrm{A}(\lambda) - \mathrm{A}(\lambda_0) \right] \mathrm{A}^{-1}(\lambda_0) \right\| < 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Operatörün tersi hakkındaki teoreme göre bu λ sayıları için $\mathrm{A}(\lambda)$ sürekli dönüştürülebilendir. Böylece $\mathfrak{M}$ kümesi λ_0 sayısı ile birlikte

$$S_{\delta(\gamma)}(\lambda_0) \cap [0,1]$$

kümesini de kendisinde sağlıyor. Yani $\mathfrak{M}$ kümesi $[0,1]$ aralığında açık kümedir.

Şimdi ise $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığında kapalı olduğunu gösterelim.

$\mathfrak{M}$ kümesinden bir λ_0 sayısına yakınsak olan keyfi $\{\lambda_n\} \subset \mathfrak{M}$ dizisini alalım. Yani, $n \to \infty$ şartında $\lambda_n \to \lambda_0$ olsun. $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$ olduğunu göstermemiz gerekir. $\lambda_n \in \mathfrak{M}$ olduğundan Lemma 3.1.'e göre

$$\left\| \mathrm{A}^{-1}(\lambda_n) \right\| \le \gamma^{-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$\left\| \left[\mathrm{A}(\lambda_n) - \mathrm{A}(\lambda_0) \right] \mathrm{A}^{-1}(\lambda_n) \right\| \le \gamma^{-1} \left\| \mathrm{A}(\lambda_n) - \mathrm{A}(\lambda_0) \right\|$$

$\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun λ argümentinin sürekli fonksiyonu olduğundan keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısına karşı öyle N sayısı bulunursa ki her bir $n > \mathrm{N}$ için,

$$\left\| \mathrm{A}(\lambda_n) - \mathrm{A}(\lambda_0) \right\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\varepsilon = \gamma$ ve $n = \mathrm{N} + 1$ için,

$$\left\| \left[\mathrm{A}(\lambda_n) - \mathrm{A}(\lambda_0) \right] \mathrm{A}^{-1}(\lambda_n) \right\| < 1$$

eşitsizliğini yazmış oluruz. Bu şartın sağlanmasından ters operatör hakkındaki teoreme esasen $\mathrm{A}(\lambda_0)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilen operatör olduğu bulunur. Yani $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$ olur. Buradan da $\mathfrak{M}$ kümesinin $[0,1]$ aralığında kapalı küme olduğu ispatlanmış olur. Bu yüzden Lemma 3.3.'e göre $\mathfrak{M} = [0,1]$ olur. ($\mathfrak{M}$ kümesi $[0,1]$ aralığında hem kapalı hem açık küme olmasından dolayı $\mathfrak{M} = [0,1]$ olur.) Demek ki $1 \in \mathfrak{M}$. Yani $\mathrm{A}(1) = \mathrm{B}$ sürekli dönüştürülebilendir ve Lemma 3.1.'e göre

$$\left\| \mathrm{A}^{-1}(1) \right\| \le \gamma^{-1}$$

olup teorem ispatlandı.

3.5.4. Parametreye Göre Devam Metodunun Uygulanmasına Ait Örnekler

İkinci mertebeli diferansiyel denklem için aşağıdaki sınır-değer problemini ele alalım.

$$-x'' + b(t)x' + c(t)x = y(t) \quad , \quad 0 < t < 1 \tag{3.5.5}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{3.5.6}$$

Burada $c(t)$ katsayısının $[0,1]$ aralığında sürekli (önceden verilmiş) fonksiyon olduğunu, $b(t)$ katsayısının ise önceden verilmiş $[0,1]$ aralığında sürekli diferansiyellenen fonksiyon olduklarını varsayalım. Buna ilave olarak da $[0,1]$ aralığında aşağıdaki,

$$c(t) - \frac{1}{2}b'(t) \ge \alpha > -\frac{2}{\pi}$$

eşitsizliğinin de sağlandığını varsayalım.

(3.5.5) denkleminin sağ yanındaki $y = y(t)$ fonksiyonunun $\left[0,1\right]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. $x(t)$ aranan fonksiyondur. Böylece, $y \in \mathrm{Y} = C\left[0,1\right]$, $x \in \mathrm{X} = C^2\left[0,1\right]$ (3.5.5)-(3.5.6) sınır-değer problemini,

$$\mathrm{B}x = y$$

operatör denklem şeklinde yazalım.

$$\mathrm{B} = -\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t)$$

Burada biz X olarak $\left[0,1\right]$ aralığında tanımlanmış ve iki kez sürekli diferansiyellenen ve (3.5.6) sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların lineer uzayını işaret edelim.

$$\mathrm{X} = \left\{x \in C^2\left[0,1\right] : x(0) = x(1) = 0\right\}$$

X uzayında norm,

$$\|x\| = \|x\|_{C[0,1]} + \|x'\|_{C[0,1]} + \|x''\|_{C[0,1]} \quad , \quad \|x\|_{C[0,1]} = \max_{[0,1]} |x(t)|$$

formülü ile tanımlayalım.

Böylece, B operatörü tüm X uzayında tanımlanmış, değerleri Y uzayında olan operatördür.

A operatörü $\mathrm{A} = -\dfrac{d^2}{dt^2} \in \mathrm{L(X,Y)}$ olsun.

Her bir $y \in \mathrm{Y}$ için,

$$-x'' = y$$
$$x(0) = x(1) = 0$$

sınır değer probleminin $x \in \mathrm{X}$ çözümü var ve tektir. Böylece A operatörü sürekli dönüştürülebilendir.

A ve B operatörlerini $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $(1-\lambda)\mathrm{A}+\lambda \mathrm{B}$ parçası ile birleştirelim.

$$\mathrm{A}(\lambda) = -\frac{d^2}{dt^2} + \lambda b(t)\frac{d}{dt} + \lambda c(t) \quad , \quad t \in [0,1]$$

$\mathrm{A}(\lambda)$ 'nın $[0,1]$ aralığında sürekli operatör-fonksiyon olduğu açıktır. Bu $\mathrm{A}(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun I şartını sağladığı,

$$-x'' + \lambda b(t)x' + \lambda c(t)x = y(t) \quad , \quad 0 < t < 1 \tag{3.5.7}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{3.5.8}$$

sınır değer probleminin $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere tüm çözümleri için aprior değerlendirme (ön değerlendirme) yapmakla gösterilir.

Sonuçta bu değerlendirmeden (3.5.7)-(3.5.8) sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği parametreye göre devam metodunun esas teoreminden alınabilir.

Şimdi biz (3.5.7)-(3.5.8) sınır değer probleminin tüm çözümleri için aprior değerlendirmeyi bulalım. Bu amaçla (3.5.7) denkleminin her yanını $x(t)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her yanını t değişkenine göre 0'dan 1'e integralleyelim. (3.5.8) şartını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri de dikkate alalım.

$$-\int_0^1 x''x\,dt = \int_0^1 x'^2\,dt$$

$$\int_0^1 b(t)x(t)x'(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(t)x^2(t)\,dt$$

bu ifadeleri de dikkate aldığımızda aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\int_0^1 x'^2(t)\,dt + \lambda\int_0^1 \left[c(t) - \frac{1}{2}b'(t)\right]x^2(t)\,dt = \int_0^1 y(t)x(t)\,dt \tag{3.5.9}$$

Bulduğumuz bu eşitliğin tüm terimlerinin değerlendirmelerini yapalım.

Aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayalım.

$$\int_0^1 x'^2(t)dt \geq \frac{8}{\pi}\int_0^1 x^2(t)dt \qquad (3.5.10)$$

$$\int_0^1 \left[c(t) - \frac{1}{2}b'(t) \right] x^2(t)dt \geq \alpha \int_0^1 x^2(t)dt \qquad (3.5.11)$$

keyfi $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_0^1 y(t)x(t)dt \leq \varepsilon \int_0^1 x^2(t)dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 y^2(t)dt \qquad (3.5.12)$$

Önce (3.5.10) eşitsizliğini ispatlayalım. Bunun için

$$x(s) = \int_0^s x'(t)dt$$

eşitliğini kullanalım. Bu eşitsizliğin her yanından mutlak değer alıp sonra Cauchy eşitsizliğini kullanırsak,

$$|x(s)| \leq \int_0^s |x'(t)|\, dt \leq \left(\int_0^s dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s x'^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{s} \left(\int_0^1 x'^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

buluruz. Aynı yöntemle

$$|x(s)| \leq \int_0^s |x'(t)|\, dt \leq \sqrt{1-s} \left(\int_0^1 x'^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çarparsak

$$x^2(s) \leq \sqrt{s(1-s)} \int_0^1 x'^2(t)dt \qquad (3.5.13)$$

sonuncu eşitsizliğin her yanını s değişkenine göre 0'dan 1'e integralleyelim ve

$$\int_0^1 \sqrt{s(1-s)}ds = \frac{\pi}{8}$$

olduğunu da kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\int_0^1 x^2(s)ds \le \frac{\pi}{8}\int_0^1 x'^2(t)dt \tag{3.5.14}$$

$c(t) - \frac{b'(t)}{2} \ge \alpha$, $t \in [0,1]$ için alırsak (3.5.11) eşitsizliği ispatlanır. Şarta göre $t \in [0,1]$ için

$$c(t) - \frac{1}{2}b'(t) \ge \alpha > -\frac{8}{\pi}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsaymıştık. (3.5.12) eşitsizliğini ispatlamak için skaler çarpımı,

$$(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt$$

eşitliği ile tanımlayalım. O zaman,

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} y \, , \, \sqrt{\varepsilon}\, x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} y\right) \ge 0$$

eşitsizliğini kullanarak (3.5.12) eşitsizliği ispatlanır. Sonuncu eşitsizliğe ε *-eşitsizlik* denir. ε -eşitsizlikler aprior değerlendirme yapılırken sık sık kullanılır.

(3.5.9) eşitliğini ve (3.5.10), (3.5.11), (3.5.12) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz.

$$\left(\frac{8}{\pi} + \alpha - \varepsilon\right)\int_0^1 x^2(t)dt \le \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 y^2(t)dt$$

Burada $\varepsilon > 0$ sayısı yeterince küçük olduğunda

$$\int_0^1 x^2(t)dt \le \frac{1}{4\left(\frac{8}{\pi}+\alpha-\varepsilon\right)\varepsilon}\int_0^1 y^2(t)dt$$

Burada

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{4}{\pi}+\frac{\alpha}{2}$$

seçersek o zaman aşağıdaki eşitsizliği buluruz.

$$\int_0^1 x^2(t)dt \le c_1\int_0^1 y^2(t)dt$$

Burada,

$$c_1 = \frac{1}{\left(\frac{8}{\pi}+\alpha\right)^2}$$

Şimdi (3.5.9) eşitliğine dönerek bu eşitlikten aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\int_0^1 x'^2(t)dt \le \left(c_1c_2+c_3\right)\int_0^1 y^2(t)dt$$

bu eşitsizlikte

$$c_2 = \left\| c(t)-\frac{1}{2}b'(t)-\varepsilon_0 \right\|_{C[0,1]} \quad , \quad c_3 = \frac{1}{4\varepsilon_0}$$

(3.5.13) eşitsizliğinden,

$$x(s) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 x'^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini buluruz ve burada

$$\left(\int_0^1 y^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \|y\|_{C[0,1]}$$

eşitsizliğini de kullanırsak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\|x\|_{C[0,1]} \le \sqrt{\frac{c_1c_2+c_3}{2}}\,\|y\|_{C[0,1]} \tag{3.5.15}$$

Şimdi $\|x''\|_{C[0,1]}$ ve $\|x'\|_{C[0,1]}$ normları için değerlendirme yapalım. (3.5.7) denkleminden aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\|x''\|_{C[0,1]} \le \|b\|_{C[0,1]}\|x'\|_{C[0,1]} + \|c\|_{C[0,1]}\|x\|_{C[0,1]} + \|y\|_{C[0,1]} \tag{3.5.16}$$

Ama $\|x'\|_{C[0,1]}$ normu $\|x''\|_{C[0,1]}$ normu vasıtasıyla değerlendirilir. $x(0)=x(1)=0$ olduğundan Rolle teoremine göre öyle $\xi \in [0,1]$ noktası bulunur ki, $x'(\xi)=0$ olur. O zaman (3.5.7) denklemini aşağıdaki şekilde yazarak,

$$\left[x'\exp\left(-\lambda\int_0^t b(s)ds\right)\right]' = \left[\lambda c(t)x(t)-y(t)\right]\exp\left(-\lambda\int_0^t b(s)ds\right)$$

bu eşitliği ξ noktasından s'ye kadar t değişkenine göre integrallesek buluruz ki,

$$x'(t) = \int_\xi^t \exp\left(-\lambda\int_s^\theta b(s)ds\right)\left[\lambda c(\theta)x(\theta)-y(\theta)\right]d\theta$$

bu eşitsizlikten aşağıdaki değerlendirme bulunur.

$$\|x'\|_{C[0,1]} \le m\left(\|c\|_{C[0,1]}\|x\|_{C[0,1]} + \|y\|_{C[0,1]}\right) \tag{3.5.17}$$

burada ,

$$m = \max_{\lambda,s,\theta\in[0,1]} \exp\left(-\lambda\int_s^\theta b(s)ds\right)$$

Böylece (3.5.15), (3.5.16) ve (3.5.17) eşitsizliklerinden aranan aprior değerlendirme bulunur.

$$\|x\|_{C[0,1]} + \|x'\|_{C[0,1]} + \|x''\|_{C[0,1]} \leq c_4 \|y\|_{C[0,1]}$$

c_4'ün ne olduğunu kolaylıkla bulabiliriz.

SONUÇ

Bu çalışmada sınırlı ters operatörlü operatör denklemlerin yaklaşık çözüm metodları ele alınıp öğrenildi.

Sade halde küçük parametreler metodu incelendi, genel halde küçük parametreler metodu incelendi ve küçük parametreler metodunun uygulanmasına ait örnekler verildi.

Parametreye göre devam metodu incelendi. Parametreye göre devam metodu ve esas teorem incelendi. Esas teoremin özel hali ve genel hali için ayrı ayrı ispatları incelendi. Parametreye göre devam metodunun uygulanmasına ait örnekler gösterildi.

Böylece bu yaklaşık çözüm metodları bu tez çalışmasında incelenmiş ve öğrenilmiş oldu.

KAYNAKLAR

1. Bayraktar. M., Fonksiyonel Analiz, Erzurum, 1980.
2. Dunford N., Schwartz J.T. , Linear Operators-I. General Theory, Interscience Publishers, Inc. , New York, 1957.
3. Kirillov A. A., Gvişiani A. D. Teoremı i zadaçi funktsionalnovo analiza, –M.: Nauka, 1979.
4. Naymark M. A., Martinov V. V. Funktsionalnıy analiz, –Dolgoprudnıy: Izd-vo MFTI, 1970.
5. Trenogin.V.A., Funktsionalny Analiz, Moskova, Nauka, 1980.
6. Vasiliyev F. P. Metodı reşeniya ekstremalnıh zadaç, – M. : Nauka, 1981.
7. Zeidler. E., Applied Functional Analysis. Application to Mathematical Physics (Springer-Vorlag New York Inc.) Vol. 108, 1991.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Çorum'un Dodurga ilçesine bağlı Alpagut Kasabasında doğan Ali ÜNAL, ilköğretimini Alpagut İlköğretim Okulunda, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Osmancık Ortaokulu ve Osmancık Lisesinde tamamlamıştır. 1993 yılında kazandığı İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1997 yılında başarıyla bitirmiştir.

2010 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Sınırlı Ters Operatörlü Operatör Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Metodları Üzerine" başlıklı tezine devam etmektedir.

2010 yılından beri Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde eğitimine devam etmekte olan Ali ÜNAL, evli ve 2 çocuk babasıdır.

İletişim Bilgileri

Adres: Buhara evler mah. 3.cad Önder Apt. No: 7/14 ÇORUM

19500 ÇORUM

Telefon: (505) 590 00 29

E-posta: haliunal@hotmail.com